



آنالیز الگوریتم‌ها (۲۲۸۹۱) [بهار ۹۹]

تمرین سری ۲

موعده: سه‌شنبه ۶ اسفند ساعت ۱۲

– سوالات خود پیرامون تمرین را با andishe.ghasemi.9@gmail.com مطرح کنید.

تمرین‌های پیشنهادی (غیرتحویلی)

CLRS 22.1.5, 22.1.6, 22.1.8, 22.2.1, 22.2.7, 33.4.3.

تمرین‌های تحویلی

۱. روی یک صفحه مختصات n نقطه مشخص شده‌است. به یک وضعیت از n نقطه خوب گوئیم اگر به ازای هر جفت نقطه مثل (x, y) و (x', y') یکی از سه شرط زیر برقرار باشد:

$$x = x' \quad (۱)$$

$$y = y' \quad (۲)$$

$$(۳) \text{ نقطه‌ی دیگری چون } (x'', y'') \text{ موجود باشد به طوری که } \min(x, x') \leq x'' \leq \max(x, x') \text{ و } \min(y, y') \leq y'' \leq \max(y, y')$$

می‌خواهیم تعدادی نقطه به مجموعه نقاط اضافه کنیم تا در انتها به یک وضعیت خوب برسیم؛ الگوریتمی طراحی کنید که در زمان $O(n \lg n)$ به مقدار $O(n \lg n)$ نقطه به این نقاط اضافه کند طوری که در انتها یک وضعیت خوب از نقاط داشته باشیم.

۲. برای یک عدد b که $۱۰ \leq b \leq ۲$ است، عدد خوب را عددی طبیعی تعریف می‌کنیم که تمام ارقام آن کمتر از b باشد، مثلاً برای $b = ۲$ ، تمام اعداد با ارقام ۰ و ۱ خوب هستند.

برای n و b داده‌شده، می‌خواهیم با کمک مدل‌سازی اعداد در گراف و استفاده از نسخه‌ای تغییر یافته از «الگوریتم جستجوی اول سطح» کوچکترین عدد خوب مضرب n را پیدا کنیم؛ مثلاً برای $b = ۲$ ، $n = ۳$ ، کوچکترین عدد خوب مضرب ۳ برابر با ۱۱۱ است.

(آ) سعی کنید با طراحی یک گراف مناسب، الگوریتمی از $O(n)$ ارائه دهید تا با گرفتن n, b ، کوچکترین عدد خوب مضرب n را بیابید.

راهنمایی: به ازای باقی‌مانده‌ی هر عدد خوب بر n ، یک راس در نظر بگیرید.

(ب) فرض کنید x یک عدد خوب است، همزاد این عدد را عددی مثل y تعریف می‌کنیم که $(x)_b = (y)_{۱۰}$ (منظور از اندیس مبنا است). مثلاً برای $b = ۲$ همزاد عدد خوب ۱۱۱ عدد ۷ است.

الگوریتمی از زمان $O(n^۲)$ ارائه دهید که با ورودی گرفتن n, b ، کوچکترین عدد خوب که هم خودش و هم همزادش مضرب n باشد بیابید.

راهنمایی: به ازای هر زوج مرتب باقی‌مانده‌ی عدد خوب بر n و همزادش بر n ، یک راس در نظر بگیرید.

موفق باشید.