



## آنالیز الگوریتم‌ها (۲۲۸۹۱) [بهار ۹۹]

تمرین سری ۲

موعده: سه‌شنبه ۶ اسفند ساعت ۱۲

– سؤالات خود پیرامون تمرین را با [andishe.ghasemi.9@gmail.com](mailto:andishe.ghasemi.9@gmail.com) مطرح کنید.

تمرین‌های پیشنهادی (غیرتحویلی)

CLRS 22.1.5, 22.1.6, 22.1.8, 22.2.1, 22.2.7, 33.4.3.

تمرین‌های تحویلی

۱. روی یک صفحه مختصات  $n$  نقطه مشخص شده‌است. به یک وضعیت از  $n$  نقطه خوب گوییم اگر به ازای هر جفت نقطه مثل  $(x, y)$  و  $(x', y')$  یکی از سه شرط زیر برقرار باشد:

$$x = x' \quad (۱)$$

$$y = y' \quad (۲)$$

(۳) نقطه‌ی دیگری چون  $(x'', y'')$  موجود باشد به طوری که  $\min(x, x') \leq x'' \leq \max(x, x')$  و  $\min(y, y') \leq y'' \leq \max(y, y')$

می‌خواهیم تعدادی نقطه به مجموعه نقاط اضافه کنیم تا در انتها به یک وضعیت خوب برسیم؛ الگوریتمی طراحی کنید که در زمان  $O(n \lg n)$  به مقدار  $O(n \lg n)$  نقطه به این نقاط اضافه کند طوری که در انتها یک وضعیت خوب از نقاط داشته باشیم.

۲. برای یک عدد  $b$  که  $10 \leq b \leq 2$  است، عدد خوب را عددی طبیعی تعریف می‌کنیم که تمام ارقام آن کمتر از  $b$  باشد، مثلاً برای  $b = 2$ ، تمام اعداد با ارقام ۰ و ۱ خوب هستند.

برای  $n$  و  $b$  داده‌شده، می‌خواهیم با کمک مدل‌سازی اعداد در گراف و استفاده از نسخه‌ای تغییر یافته از «الگوریتم جستجوی اول سطح» کوچکترین عدد خوب مضرب  $n$  را پیدا کنیم؛ مثلاً برای  $b = 2, n = 3$  کوچکترین عدد خوب مضرب ۳ برابر با ۱۱۱ است.

(آ) سعی کنید با طراحی یک گراف مناسب، الگوریتمی از  $O(n)$  ارائه دهید تا با گرفتن  $n, b$  کوچکترین عدد خوب مضرب  $n$  را بیابد.

(ب) فرض کنید  $x$  یک عدد خوب است، همزاد این عدد را عددی مثل  $y$  تعریف می‌کنیم که  $(x)_b = (y)_{10}$  (منظور از اندیس مبنا است). مثلاً برای  $b = 2$  همزاد عدد خوب ۱۱۱ عدد ۷ است.

الگوریتمی از زمان  $O(n^2)$  ارائه دهید که با ورودی گرفتن  $n, b$  کوچکترین عدد خوب که هم خودش و هم همزادش مضرب  $n$  باشد بیابد.

موفق باشید.