

به نام خدا

- ۱- زمان آزمون ۳ ساعت می‌باشد.
- ۲- شما تنها مجاز به استفاده از زبان C++ هستید.
- ۳- در طی آزمون، از اینترنت فقط برای اتصال به وبگاه آزمون (<http://marhale3.inoi.ir>) استفاده کنید.
- ۴- عددی به نام Δ (دلتا) در اختیار شما قرار گرفته است که در بخش اطلاعات صفحه‌ی آزمون نوشته شده است.
- ۵- اطلاعیه‌های آزمون در بخش اطلاعیه‌ها قرار می‌گیرند. حتما در طی آزمون این بخش را برای اطلاعیه‌های جدید چک کنید.
- ۶- برای پرسش از داوران، از بخش «پرسش‌ها» استفاده نمایید.
- ۷- برای هر زیرمسئله حداکثر می‌توانید ۲۵ بار پاسخ ارسال کنید. درستی جواب شما پس از ارسال بررسی خواهد شد و به شما اعلام می‌گردد.

کم‌م‌نه، اون یکی! ۲۶ امتیاز

فرض کنید بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد طبیعی دلخواه مانند a و b را با (a, b) نشان می‌دهیم. $f(n)$ را برابر تعداد جفت عددهایی طبیعی مانند a و b ($1 \leq a < b \leq n$) تعریف می‌کنیم که $a + b$ زوج باشد و $(a, b) = (\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$

(الف) باقیمانده $f(10^3)$ را بر Δ بدست آورید. (۸ امتیاز)

(ب) باقیمانده $f(10^6)$ را بر Δ بدست آورید. (۱۰ امتیاز)

(ج) باقیمانده $f(10^8)$ را بر Δ بدست آورید. (۸ امتیاز)

مبنای آینده! ۳۵ امتیاز

نمایش عدد طبیعی x در مبنای سه را در نظر بگیرید و فرض کنید $x = (b_1 b_2 \dots b_p)_3$. به دنباله‌ای ناتهی از اعداد مانند i_1, i_2, \dots, i_k x - قدرت مند می‌گوییم اگر:

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq p \quad 1.$$

$$b_{i_1} \leq b_{i_2} \leq \dots \leq b_{i_k} \quad 2.$$

قدرت عدد x را برابر تعداد دنباله‌های x - قدرت مند تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال قدرت عدد ۱۰، ۵ است؛ زیرا نمایش عدد ۱۰ در مبنای ۳ برابر است با $(101)_3$ و مجموعه‌های $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ قدرت مند هستند. حال $f(n)$ را برابر مجموع قدرت همه‌ی اعداد ۱ تا n قرار می‌دهیم.

(الف) باقیمانده $f(10^4)$ را بر Δ بدست آورید. (۱۱ امتیاز)

(ب) باقیمانده $f(5 \times 10^7)$ را بر Δ بدست آورید. (۱۰ امتیاز)

(ج) باقیمانده $f(3^{10000} - 1)$ را بر Δ بدست آورید. (۱۴ امتیاز)

مزرعه‌ی نورگیر! امتیاز ۳۹

مزرعه‌ای به شکل جدولی $n \times n$ داریم که سطرهایش از بالا به پایین از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند و ستون‌هایش از چپ به راست از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. خانه‌ی واقع در محل تلاقی سطر i و ستون j را با (i, j) نمایش می‌دهیم.

در تمام خانه‌هایی مانند (i, j) که i و j نسبت به هم اولند درخت کاشته‌ایم و سایر خانه‌ها خالی‌اند. مثلاً در خانه‌های $(1, 1)$ و $(2, 3)$ درخت کاشته شده است اما در خانه‌ی $(2, 2)$ درخت کاشته نشده است. فاصله‌ی دو خانه‌ی (r_1, c_1) و (r_2, c_2) برابر است با $|r_1 - r_2| + |c_1 - c_2|$. همچنین فاصله‌ی دو درخت برابر است با فاصله‌ی خانه‌هایی که آن دو درخت در آن‌ها قرار دارند. مجموع فاصله‌ی دوبه‌دوی درختان را در یک مزرعه $n \times n$ را $f(n)$ می‌نامیم.

الف) باقی‌مانده $f(10^2)$ را بر Δ به‌دست آورید. (۸ امتیاز)

ب) باقی‌مانده $f(10^4)$ را بر Δ به‌دست آورید. (۱۴ امتیاز)

ج) باقی‌مانده $f(10^6)$ را بر Δ بدست آورید. (۱۷ امتیاز)