



آنالیز الگوریتم‌ها (۲۲۸۹۱) [بهار ۹۹]

زمان: ۴ ساعت

آزمون پایان‌ترم (نسخه ۳)

سؤال ۴ آپدیت شده است.

نمره سؤال ۷ مقداری بیشتر از بقیه سؤال‌هاست.

۱. در مسئله جریان چندتایی ورودی یک شبکه $G = (V, E)$ و تابع ظرفیت مثبت c روی E به همراه k رأس مبدأ s_1, \dots, s_k و k رأس مقصد t_1, \dots, t_k است. هدف این است که k جریان f_1, \dots, f_k بیابیم به طوری که f_i یک جریان معتبر از s_i به t_i باشد، برای هر i ال یال از گراف جمع کل k جریان عبوری از آن یال بیشتر از ظرفیتش نشود، و جمع کل k جریان بیشینه شود. نشان دهید مسئله جریان چندتایی در زمان چندجمله‌ای قابل حل است.

۲. فرض کنید یک پارچه مستطیلی به ابعاد $X \times Y$ دارید که X و Y اعداد صحیح هستند. همچنین لیستی از n محصول که می‌توانند از پارچه درست شوند در اختیار دارید. محصول i ام پارچه‌ای به ابعاد $a_i \times b_i$ مصرف می‌کند و قیمت فروش آن c_i است. ماشینی در اختیار داریم که هر پارچه مستطیلی را می‌تواند افقی یا عمودی ببرد تا دو تکه مستطیل کوچکتر درست شود. می‌خواهیم پارچه‌ای که در اختیار داریم را به گونه‌ای ببریم که با تبدیل تکه‌های ایجاد شده به محصولاتهای مختلف، بیشترین سود را ببریم. توجه کنید که می‌توانیم از یک محصول به هر تعداد که دوست داریم تولید کنیم.

(آ) ثابت کنید این مسئله ان‌پی-تمام است.

(ب) یک الگوریتم شبه‌چندجمله‌ای برای این مسئله ارائه دهید.

۳. فرض کنید گراف جهت‌دار بدون وزن $G = (V, E)$ داده شده باشد. هر یال G ممکن است یکی از چهار رنگ آبی، قرمز، سبز و زرد را داشته باشد یا بی‌رنگ باشد. همچنین دقیقاً یک رأس از G با هر کدام از این چهار رنگ وجود دارد (بقیه $4 - |V|$ رأس گراف بی‌رنگ هستند). یک زیرمجموعه $U \subseteq V$ از رأس‌ها داده شده است که روی هر کدام یک بستنی قرار دارد. یک رأس شروع r هم داده شده است. هدف این است که از r شروع کنیم، حداقل یک بستنی برداریم و نهایتاً به r برگردیم و تعداد یال‌هایی که طی می‌کنیم کمینه باشد. این قانون وجود دارد که اگر بخواهیم از یک یال رنگی عبور کنیم، پیش از آن حتماً باید از رأسی که رنگش مانند آن یال است عبور کرده باشیم. الگوریتمی خطی برای حل این مسئله ارائه دهید.

راهنمایی: ابتدا مسئله را برای حالت ساده‌تری که یال‌ها رنگ ندارند حل کنید. همچنین در صورت نوشتن راه‌حل این حالت خاص بخشی از نمره را می‌گیرید.

۴. برنامه صحیح زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \sum_{e \in E} c_e x_e + \sum_{v \in V} p_v y_v \\ \text{s.t} & \sum_{e \in \delta(S)} x_e \geq y_v \quad \forall S \subseteq V - r, S \neq \emptyset, \forall v \in S \\ & y_r = 1 \\ & y_v \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V \\ & x_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E \end{array}$$

منظور از $\delta(S)$ یال‌هایی است که دقیقاً یک سرشان در S است.

(آ) یک مسئله الگوریتمی روی گراف‌ها تعریف کنید که توسط این برنامه مدل شود.

(ب) این برنامه صحیح را به یک برنامه خطی ریلکس کنید و دوگان آن را بنویسید.

۵. در مسئله رنگ‌آمیزی نزدیک ورودی یک گراف $G = (V, E)$ است و سؤال این است که آیا می‌توان رأس‌های G را با رنگ‌های $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ به گونه‌ای رنگ‌آمیزی کرد که اگر $uv \in E$ آنگاه $c(v) = c(u) + 1 \pmod{5}$ یا $c(v) = c(u) - 1 \pmod{5}$ ، که $c(v)$ رنگ رأس v است.

نشان دهید مسئله رنگ‌آمیزی نزدیک ان‌پی-تمام است.

۶. در مسئله چهارتکه کردن گراف، یک گراف $G = (V, E)$ با تابع وزن $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ به عنوان ورودی داده می‌شود. هدف این است که V را به چهار مجموعه افراز کنیم به طوری که جمع وزن یال‌هایی که بین این چهار بخش هستند بیشینه باشد.

الگوریتمی چندجمله‌ای ارائه دهید که برای هر ورودی این مسئله جوابی پیدا کند که جمع وزن یال‌هایش حداقل 0.74 جواب بهینه باشد.

۷. شبکه $G = (V, E)$ با تابع ظرفیت مثبت c روی یال‌های آن را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید $s, t \in V$. در این سؤال منظور از یک جریان، یک st -جریان معتبر است.

(آ) نشان دهید هر جریان $f \in \mathbb{R}^E$ در G را می‌توان به صورت

$$f = \sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p \chi_p + \sum_{c \in \mathcal{C}} \lambda_c \chi_c \quad (1)$$

نوشت که همه λ_i ها نامنفی هستند. در این جا \mathcal{P} مجموعه همه مسیرهای s به t در G ، و \mathcal{C} مجموعه همه دورهای G است. همچنین

$\chi_p \in \mathbb{R}^E$ بردار مشخصه p است؛ یعنی $\chi_p(e) = 1$ اگر و فقط اگر $e \in p$ و در غیر این صورت $\chi_p(e) = 0$.

(ب) با استفاده از بخش قبل، مسئله جریان بیشینه را به صورت یک برنامه خطی مدل کنید.

(ج) نشان دهید جریان بیشینه‌ای مانند f وجود دارد که در فرمول‌بندی آن به صورت بخش الف، فقط تعداد چندجمله‌ای تا از λ_i ها غیرصفر هستند.

(د) نشان دهید می‌توان به گونه‌ای به هر یال $e \in E$ وزن w_e را نسبت داد که طول (وزن) هر مسیر از s به t حداقل یک باشد، و به ازای هر

جریان بیشینه f ، اگر f را به صورت ۱ بنویسیم، اگر p مسیری از s به t باشد که کوتاهترین مسیر نیست، آنگاه $\lambda_p = 0$.

(ه) چگونه می‌توان با استفاده از فرمول‌بندی ارائه شده در این سؤال، مقدار جریان بیشینه را در زمان چندجمله‌ای حساب کرد؟