



آزمون CodeShark شماره ۴

۲ خرداد ۱۳۹۵

طراحی : محمد حسن موسوی، ایمان غلامی، حمیدرضا هدایتی

- زمان آزمون ۳ ساعت و ۳۰ دقیقه می باشد.
- عددی به نام Δ (دلتا) در اختیار شما قرار گرفته است که در بخش اطلاعات صفحه‌ی آزمون نوشته شده است.
- اطلاعاتی‌های آزمون در بخش اطلاعاتی‌ها قرار می‌گیرند. حتما در طی آزمون این بخش را برای اطلاعات جدید چک کنید.
- برای پرسش از داوران از بخش «پرسش‌ها» استفاده کنید.
- برای هر زیر مسئله حداکثر می‌توانید ۲۵ بار پاسخ ارسال کنید. درستی جواب شما پس از ارسال بررسی خواهد شد و به شما اعلام می‌گردد.

درخت‌های موسولستان

در موسولستان درخت‌های عجیب و غریب بسیاری با **بی‌نهایت راس** پیدا می‌شود.

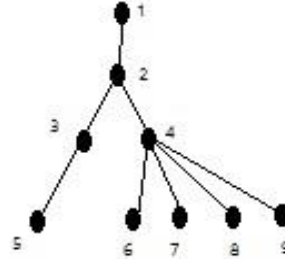
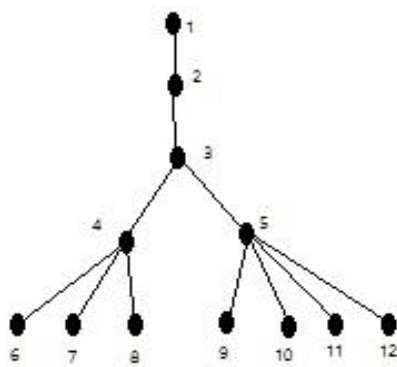
یکی از عجیب‌ترین آن‌ها درخت موسولی است که بدین شکل است :

– درجه‌ی هر راسی (تعداد راس‌های مجاور آن) با شماره‌ی آن راس برابر است (درخت از **راس شماره ۱** ریشه‌دار شده است)

– اگر $\gamma < \chi$ شماره‌ی تمام بچه‌های χ کمتر از بچه‌های γ خواهد بود .

– شماره‌ی راس‌ها اعداد طبیعی‌اند.

درختی دیگر به اسم موس‌ماسک وجود دارد که بسیار شبیه به درخت موسولی است با این تفاوت که تعداد فرزندهای هر راس با شماره χ برابر با بزرگترین توانی از دو است که χ بر آن بخش‌پذیر است.



در سمت راست چند طبقه‌ی اول از درخت موس‌ماسک و در سمت چپ چند طبقه‌ی اول از درخت موسولی رو می‌بینید

اگر موس‌یلیتی خوبی هستید باقیمانده تقسیم پاسخ پرسش‌های زیر را **4** بر 4 پیدا کنید.

زیرمسئله‌ها :

الف) مجموع شماره اجداد راس شماره 10^{12} (شامل خودش) در درخت موسولی چند است ؟ (۷ نمره)

ب) مجموع شماره اجداد راس شماره 10^{12} (شامل خودش) در درخت موس‌ماسک چند است ؟ (۹ نمره)

ج) پیرو مکتب موسولیسیم در درخت موسولی اگر راسی ارتفاعش بیش از نه است باید ترکیده شود در این صورت جمع شماره‌های راس

های زیردرخت راس شماره ۱۷ (شامل خودش) چند است ؟ (۷ نمره)

د) سران مکتب موسولیسیم تصمیم گرفته‌اند به درخت موس‌ماسک اجازه داشتن راس تا طبقه‌ی ۱۸ را بدهند. در این صورت جمع

شماره‌های راس‌های زیردرخت راس شماره ۱۷ (شامل خودش) چند است ؟ (۱۰ نمره)

برج العرب

موسی که پناهنده عرب به موسولستان است، n برج در یک ردیف دارد (از چپ به راست 1 تا n). هر برج از مکعب های واحد ساخته شده است. طول برج i -ام (که برابر a_i است) از رابطه زیر به دست می آید:

- $a_1 = 2016 \bmod M$
- $a_i = (1437 a_{i-1} + 1395) \bmod M \quad (1 < i \leq n)$

یک دنباله از برج ها عرب پسند است اگر صعودی باشد (نه لزوما صعودی اکید). موسی در هر حرکت می تواند یکی از مکعب های برج i ام را (در صورت وجود) بردارد و به برج $i + 1$ ام (در صورت وجود) منتقل کند. زشتی یک دنباله از برج ها برابر است با حداقل تعداد عملیات لازم تا دنباله برج ها عرب پسند شود.

زشتی دنباله برج های a را با $f(a)$ نشان می دهیم.
زیررشته شامل l تا r دنباله a (شامل خود آن ها) را با $substr(l, r, a)$ نشان می دهیم.

زیرمسئله ها :

در زیر مسئله های الف تا ج به ازای n و M های داده شده باقیمانده تقسیم $f(a)^{f(a)}$ بر Δ را حساب کنید.

- الف) در این زیر مسئله $n = 10^{18} + 2$ و $M = 2$ (۴ نمره)
ب) در این زیر مسئله $n = 10^3 + 2$ و $M = 123457$ (۷ نمره)
ج) در این زیر مسئله $n = 10^3 + 2$ و $M = 10^{11} + 19$ (۹ نمره)

اگر $g(a)$ برابر جمع زشتی تمامی زیر رشته های دنباله برج های a باشد:

$$g(a) = \sum_{l=1}^n \sum_{r=l}^n f(substr(l, r, a))$$

در زیر مسئله های د و ه به ازای n و M های داده شده باقیمانده تقسیم $g(a)$ بر Δ را حساب کنید.

- د) در این زیر مسئله $n = 10^3 + 2$ و $M = 10^{11} + 19$ (۵ نمره)
ه) در این زیر مسئله $n = 10^4 + 2$ و $M = 10^{11} + 19$ (۹ نمره)

فرزان خان

فرزان یکی از شهروندان موسولستان است. بعد از این که فرزان نتوانست موسیلتی خوبی باشد تصمیم گرفت از شهر فرار کند تا با خشم موسول مواجه نشود.

هنگام فرار درخت دیگری به نام گوگولی رو دید که خیلی بزرگتر از درخت موسولی است!

این درخت ویژگی‌های جالبی دارد :

- راس \cdot ریشه درخت است
- برای هر راس v ($v \neq 0$)، پدر این راس برابر است با $v - \text{leftbit}(v)$
- $\text{leftbit}(x)$ برابر است با بزرگترین توان دو کوچکتر مساوی x

از آن‌جا که فرزان خیلی درخت گوگولی را دوست دارد و از آن خوشش آمده می‌خواهد بعد رفتن از موسولستان این درخت را با خودش داشته باشد، برای همین می‌خواهد درخت رو قطعه قطعه کرده و سپس درون کوله قرار دهد! عمل قطعه قطعه کردن درخت را به این صورت تعریف میکنیم که هر بار یک مسیر انتخاب می‌کنیم و تمام یال‌هایش رو حذف می‌کنیم. این روند تا وقتی ادامه پیدا می‌کند که یالی از درخت باقی نماند.

به دلیل این که کوله‌ی فرزان خیلی کوچک است می‌خواهد از بین تمام راه‌های قطعه قطعه کردن راهی رو انتخاب کند که تعداد قطعه‌ها (تعداد مراحل) کمینه باشد، برای همین از شما خواسته‌است که کمکش کنید و تعداد قطعه‌ها را برایش بدست‌آورید!

برای مسئله‌ای که راس‌ها از 0 تا $2^n - 1$ شماره‌گذاری شده‌اند $f(n)$ را حداقل تعداد قطعه برای درخت توصیف شده تعریف میکنیم.

زیر مسئله‌ها :

- الف) باقیمانده تقسیم $f(4) + f(3)$ بر Δ را بدست آورید. (۳ نمره)
- ب) باقیمانده تقسیم $f(10) + f(7)$ بر Δ را بدست آورید. (۴ نمره)
- ج) باقیمانده تقسیم $f(19) + f(20)$ بر Δ را بدست آورید. (۷ نمره)
- د) باقیمانده تقسیم $f(59) + f(56)$ بر Δ را بدست آورید. (۴ نمره)
- ه) باقیمانده تقسیم $f(10^6) + f(10^6 - 9)$ بر Δ را بدست آورید. (۱۰ نمره)
- و) باقیمانده تقسیم $f(10^{18} - 2) + f(10^{18} - 9)$ بر Δ را بدست آورید. (۵ نمره)

به راه بادیه رفتن به از نشستن باطل

وگر مراد نیابم به قدر وسع بکوشم