

فصل پنجم

دینامیک یعنی دانش عامل حرکت، به عبارتی یعنی دانشی که به بررسی **عوامل حرکت** می پردازد. برای آن که بتوانیم این دانش را بررسی نماییم، ابتدا باید با قوانین حاکم بر آن و کمیت هایی که در آن مطرح است مانند نیرو، تکانه و غیره آشنا شویم. البته این دانش به نگاه بنیان گذاران مکانیک بستگی دارد. یکی از انواع مختلف بیان طبیعت بر اساس دینامیک، مکانیک کلاسیک و بیان نیوتنی آن است. نیوتن دینامیک را بر پایه **نیرو** بیان می کند. در اینجا فقط به بحث دینامیک از نقطه نظر نیوتن می پردازیم.

تعریف نیرو

نیرو عاملی است که می تواند باعث تغییر سرعت چه از نظر جهت و چه از نظر مقدار شود. نیرو کمیتی برداری است یعنی مانند تمام بردارهای فیزیکی دارای **مقدار** و **جهت** و همچنین **نقطه اثر** است. معمولا نیرو را با F یا f نمایش می دهند. واحد آن در دستگاه $S.I$ **نیوتن** N می باشد. نیوتن مکانیک را بر پایه سه اصل که بعدا قانون نامیده شدند، بیان نمود.

قانون اول

اگر به جسمی نیرویی وارد نشود و یا برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر باشد، اگر جسم ساکن است، همواره در حال سکون می ماند و اگر حرکت می کند، حرکت آن با سرعت ثابت و روی خط راست می باشد. این قانون را **قانون اینرسی** یا **لختی** هم می نامند.

اینرسی یا لختی

قضاوت این که حرکت جسم چگونه است، به ناظر و در واقع به چارچوب وابسته به آن بستگی دارد. تمام ناظرها و یا تمام چارچوب هایی که نسبت به هم ساکن هستند و یا با سرعت ثابت حرکت می کنند را نسبت به هم **اینرسی** و یا **لخت** می نامند.

قانون دوم

اگر به جسمی نیرویی مانند F وارد شود و یا برآیند نیروهای وارد بر جسم F باشد، جسم شتابی می گیرد مانند \vec{a} متناسب با نیرو و در جهت آن، به طوری که:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

اگر برابند نیروها را با $\sum \vec{F}$ و یا \vec{F}_{net} نمایش بدهیم، داریم:

$$\vec{F}_{net} = \sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (2)$$

این رابطه برداری است ولی می توان آن را به صورت سه رابطه اسکالری نوشت:

$$\sum F_x = ma_x, \sum F_y = ma_y, \sum F_z = ma_z \quad (3)$$

قانون سوم

اگر جسم A به جسم B نیرویی مانند \vec{F}_{AB} وارد کند، جسم B نیز به جسم A نیرویی با همان اندازه ولی در جهت مخالف مانند \vec{F}_{BA} وارد می کند، به طوری که:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \quad (4)$$

این دو نیرو را **عمل و عکس العمل** می نامند. باید دقت نمود که نیروهای عمل و عکس العمل به **دو جسم** در حال برهمکنش وارد می شوند.

انواع نیرو

نیروی وزن

نیرویی است که از طرف زمین یا یک توده جسم بسیار بزرگ به یک جسم وارد می شود، به طوری که:

$$\vec{w} = m\vec{g} \quad (5)$$

نیروی گرانش

اگر دو جرم نقطه ای m_1 و m_2 در فاصله r از هم قرار داشته باشند، یکدیگر را با نیروی F **جذب** می کنند، به طوری که:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (6)$$

که در آن G عددی ثابت به نام **ثابت جهانی گرانش** است. مقدار آن در S.I برابر است با:

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2 \quad (7)$$

با مقایسه دو رابطه ی (5) و (6) ، می توان نتیجه گرفت که برای جسمی به جرم m در فاصله ی r از مرکز زمین قرار دارد، داریم

$$mg = G mM/r^2 \quad (8)$$

که در آن M جرم زمین است در نتیجه داریم

$$g = G M/r^2 \quad (9)$$

مثال

رابطه ی $g = G M/r^2$ را در نظر بگیرید. در نزدیکی سطح زمین (شعاع کره ی زمین

$r = 6370 \text{ km}$ است) شتاب گرانش زمین چقدر است؟ (جرم زمین $M = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$)

حل

می دانیم

$$g = G M/r^2 = (6.67 \times 10^{-11}) \frac{(5.98 \times 10^{24})}{(6.37 \times 10^6)^2} \approx 9.8 \text{ m/s}^2$$

مثال

جرم زمین $5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$ و جرم ماه $7.36 \times 10^{22} \text{ kg}$ و فاصله ی بین مراکز آن ها از هم $r = 3.82 \times 10^8 \text{ m}$ است. نیرویی که این دو به هم وارد می کنند را به دست آورید.

حل

$$F = G \frac{mM}{r^2} = (6.67 \times 10^{-11}) \frac{(7.36 \times 10^{22})(5.98 \times 10^{24})}{(3.82 \times 10^8)^2}$$

$$F \approx 2 \times 10^{20} \text{ N}$$

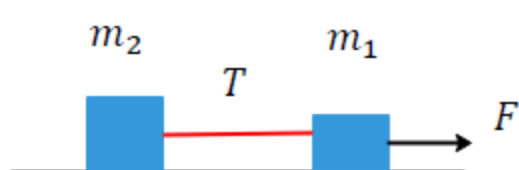
عکس العمل عمودی سطح جسمی به جرم m را روی سطح افقی قرار می دهیم. از طرف زمین نیروی وزن به جسم وارد می شود. اگر سطح زمین سخت باشد، جسم با این نیرو به سطح مشترک فشرده می شود. اگر این نیرو را **نیروی فشارنده به سطح** بنامیم ، این نیرو به سطح مشترک عمود است و جهت آن از طرف جسم به سطح است. عکس العمل این نیرو، نیرویی است که از طرف زمین (سطح مشترک) به جسم وارد می شود. این نیرو را **عکس العمل عمودی سطح** می نامند و عمود بر سطح مشترک به طرف جسم است. در شکل زیر عکس العمل عمودی سطح و نیروی وزن برای چند نوع سطح نشان داده شده است.

در شکل (الف) نیروی وزن جسم را به سطح تماس می فشارد و عکس العمل آن، نیروی عکس العمل عمودی سطح است یعنی $N = mg$. در شکل (ب) جسم، روی دیوار قائمی قرار دارد و با نیروی F به دیوار نگه داشته شده است. در این حالت، نیروی عکس العمل عمودی سطح، برابر همین نیروی F است. در شکل (پ) نیروی وزن را به دو مولفه ی $mg \sin \theta$ موازی با سطح و $mg \cos \theta$ عمود بر سطح تقسیم می کنیم. نیرویی که جسم را به تماس می فشارد، $mg \cos \theta$ است در نتیجه، نیروی عکس العمل عمودی سطح نیز برابر همین نیرو است یعنی $N = mg \cos \theta$. در شکل (ت) جسم در حال دوران روی سطح است. در این حالت، همان طور که بعدا بیان می شود، نیروی جانب مرکز مانع سقوط جسم می گردد. در این حالت $m v^2 / r = \Sigma F_{\text{خلاف جهت مرکز}} - \Sigma F_{\text{به طرف مرکز}}$

$$f_r = mg + N = m v^2 / R$$

مطابق شکل، جسمی به جرم m را توسط ریسمان سبکی از نقطه ای می آویزیم. ریسمان در راستای قائم می ایستد. از طرف زمین نیروی وزن mg به جسم وارد می شود، ولی جسم حرکت نمی کند، بنابراین قانون اول نیوتن باید نیرویی اثر وزن را خنثی کرده باشد. این نیرو که از طرف ریسمان به جسم وارد می شود، **نیروی کشش ریسمان** نام دارد. این نیرو را معمولاً با T نمایش می دهند، جهت آن همواره مماس بر ریسمان است.

مثال



مطابق شکل دو جرم $m_1 = 2 \text{ kg}$ و $m_2 = 3 \text{ kg}$ روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارند و توسط ریسمان سبکی به هم وصل شده اند. نیروی افقی $F = 12 \text{ N}$ مجموعه را می کشد. (الف) شتاب مجموعه و (ب) کشش ریسمان را بدست آورید.

حل

ابتدا نیروهایی که به هر یک از دو جرم وارد می شود را جداگانه رسم می کنیم.

(الف) چون اصطکاک نداریم با راستای قائم کاری نداریم و فقط نیروهای افقی را در نظر می گیریم.

برای جرم m_1 داریم

$$m_1 g - T = m_1 a \Rightarrow 80 - T = 8a \quad (1)$$

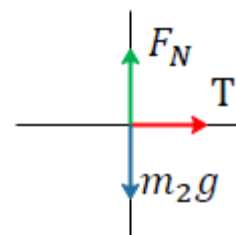
برای جرم m_2 داریم

$$T - m_2 g = m_2 a \Rightarrow T - 40 = 4a \quad (2)$$

با جمع دو رابطه ی (1) و (2) داریم:

$$80 - T + T - 40 = 8a + 4a$$

$$a = 3.3 \text{ m/s}^2$$



از رابطه ی (1) داریم:

$$80 - T = (8)(3.2) \Rightarrow T = 53.6 \text{ N}$$

نیروی فنر (نیروی کشسان یک بعدی)

جسمی به جرم m را به انتهای ریسمان سبکی می بندیم و آن را از انتهای دیگر می آویزیم. وزنه را گرفته و آهسته پایین می آوریم، فنر کشیده شده و همراه وزنه پایین می آید و تغییر طول می دهد. وزنه را باز هم پایین تر می آوریم تا در جایی با تغییر طول Δl وزنه می ایستد. از طرف زمین نیروی وزن به جسم وارد می شود ولی وزنه حرکتی نمی کند پس بر طبق قانون اول نیوتن نیرویی باید اثر آن را خنثی نماید. این نیرو که از طرف فنر به جسم وارد می شود، **نیروی کشسانی** فنر یا به طور خلاصه نیروی فنر نامیده می شود. برای یک فنر ایده ال این نیرو متناسب با تغییر طول فنر است،

$$f_{sp} = -k \Delta l \quad (10)$$

که در آن k را **ثابت کشسانی** فنر یا **ضریب سختی** فنر می نامند. رابطه بالا را معادله ی **هوک** یا قانون هوک می گویند. علامت منفی نشان می دهد جهت نیروی فنر همواره خلاف جهت تغییر طول فنر است. واحد ثابت k در دستگاه S.I. ، N/m است.

مثال

فنری با ضریب سختی $k = 200 \text{ N/m}$ در دست است. به آن وزنه ای به جرم $m = 4 \text{ kg}$ می بندیم و در راستای قائم می آویزیم. تغییر طول فنر چقدر می گردد؟

حل

چون وزنه حرکت نمی کند، نیروی وزن وزنه را نیروی فنر خنثی کرده است.

$$f_{sp} = mg = (4)(10) = 40 \text{ N}$$

از طرف دیگر از قانون هوک داریم

$$f_{sp} = k \Delta l \Rightarrow 40 = 200 \Delta l$$

$$\Delta l = 0.2 \text{ m یا } 20 \text{ cm}$$

نیروی اصطکاک

در اثر ناهمواری های میکروسکوپی که روی تمام سطوح وجود دارد، هنگامی که دو جسم روی هم کشیده می شوند، نیروی مقاومی در اثر **درگیری ناهمواریها** ایجاد می شود. علاوه بر این، عوامل دیگری نیز مانند نیروهای **پیوستگی** و **چسبندگی** هم وجود دارند که نیروی مقاوم را افزایش می دهند. مجموعه ی این نیروهای مقاوم را نیروی اصطکاک می گویند. حال جسمی به جرم m را روی یک سطح افقی قرار می دهیم و آن را توسط نیروی افقی و کوچک F می کشیم. جسم حرکتی نمی کند، پس بر طبق قانون اول نیوتن نیرویی اثر F را خنثی کرده است. این نیرو که از طرف سطح مشترک به جسم وارد می شود، نیروی اصطکاک است. از آنجا که جسم در حال سکون است این اصطکاک را **ایستایی** می نامند و معمولاً با f_s نمایش می دهند. نیروی F را افزایش می دهیم باز جسم حرکتی نمی کند. تا جسم حرکت نکند، رابطه $F = f_s$ برقرار است. نیروی F را آنقدر افزایش می دهیم که جسم در **آستانه حرکت** قرار بگیرد. در این حالت، اصطکاک ایستایی نیز به ماکزیمم مقدار خود می رسد که آنرا با $f_{s,max}$ نمایش می دهیم. در آستانه حرکت این رابطه برقرار است

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \quad (11)$$

کمیت μ_s را **ضریب اصطکاک ایستایی** می نامند. این کمیت بدون بعد و واحد است و تقریباً مستقل از شکل و اندازه سطح تماس است و فقط به جنس دو سطح و میزان ناهمواری های آن ها بستگی دارد. اگر نیروی F را باز هم افزایش دهیم جسم شروع به حرکت می کند و از حالت ایستایی خارج می شود. در این حالت اصطکاک را **لغزشی** یا **جنبشی** می نامند و با f_k نمایش می دهند. برخلاف اصطکاک ایستایی که از صفر تا $f_{s,max}$ تغییر می کند، اصطکاک لغزشی تقریباً ثابت است و برابر است با

$$f_k = \mu_k F_N \quad (12)$$

کمیت μ_k را **ضریب اصطکاک لغزشی** می نامند. این کمیت هم مانند μ_s بدون بعد و واحد است. علت نیروی اصطکاک، همان طور که قبلاً هم اشاره شد، ناهمواری های میکروسکوپی سطوح تماس می باشد. این ناهمواری ها در یکدیگر فرو می روند و در موقع حرکت نیروی مقاومی ایجاد می کنند. معمولاً در اثر حرکت، ناهمواری ها در نقاط تماس ذوب شده و در هم فرو می روند و بعد از سرد شدن جوش

خوردگی های نقطه ای ایجاد می کنند که باز یک نیروی مقاوم در مقابل حرکت نسبی جسم و سطح تماس است.

مثال 4-7 جسمی به جرم 10 kg روی یک سطح افقی قرار دارد. ضریب اصطکاک بین جسم و سطح $\mu_k = 0.2$ و $\mu_s = 0.4$ است. نیروی اصطکاک لغزشی و بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی را به دست آورید.

حل

$$F_N = mg = (10)(10) = 100 \text{ N}$$

$$f_k = \mu_k F_N = (0.2)(100) = 20 \text{ N}$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = (0.4)(100) = 40 \text{ N}$$

مثال 4-8 مطابق شکل 4-8، نیروی F با زاویه $\theta = 53^\circ$ بالای افق به جسمی به جرم $m = 8 \text{ kg}$ وارد می شود $\mu_k = 0.2$ و $\mu_s = 0.4$. در دو حالت زیر نیروی F را به دست آورید. (الف) جسم در آستانه حرکت باشد (ب) شتاب جسم $a = 2 \text{ m/s}^2$ باشد.

حل

$$F_x = F \cos \theta = 0.6 F$$

$$F_y = f \sin \theta = 0.8 F$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_y + F_N - mg = 0$$

$$0.8 F + F_N - 80 = 0 \Rightarrow F_N = 80 - 0.8 F$$

$$f_{s,max} = F_N \Rightarrow \mu_s F_N = 0.6 F$$

$$(0.4)(80 - 0.8 F) = 0.6 F \Rightarrow 32 - 0.32 F = 0.6 F$$

$$F = 34.8 \text{ N}$$

$$f_k = \mu_k F_N = 0.2(80 - 0.8F) = 16 - 0.16 F$$

$$F_x - f_k = ma \Rightarrow 0.6 F - (16 - 0.16) = 8(2)$$

$$F = 42.1 N$$

مثال 4-9 جسمی به جرم 12 kg روی یک سطح افقی قرار دارد و با نیروی افقی $F = 80 N$ کشیده می شود. $\mu_k = 0.2$ و $\mu_s = 0.4$ است. (الف) نوع اصطکاک، اندازه آن (ب) شتاب جسم را به دست آورید.

حل

(الف) در راستای قائم شتابی نداریم، بنابراین این

$$F_N - mg = 0 \Rightarrow F_N = 120 N$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = (0.4)(120) = 48 N < F$$

پس جسم حرکت می کند و اصطکاک آن لغزشی است.

$$f_k = \mu_k F_N = (0.2)(120) = 34$$

(ب)

$$\Sigma F_x = ma_x \Rightarrow F - f_k = ma$$

$$80 - 34 = 12a \Rightarrow a = 4.7 m/s^2$$

مثال 4-10 جسمی به جرم $m = 12 kg$ روی سطح شیبدار با زاویه $\theta = 37^\circ$ قرار دارد. $\mu_k = 0.1$ و $\mu_s = 0.2$ است. نیروی اصطکاک و نوع آن را مشخص کنید.

حل

اگر جسم حرکت کند، این حرکت در راستای سطح شیبدار است. این جهت را محور x در نظر می گیریم

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_N - mg \cos \theta = 0$$

$$F_N - (12)(10)(\cos 37) = 0 \Rightarrow F_N = 96 \text{ N}$$

$$f_k = \mu_k F_N = (0.1)(96) = 9.6 \text{ N}$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = (0.2)(96) = 19.2 \text{ N}$$

نیروی که جسم را رو به پایین می آورد $mg \sin \theta$ است

$$mg \sin \theta = (120)(0.6) = 72 \text{ N} > f_{s,max}$$

پس جسم شتاب می گیرد و نوع اصطکاک لغزشی است.

مثال 4-11 در شکل 4-14 جرم جسم $m = 8 \text{ kg}$ و زاویه ی شیب سطح $\theta = 37^\circ$ است. نیروی F موازی سطح به جسم وارد می شود. اندازه ی آن چقدر باشد تا جسم با شتاب $a = 2 \text{ m/s}^2$ به سمت بالای سطح کشیده شود؟

حل

در راستای y شتاب نداریم، بنابراین

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_N - mg \cos \theta = 0$$

$$F_y = (8)(10)(\cos 37) = 63 \text{ N}$$

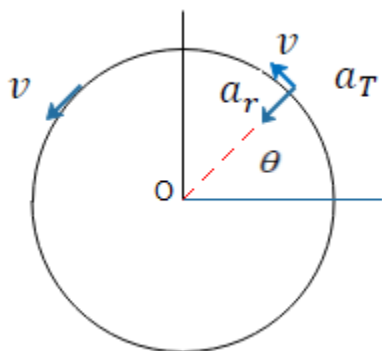
$$f_k = \mu_k F_N = (0.2)(64) = 12.8 \text{ N}$$

شتاب جسم در راستای محور x است. بنابراین

$$\sum F_x = ma \Rightarrow F - f_k = ma$$

$$F = 28.8 \text{ N}$$

حرکت دورانی



یکی از انواع حرکت در صفحه، حرکت دورانی است. اگر ذره
طوری

حرکت کند که همواره روی یک دایره به شعاع R حرکت کند
حرکت

را دورانی می گویند. واضح است که سرعت در هر نقطه از مسیر
به

دلیل تغییر جهت سرعت در هر لحظه به معنی تغییر سرعت از نظر

مقدار و جهت و یا هر دو است. به دلیل تغییر جهت سرعت، در هر نقطه از مسیر شتابی رو به مرکز
دایره به نام شتاب مرکز گرا یا جانب مرکز ایجاد می شود. این شتاب برابر است با:

$$a_r = v^2/r \quad (13)$$

که در آن r شعاع دوران و v سرعت در هر لحظه است. اگر مقدار سرعت نیز تغییر کند، شتابی مماس
بر دایره به نام شتاب مماسی ایجاد می شود. این شتاب برابر است با

$$a_T = |dv|/dt \quad (14)$$

شتاب کل برابر است با

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_T^2} \quad (15)$$

سرعت زاویه ای

در حرکت دورانی زاویه بین **خط مرجع** که معمولاً محور x انتخاب می شود و **شعاع حامل** یعنی شعاعی که ذره روی آن قرار دارد را **مختصه ی زاویه ای** یا **مکان زاویه ای** ذره می گویند. در این جا آن را با θ مشخص می کنیم. سرعت یا آهنگ تغییر زاویه ی θ را **سرعت زاویه ای** می گویند و آن را معمولاً با ω نمایش می دهند.

$$\omega = d\theta/dt, \bar{\omega} = \Delta\theta/\Delta t \quad (16)$$

واحد آن در S. I، رادیان بر ثانیه rad/s است. اگر مقدار سرعت زاویه ای در حرکت ثابت بماند، حرکت را دورانی یکنواخت می نامند.

دوره یا زمان دوران

مدت زمانی که طول می کشد متحرک یک دور کامل دایره را طی کند، **زمان دوران** می نامند و معمولاً با T نمایش می دهند.

بسامد یا فرکانس دوران

فرکانس تعداد دورهایی است که متحرک در یک ثانیه طی می کند. آن را معمولاً با f نشان می دهند. واحد آن دور بر ثانیه است rev/s . واضح است که

$$f = 1/T \quad (17)$$

هنگامی که متحرک یک دور دایره را طی می کند، مسافت $2\pi R$ و زاویه ی 2π را در مدت زمان T طی می کند، بنابر این داریم:

$$v = 2\pi R / T, v = R\omega \quad (18)$$

که v سرعت خطی متحرک است.

مثال

ذره ای با سرعت زاویه ای $31.4 rad/s$ روی دایره ای به شعاع $r = 80 cm$ دوران می کند. (الف) دوره (ب) بسامد (پ) سرعت خطی (ت) شتاب جانب مرکز (ث) شتاب مماسی آن چقدر است؟

حل

الف) برای بدست آوردن دوره از رابطه زیر استفاده می کنیم

$$\omega = 2\pi/T \Rightarrow 31.4 = (2)(3.14)/T$$

$$T = 0.2 \text{ s}$$

(ب)

$$f = 1/T = 5 \text{ rev/s}$$

(پ)

$$v = r\omega = (0.8)(31.4) = 25.12 \text{ m/s}$$

(ت)

$$a_r = r\omega^2 = (0.8)(31.4)^2 = 788.8 \text{ m/s}^2$$

ث) حرکت دورانی یکنواخت است بنابراین این شتاب مماسی صفر است

$$a_T = 0$$

دینامیک دورانی

نیروی مرکز گرا {جانب مرکز}

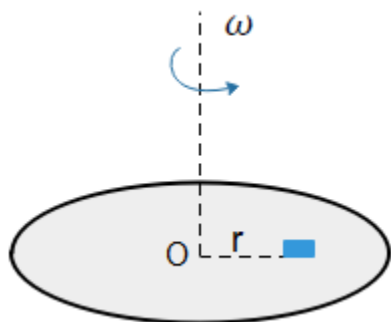
نیرویی که باعث ایجاد شتاب مرکز گرا می شود یعنی به جسم اجازه می دهد بتواند جهت سرعت خود را تغییر دهد، را **نیروی مرکزگرا** می نامند و با f_r نمایش می دهند.

$$f_r = m v^2 / r \quad (19)$$

دقت شود نیروی مرکزگرا، نیرویی مانند کشش ریسمان، گرانش و مانند آن نیست بلکه در هر حرکتی برآیند نیروهاییی که رو به مرکز دوران هستند را **نیروی مرکزگرا** می گویند. برای مثال، در دوران زمین به دور خورشید، نیروی گرانش، در دوران الکترون به دور هسته، نیروی جاذبه کولنی و در پیچ جاده های افقی، نیروی اصطکاک عرضی لاستیک ها و جاده، نیروی جانب مرکز هستند.

نکته: نیروی مرکزگرا باعث کشیده شدن جسم به طرف مرکز دوران نمی شود بلکه فقط به جسم کمک می کند بتواند جهت حرکت خود را تغییر دهد.

مثال



جسمی به جرم $m = 0.2 \text{ kg}$ روی صفحه ای که با سرعت زاویه ای ω در حال دوران است قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح $\mu_s = 0.4$ و فاصله جسم تا مرکز دوران $r = 0.8 \text{ m}$ است. سرعت زاویه ای چقدر باشد تا جسم در آستانه لغزش روی سطح قرار بگیرد؟

حل

در راستای قائم شتابی وجود ندارد و نیروها اثر هم را خنثی می کنند

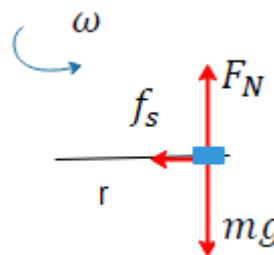
$$F_N = mg = (0.2)(10) = 2 \text{ N}$$

در راستای افقی، تنها نیروی وارد بر جسم، نیروی اصطکاک ایستایی f_s است که نیروی مرکزگرا را تشکیل می دهد.

$$f_s = \mu_s F_N = (0.4)(2) = 0.8 \text{ N}$$

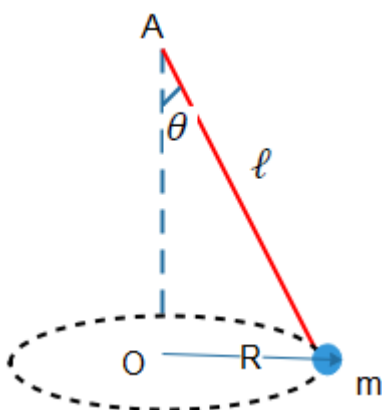
$$f_s = f_r = mr\omega^2 \Rightarrow 0.8 = (0.2)(0.8)\omega^2$$

$$\omega = 2.24 \text{ rad/s}$$



مثال

آونگ مخروطی ساده



جسمی به جرم $m = 0.4 \text{ kg}$ را به ریسمانی به طول $\ell = 2 \text{ m}$ بسته

و در صفحه افقی دوران می دهیم. سرعت دوران و زاویه ریسمان با راستای قائم θ را ثابت نگه می داریم. اگر $\theta = 37^\circ$ باشد،

(الف) کشش ریسمان (ب) سرعت زاویه ای دوران ω (پ) شعاع دوران را بدست آورید.

حل

(الف) در هر لحظه دو نیرو به جرم m وارد می شود. شتاب جسم، مرکز گرا و به طرف نقطه O است. نیروی کشش ریسمان T به دو مولفه تجزیه می شود، یکی مولفه قائم $T_y = T \cos \theta$ که نیروی وزن را خنثی می کند و دیگری مولفه افقی کشش ریسمان $T_x = T \sin \theta$ که نیروی مرکز گرا را تشکیل می دهد.

$$T_y = T \cos \theta = (0.4)(10) = 5 \text{ N}$$

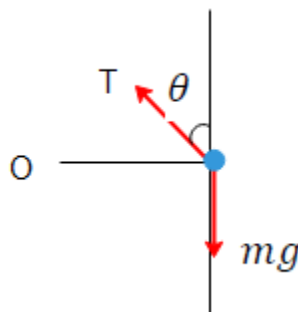
(ب)

$$R = \ell \sin \theta = (2)(\sin 37^\circ) = 1.2 \text{ m}$$

$$T_x = T \sin \theta = f_r = mR\omega^2$$

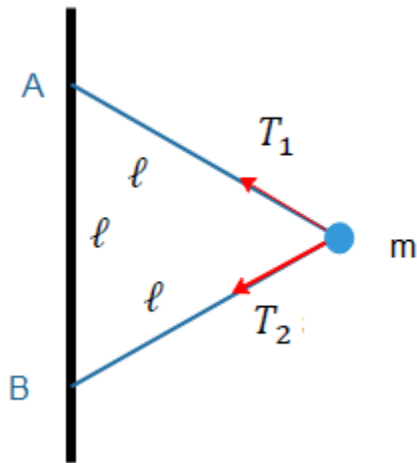
$$(5)(\sin 37^\circ) = (0.4)(1.2)\omega^2$$

$$\omega = 2.5 \text{ rad/s}$$



مثال

آونگ مخروطی مرکب



جسمی به جرم $m = 2 \text{ kg}$ مطابق شکل توسط دو رشته
ریسمان

به میله ای بسته شده است، به طوری که ریسمان ها و میله،

مثلث متساوی الاضلاعی را تشکیل می دهند. طول ریسمان ها

$l = 1.2 \text{ m}$ می باشد و مجموعه با سرعت زاویه ای

$\omega = 5 \text{ rad/s}$ دوران می کند. (الف) شعاع دوران

(ب) کشش هر ریسمان (پ) شتاب مرکزگرای جسم چقدر است؟

حل

شعاع دوران برابر است با

$$R = l \cos 30 = (1.2)(0.87) = 1.04 \text{ m}$$

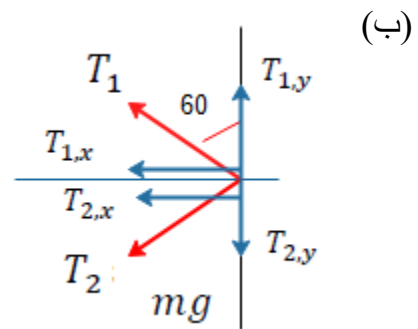
$$\sum F_y = T_1 \sin 30 - mg - T_2 \sin 30 = 0$$

$$0.5 T_1 - 0.5 T_2 = 20 \Rightarrow T_1 - T_2 = 40 \text{ N} \quad (1)$$

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow T_1 \cos 30 + T_2 \cos 30 = mR\omega^2$$

$$(0.87)T_1 + (0.87)T_2 = (2)(1.04)(5)^2 = 52$$

$$T_1 + T_2 = 59.8 \text{ N} \quad (2)$$



از دو رابطه ی (1) و (2) داریم:

$$2T_1 = 99.8 \Rightarrow T_1 = 49.9 \text{ N}$$

$$T_2 + 49.9 = 59.8 \Rightarrow T_2 = 9.9 \text{ N}$$

(ب)

$$a_r = R\omega^2 = (1.04)(5)^2 = 52 \text{ m/s}^2$$

$$mg \sin \theta$$

$$mg \cos \theta$$