آنالیز الگوریتم‌ها (۲۲۸۹۱)

[بهار ۹۹]

تمرین سری ۴ | موعد: سه‌شنبه ۲۰ اسفند ساعت ۱۲

– سؤالات خود پیرامون تمرین را با andishe.ghasemi.9@gmail.com , javadakbari1379@gmail.com مطرح کنید.

تمرین‌های پیشنهادی

حالت وزن‌دار مسئله زمان‌بندی بازه‌ها را با برنامه‌ریزی پویا حل کنید.

CLRS Exercises 16.4.1, 23.1.1, 23.1.2, 23.1.3, 23.1.8.

CLRS Problems 15.1, 16.1.

تمرین‌های تحویلی

۱. قصد داریم که در یک مسیر بی انتها(!) تا جای ممکن پیش برویم. در ابتدای مسیر n کامیون داریم که ظرفیت بنزین آن‌ها تکمیل است. حداکثر ظرفیت بنزین هر کامیون یک لیتر است و مصرف سوخت هر کامیون برای طی‌کردن یک کیلومتر از مسیر برابر یک لیتر است. همچنین می‌توانیم در هر جای مسیر هر کامیونی را به دلخواه نگه‌داشته و مقداری از بنزین آن را به کامیونی دیگر منتقل‌کنیم. حداکثر مسیری که می‌توانیم پیش برویم چقدر است؟(با ذکر دلیل و اثبات درستی)

راهنمایی برای پاسخ: ابتدا همه‌ی n کامیون حرکت می‌کنند و بعد از طی کردن $\frac{1}{n}$ کیلومتر متوقف می‌شوند. کامیون n ام در باک بنزین خود $\frac{n-1}{n}$ بنزین دارد و به هر کدام از $n-1$ کامیون دیگر $\frac{1}{n}$ لیتر بنزین منتقل می‌کند تا بنزینش تمام شود و حذف می‌شود. حال الگوریتم را روی $n-1$ کامیون باقی‌مانده با باک بنزین پر تکرار می‌کنیم. اگر $n=1$ باشد یک کیلومتر را طی می‌کند. پس جواب به صورت $\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{2}+1$ است. فرض کنید الگوریتم بهینه‌ای وجود داشته باشد که در آن اولین کامیونی که حذف می‌شود k کیلومتر طی کرده باشد. اگر $k<\frac{1}{n}$ باشد، هنگام حذف شدن این کامیون ظرفیت خالی باک بنزین کامیون‌های دیگر $(n-1)k$ لیتر است و بنزین باقی مانده برای این کامیون $(1-k)$ لیتر است.

$$k<\frac{1}{n}\Rightarrow nk<1\Rightarrow nk-k<1-k\Rightarrow (n-1)k<1-k$$

مقداری از بنزین این کامیون استفاده نمی‌شود و بدون کم کردن از جواب بهینه می‌توانیم این کامیون را تا $\frac{1}{n}$ متوقف نکنیم. اگر $k>\frac{1}{n}$ باشد، در لحظه‌ای که در کیلومتر k ام هستیم، هر کامیون $1-k$ لیتر بنزین دارد و در مجموع $n(1-k)$ لیتر بنزین داریم. حال اگر در کیلومتر $\frac{1}{n}$ متوقف شویم و بنزین‌ها را منتقل کنیم، در کیلومتر k ام مسیر مقدار $(n-1)-(n-1)(k-\frac{1}{n})=(n-1)(1-k+\frac{1}{n})$ بنزین خواهیم داشت.

$$k\leq 1\Rightarrow 1-k\geq 0\Rightarrow 1-k+\frac{1}{n}>0$$

$$k>\frac{1}{n}\Rightarrow nk>1\Rightarrow n-1>n-nk\Rightarrow (n-1)(1-k+\frac{1}{n})>n(1-k)$$

پس با اعمال الگوریتم ما، $n-1$ کامیون با بنزین بیشتری در کیلومتر k ام مسیر خواهیم داشت و بدون کم شدن از الگوریتم بهینه می‌توانیم اولین کامیون را در $k=\frac{1}{n}$ متوقف کنیم. به صورت استقرایی اثبات می‌شود که بیشینه مسیر قابل پیمایش برای $n-1$ کامیون دیگر نیز $\frac{1}{n-1}+\ldots+\frac{1}{2}+1$ است.

۲. قصد داریم با یک ماشین که با حداکثر ظرفیت بنزینش d کیلومتر حرکت می‌کند به یک سفر دور کشور برویم. از قبل همه‌ی n پمپ‌بنزین موجود در طول مسیرمان را روی نقشه پیدا کرده‌ایم.فاصله‌ی بین پمپ بنزین‌های متوالی بیشتر از d کیلومتر نیست.می‌خواهیم برنامه سفر را طوری بچینیم که کمترین توقف‌های ممکن را برای سوخت‌گیری داشته‌باشیم. الگوریتمی طراحی کنید که با گرفتن d و فاصله‌ی پمپ‌بنزین‌ها از نقطه شروع، لیست پمپ‌بنزین‌هایی که باید در آن ها توقف کنیم را در زمان $O(n)$ خروجی دهد.

راهنمایی برای پاسخ:

از شهر اول شروع به حرکت می‌کنیم و در هر شهر به پمپ بنزین می‌رویم اگر بنزین کافی برای رسیدن به شهر بعد را نداشته باشیم. فرض کنید در شهرهای $c_۱, c_۲, ..., c_n$ بنزین زده‌باشیم. و الگوریتم بهینه‌ای وجود داشته باشد که در شهرهای کمتری بنزین زده باشد مثل $c'_۱, c'_۲, ..., c'_m$. کوچکترین اندیسی را در نظر بگیرید که داشته باشیم $c_i \neq c'_i$. می‌دانیم که شهر c'_i نمی‌تواند بعد از شهر c_i باشد، چون اگر در شهر c_i بنزین نزده‌باشیم بنزین کافی برای رسیدن به شهر بعدی را نخواهیم داشت. اگر c'_i شهری قبل از شهر c_i باشد، الگوریتم بهینه موقع رسیدن به شهر c_i مجموعا i بار توقف داشته است و در این شهر باک بنزینش کامل پر نیست. ولی در الگوریتم حریصانه‌ی ما در شهر c_i باک بنزین پر بوده و مجموعا i بار بنزین زده ایم. پس با تغییر c'_i به c_i همچنان الگوریتم بهینه می‌ماند.

۳. در یک تیم والیبال n والیبالیست داریم. قد همه‌ی آن‌ها بین ۱۹۵ سانتی‌متر و ۲۰۵ سانتی‌متر بوده و میانگین قد آن‌ها ۲۰۰ سانتی‌متر است. می‌خواهیم همه بازیکنان به ترتیبی در یک ردیف بایستند. اگر مربی تیم دو بازیکن را به دلخواه انتخاب کند که k بازیکن دیگر بین آن‌ها باشند ، اختلاف مجموع قد این $k+۲$ بازیکن از مقدار $(k+۲)\times ۲۰۰$ را حساب کرده و اگر این مقدار بیشتر از ۱۰ سانتی‌متر باشد از تیم خود ناامید می‌شود.الگوریتمی حریصانه برای پیدا کردن ترتیبی از بازیکنان ارائه دهید که مربی را ناامید نکند.

راهنمایی برای پاسخ: ابتدا از قد هر نفر مقدار ۲۰۰ را کم می‌کنیم که با فاصله‌ی آن‌ها از میانگین که در بازه‌ی $[-۵, ۵]$ کار کنیم. سپس اعداد را به دو گروه منفی و نامنفی تقسیم می‌کنیم. یک عدد دلخواه را قرار می‌دهیم و هربار در مرحله i ام اگر جمع اعداد از اول تا i کمتر از صفر بود، عددی نامنفی و اگر این مجموع بیشتر مساوی صفر بود عددی منفی قرار می‌دهیم. ادعا می‌کنیم همواره چنین عددی وجود دارد زیرا میانگین قد ها ۲۰۰ است و مجموع تفاضل قدها از میانگین برابر با صفر است. پس اگر مجموع منفی است عددی نامنفی و اگر مجموع مثبت است عددی منفی هنوز وجود دارد. پس به صورت استقرایی ثابت می‌شود که برای هر بازه از ابتدا تا نفر i ام مجموع عددی در بازه‌ی $[-۵, ۵]$ است.

$$-۵ \leq a_۱ + a_۲ + ... + a_i \leq ۰, ۰ \leq a_{i+۱} \leq ۵ \Rightarrow -۵ \leq a_۱ + a_۲ + ... + a_{i+۱} \leq ۵$$

$$۰ \leq a_۱ + a_۲ + ... + a_i \leq ۵, -۵ \leq a_{i+۱} \leq ۰ \Rightarrow -۵ \leq a_۱ + a_۲ + ... + a_{i+۱} \leq ۵$$

حال به ازای هر بازه‌ی دلخواه از نفر i ام تا نفر j ام، این مجموع برابر تفاضل مجموع بازه‌ی ابتدا تا نفر i ام و مجموع بازه‌ی ابتدا تا نفر j ام خواهد بود.

$$-۵ \leq a_۱ + a_۲ + ... + a_i \leq ۵$$

$$۵ \leq a_۱ + a_۲ + ... + a_{i-۱} + a_i + a_{i+۱} + ... + a_j \leq ۵$$

$$\Rightarrow -۱۰ \leq a_{i+۱} + a_{i+۲} + ... + a_j \leq ۱۰$$

تمرین امتیازی

فرض کنید گراف $G = (V, E)$ با دو تابع وزن $c_۱ : E \to Q_+$ و $c_۲ : E \to Q_+$ داده شده باشد. الگوریتمی چندجمله‌ای ارائه دهید که تشخیص دهد آیا G زیردرخت فراگیری دارد که هم‌زمان برای $c_۱$ و $c_۲$ کمینه باشد.

راهنمایی: تعمیم مسئله برای ماترویدها را حل کنید.

موفّق باشید.