فهرست مطالب

۱ یادآوری های دبیرستان

۱.۱ لگاریتم

لگاریتم، یک عدد در یک پایه، برابر با توانی از پایه است که آن عدد را می دهد.

$$a^b = c \Leftrightarrow \log_a(c) = b$$

برای مثال:

$$10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log_{10}(1000) = 3$$

در سیستم اعداد دسیمال [۱] ، پایه ی لگاریتم ۱۰ را نمینویسیم. مثال بالا معمولا به صورت زیر نوشته میشود:

$$\log(1000) = 3$$

۱.۱.۱ قوانین لگاریتم

- $\log_a(x) = \frac{1}{\log_x(a)}$
- $\log_a(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(a)}$
- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^y) = y.\log_a(x)$
- $\log_a(m) = \log_a(n) \Leftrightarrow m = n$

۲.۱ مثلثات

۱.۲.۱ اتحاد های مثلثاتی

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
- $\csc x = \frac{1}{\sin x}$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
- $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

۳.۱ حد و پیوستگی

۱.۳.۱ تعریف حد

حد، بررسی رفتار تابع $f(x)$ در همسایگی $x = a$ است و به صورت زیر تعریف میشود:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

[۱] در سیستم عدد باینری، $\log n$ به معنی لگاریتم n به پایه ی ۲ است. مثل bigO ی الگوریتم های conquer and divide

۲.۳.۱ حالت های ابهام حد

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\infty - \infty$
- $0 * \infty$
- 1^{∞}
- ∞^{0}
- 0^{∞}

۳.۳.۱ قوانین حد

1. $f(x) = c^2 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = c$
2. $\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$
3. $\lim_{x\to a} cf(x) \pm bg(x) = c \lim_{x\to a} f(x) \pm b \lim_{x\to a} g(x)$
4. $\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} g(x)$
5. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$
6. $\lim_{x\to a} |f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)|$
7. if $n = 2k \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) \geq 0 : \lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$
8. $\lim_{x\to a} f(x)^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n$
9. if $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, if $g(x) \leq f(x) \leq h(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = L$ [3]

۴.۳.۱ قوانین هم ارزی

1. $\lim_{u\to 0} \sqrt[n]{1+u} = 1 + \frac{u}{n}$
2. $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
3. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = \ln a$
6. $\lim_{x\to 1} \frac{x^r - 1}{x-1} = r$
7. $\lim_{x\to 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1} = \frac{p}{q}$

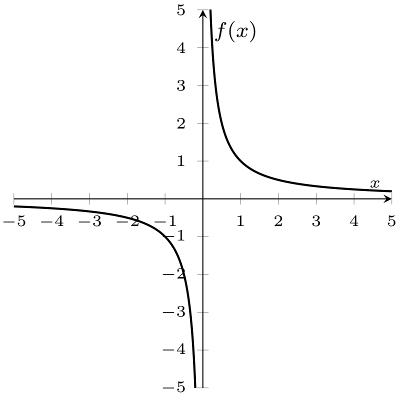
---

[2] در اینجا c به معنی عدد ثابت است.

[3] قاعده فشردگی

۵.۳.۱ حد در بینهایت

حد در بینهایت زمانی است که حد را در نقطه ی $a = \infty$ میسنجیم. حد در بینهایت، مجانب افقی را در صورت وجود بررسی میکند. برای مثال، تابع $\frac{1}{x}$ در نقطه $y = 0$ مجانب افقی است:



وجود مجانب افقی به صورت زیر تعریف میشود:

$$\text{if } \lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

قوانین محاسبه حد در بینهایت:

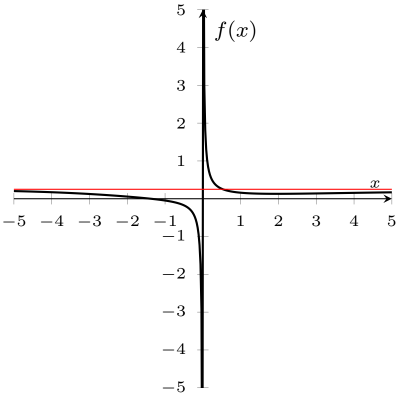
قاعده ی پرتوان، در حد در بینهایت اجرا میشود. به این معنی است که ایکس هایی که توان های بیشتری دارند از صورت و مخرج را نگه میداریم و بقیه را حذف میکنیم. بعد از اینکار، از قوانین زیر برای حل حدی مانند حد زیر استفاده میکنیم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

- $n > m = \pm\infty$
- $n < m = 0$
- $n = m = \frac{a_n}{b_m}$

برای مثال، $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+x^2+8x+17}{12x^3+17(x^2+9x)}$ با قاعده ی پرتوان به شکل $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{12x^3}$ ساده میشود و با سومین قانون حد بینهایت حد و همون مجانب افقی را محاسبه میکنیم:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{12x^3} = \frac{3}{12}$$



۶.۳.۱ پیوستگی

پیوستگی یک نقطه در تابع، به معنی پیوسته بودن و قطع نشدن تابع در آن نقطه است. سه شرط زیر به ترتیب باید رعایت شوند تا بگوییم تابع در نقطه ی a پیوسته است:

1. $f(a) = L$
2. $\lim_{x\to a} f(x) = L'$
3. $L = L'$

۲ درس های جدید

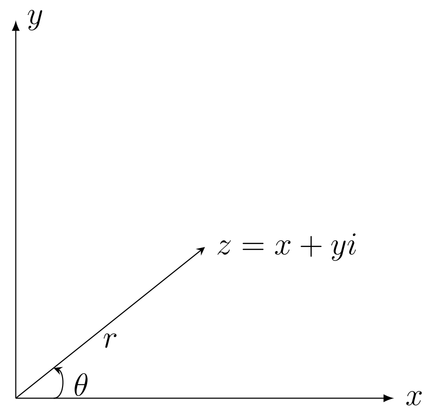
۱.۲ اعداد مختلط

عدد مختلط، ترکیبی از یک عدد موهومی [۴] و یک عدد طبیعی است. که به a مولفه حقیقی و به b مولفه موهومی گفته میشود. یک عدد مختلط معمولا به صورت زیر تعریف میشود:

$$z = a + bi$$

۱.۱.۲ فرم قطبی

یک عدد مختلط را میتواند به صورت قطبی هم نوشت. دستگاه زیر را در نظر بگیرید. r فاصله نقطه از مبدا و θ زاویه نسبت به محور مثبت x بر حسب رادیان است.



هنگام کار با اعداد مختلط فرض میکنیم r مثبت است و θ می تواند هر زاویه ممکنی (مثبت و منفی) باشد. این بدین معنی است که بینهایت انتخاب برای تعیین θ وجود دارد. البته $z = 0$ از این قاعده مستثنی است. زیرا θ در مبدا تعریف نشده است. بنابراین، فرم قطبی را برای اعداد مختلط غیر صفر در نظر میگیریم. فرمول تبدیل زیر را می توان برای تبدیل نقطه ای با مختصات قطبی (r, θ) به متخصات کارتزین (x, y) به کار برد:

$$a = r\cos\theta \qquad b = r\sin\theta$$

اگر عدد مختلط را $z = a + bi$ تعریف کنیم، شکل قطبی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

فرمول های زیر را میتوان برای تبدیل مختصات کارتزین به قطبی و نمایی استفاده کرد:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

[۴]عدد موهومی(imaginary): $i = \sqrt{-1}$

مقدار r در حقیقت همان اندازه z است و می توان عدد مختلط را به صورت زیر هم نوشت:

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

زاویه θ، آرگومان z نام دارد و به صورت زیر نوشته میشود:

$$\theta = \arg z$$

آرگومان z میتواند یکی از بی نهایت مقدار θ باشد که از حل رابطه زیر به دست می آید:

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

که در نتیجه:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

این تعداد آرگومان بی نهایت، به اندازه ضریب صحیحی از 2π با هم تفاوت دارند.
گفتیم برای انتخاب آرگومان یک عدد مختلط، بی نهایت انتخاب وجود دارد و همه این انتخاب ها به اندازه 2π نسبت به هم اختلاف دارند. به عبارت دیگر، اگر θ پاسخ برای آرگومان عدد مختلط باشد، مقدار $\theta + 2\pi$ نیز یک پاسخ است، زیرا به اندازه یک دور کامل در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت کرده و به همان نقطه θ رسیده است.

۲.۱.۲ فرم نمایی

از فرمول اویلر استفاده میکنیم:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

بعد با استفاده از فرمول اویلر میتوانیم فرم قطبی یک عدد مختلط را به فرم نمایی زیر بنویسیم:

$$z = re^{i\theta}$$

که در آن، $\theta = \arg z$ است و مشابه فرم قطبی، بی نهایت فرم نمایی برای یک عدد مختلط وجود دارد.

۲.۲ عدد نپر (اویلر)

عدد نپر به صورت زیر تعریف میشود:

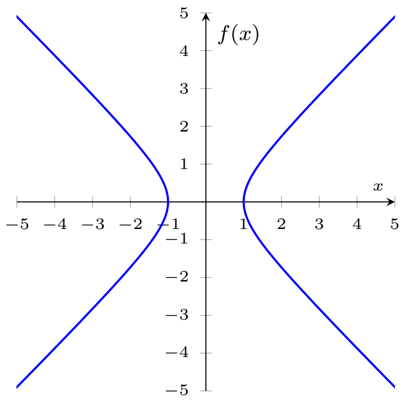
$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

لگاریتمی [1.1] که مبنای آن عدد نپر باشد را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$\log_e(x) = \ln(x)$$

۳.۲ توابع هایپربولیک

توابع هایپربولیک توابعی هستند که بجای دایره ی مثلثاتی به نسبت دو هذلولی افقی واحد متانسب میشوند.



نسبت های مثلثاتی هایپربولیک مثل نسبت های مثلثاتی معمولی تعریف و نوشته میشوند، ولی جلوی آنها حرف h برای هایپربولیک بودن می آید.

در توابع هذلولی افقی داریم $x^2 - y^2 = 1$ و میدانیم کسینوس هایپربولیک با ایکس و سینوس هایپربولیک با ایگرگ در رابطه ای که گفته شد متناسب است. پس اتحاد مثلثاتی اول را در توابع هایپربولیک به صورت زیر مینویسیم:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

۱.۳.۲ اتحاد های مثلثاتی هایپربولیک

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
- $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$
- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- $\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
- $\operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$
- $\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$
- $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cos y \pm \cosh x \sinh y$
- $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$
- $\tanh(u \pm v) = \frac{\tanh u \pm \tanh u}{1 \pm \tanh u \tanh v}$
- $\tanh u * \coth u = 1$
- $\operatorname{sech} u = \frac{1}{\cosh u}$
- $\operatorname{csch} u = \frac{1}{\sinh u}$
- $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$
- $1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x$