

## پرسش یکم. زیرتوانی ..... ۳۳نمره

به عدد  $x$ ، توانی گویند هرگاه بتوان دو عدد طبیعی مانند  $m$  و  $k$  پیدا کرد که  $k > 1$  و  $m^k = x$ .  
به ازای  $n$  مطرح شده در هر زیرمسئله، تعداد اعداد توانی کوچک‌تر یا مساوی  $n$  را شمرده و آن را  $M$  بنامید.

- زیرمسئله‌ی ۱.  $n = 10^6$ . باقی‌مانده‌ی  $M^2$  بر دلتای خود را پاسخ دهید. (۱۱نمره)  
زیرمسئله‌ی ۲.  $n = 10^{12}$ . باقی‌مانده‌ی  $M$  بر دلتای خود را پاسخ دهید. (۱۱نمره)  
زیرمسئله‌ی ۳.  $n = 2 \times 10^{18}$ . باقی‌مانده‌ی  $M$  بر دلتای شما چند است؟ (۱۱نمره)

## پرسش دوم. # حامدبهداد ..... ۳۵نمره

می‌خواهیم یک جدول  $n \times m$  را با کاشی‌های  $1 \times 1$  و  $1 \times 2$  و  $2 \times 1$  پر کنیم.  
به ازای  $n$  و  $m$  داده شده در هر زیرمسئله، تعداد روش‌های پر کردن جدول مذکور با این سه کاشی را  $M$  نامیده و باقی‌مانده‌ی  $M$  بر  $\Delta$  خود را اعلام کنید.

- زیرمسئله‌ی ۱.  $n = 2$  و  $m = 10^6$  (۷نمره)  
زیرمسئله‌ی ۲.  $n = 3$  و  $m = 10^6$  (۷نمره)  
زیرمسئله‌ی ۳.  $n = 2$  و  $m = 10^{18}$  (۷نمره)  
زیرمسئله‌ی ۴.  $n = 3$  و  $m = 10^{18}$  (۷نمره)  
زیرمسئله‌ی ۵.  $n = 7$  و  $m = 10^{18}$  (۷نمره)

## پرسش سوم. ضرب مجموع، مجموع ضرب ..... ۳۲نمره

یک دنباله‌ی حسابی مانند  $D$  و یک دنباله‌ی هندسی مانند  $Q$  را به قرار زیر مفروض بدارید:

$$D = 0, d, 2d, 3d, \dots, nd$$

$$Q = 1, q, q^2, q^3, \dots, q^n$$

حاصل ضرب نظریه‌نظیر جمله‌های این دو دنباله، دنباله‌ی  $A = 0, dq, 2dq^2, \dots, ndq^n$  را نتیجه می‌دهد.

به ازای  $n$  و  $d$  و  $q$  گفته شده در هر زیرمسئله، جمع اعداد دنباله‌ی  $A$  از جمله‌ی اول تا جمله‌ی  $n$ -ام، یعنی  $(n-1)dq^{n-1}$ ، را  $M$  در نظر بگیرید.

- زیرمسئله‌ی ۱.  $n = 10^8$  و  $d = 123$  و  $q = 456$ . باقی‌مانده‌ی  $M$  بر دلتای خود را بیابید. (۱۱نمره)  
زیرمسئله‌ی ۲.  $n = 10^{12}$  و  $d = 321$  و  $q = 654$ . باقی‌مانده‌ی  $M$  بر دلتای خود را بیابید. (۱۱نمره)  
زیرمسئله‌ی ۳.  $n = 10^{18}$  و  $d = 123456$  و  $q = 654321$ . ابتدا باقی‌مانده‌ی  $M$  بر  $10^9 + 7$  و سپس باقی‌مانده‌ی عدد به‌دست‌آمده بر دلتای خود را محاسبه کنید. (۱۰نمره)