



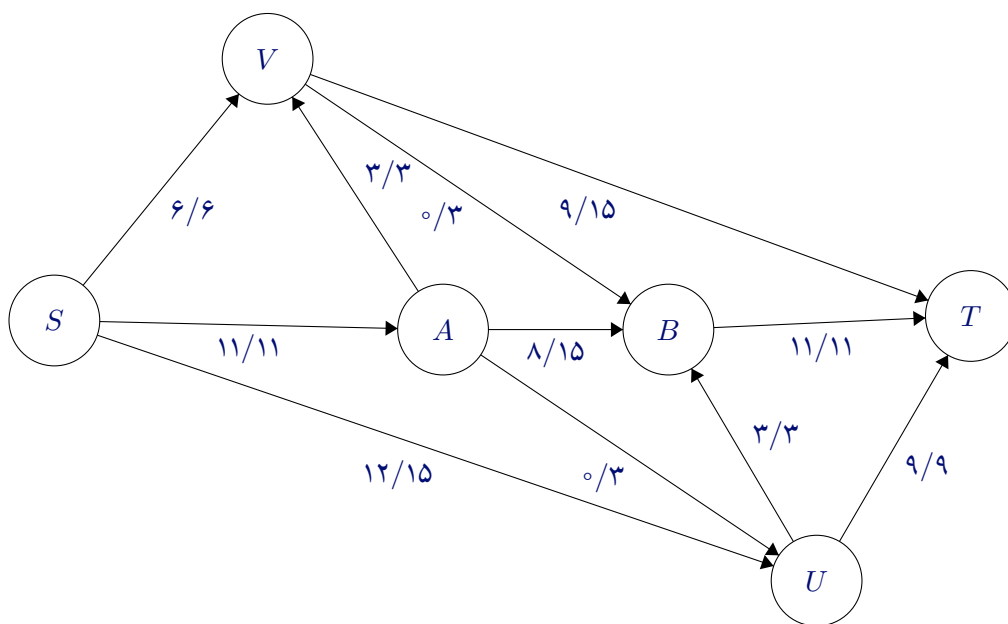
آنالیز الگوریتم‌ها (۲۲۸۹۱) [بهار ۹۹]

تمرین سری ۷

موعده: سه‌شنبه ۲۶ فروردین ساعت ۱۲

– سؤالات خود پیرامون تمرین را با andishe.ghasemi.9@gmail.com مطرح کنید.

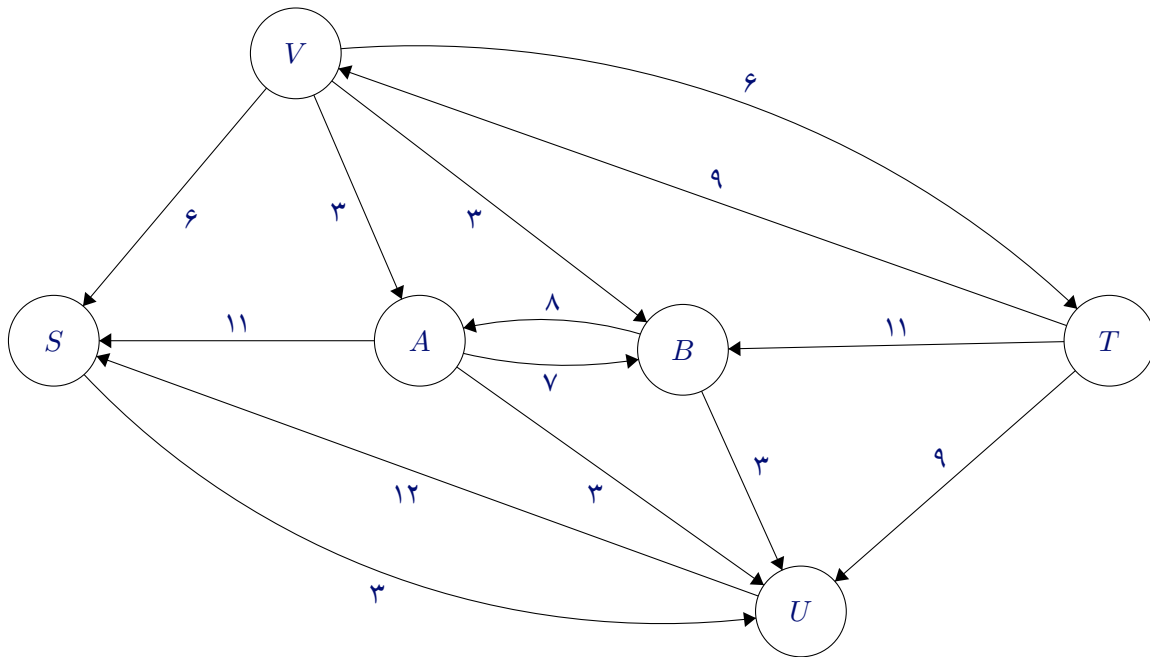
۱. در گراف زیر ظرفیت هر یال مشخص شده‌است. و S رأس منبع^۱ و T رأس چاه^۲ در این شبکه است. آ یک شار بیشینه بدست آورید و شکل آن را به همراه مقدار جریان عبوری از هر یال مشخص کنید. راهنمایی برای پاسخ: بیشینه شار عبوری ۲۹ است.



- ب) یک برش کمینه بدست آورید. مقدار ظرفیت خروجی این برش و همچنین رأس‌های آن را مشخص کنید. راهنمایی برای پاسخ: یک برش کمینه به صورت $C_1 = \{S, U\}$ و $C_2 = \{T, V, A, B\}$ است. برش دیگری به صورت $C_1 = \{S, A, B, U\}$ و $C_2 = \{T, V\}$ است.
- پ) گراف باقی‌مانده نهایی را رسم کنید. کدام رأس از S قابل دسترسی است؟ کدام رأس دسترسی به T دارد؟ راهنمایی برای پاسخ: رأس S دسترسی به رأس U دارد و رأس V دسترسی به رأس T دارد.

¹source

²sink



ت) به یک یال بحرانی افزایشی می‌گوییم اگر افزایش ظرفیت آن یال منجر به افزایش شار بیشینه شود. به یک یال بحرانی کاهش می‌گوییم اگر کاهش ظرفیت آن یال منجر به کاهش شار بیشینه شود. یک یال افزایشی بحرانی و یک یال کاهش بحرانی در این گراف پیدا کنید. (اگر وجود دارد).

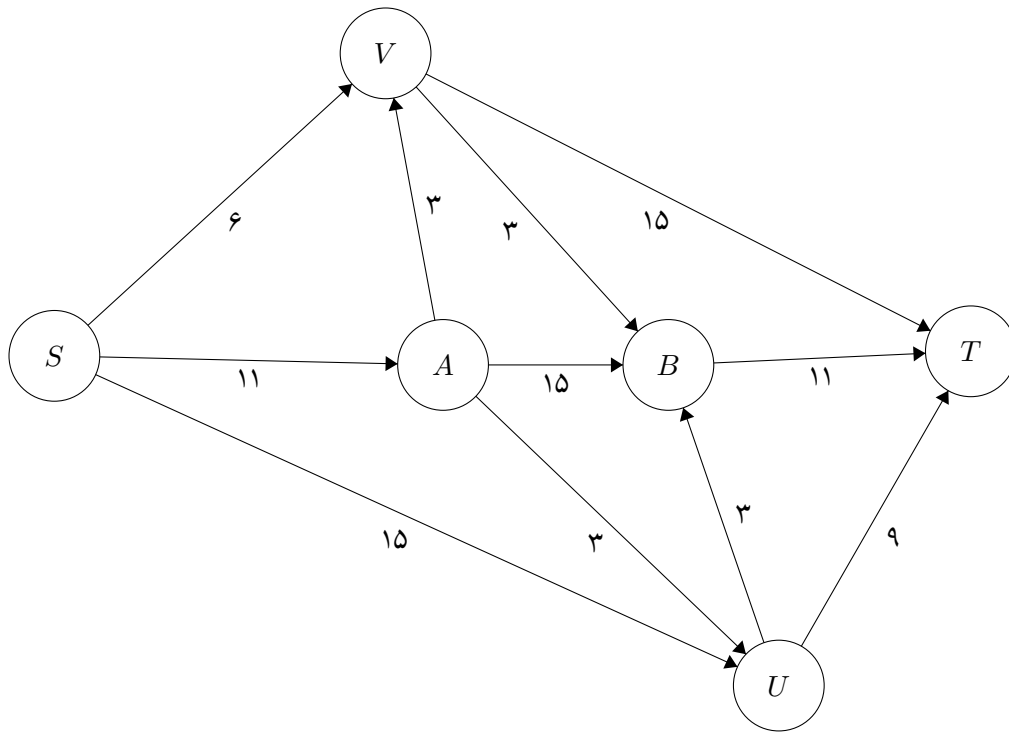
راهنمایی برای پاسخ: دو یال بحرانی افزایشی (U, T) و (S, V) وجود دارد و یال‌های بحرانی کاهش یال‌های (S, A) و (U, B) و (U, T) و (B, T) و (A, V) هستند.

ث) الگوریتمی بهینه برای پیدا کردن یک یال بحرانی کاهش طراحی کنید.

راهنمایی برای پاسخ: اثبات کردیم که شار بیشینه برابر با ظرفیت برش کمینه است. پس اگر کاهش ظرفیت یک یال منجر به کاهش ظرفیت برش کمینه شود، آنگاه کاهش ظرفیت آن یال منجر به کاهش شار بیشینه نیز می‌شود. در یک برش کمینه مثل C_1 و C_2 مجموع ظرفیت یال‌ها از C_1 به C_2 برابر با ظرفیت این برش است. پس با کم کردن ظرفیت این یال‌ها ظرفیت برش کاهش یافته و شار بیشینه کاهش می‌یابد.

ج) الگوریتمی بهینه برای پیدا کردن یک یال بحرانی افزایشی طراحی کنید. (امتیازی)

راهنمایی برای پاسخ: اگر یک یال $e = (u, v)$ بحرانی افزایشی باشد، آنگاه پس از اعمال الگوریتم شار بیشینه، این یال در گراف باقی‌مانده نهایی با حداکثر ظرفیت استفاده شده است، به عبارتی در گراف باقی‌مانده یال از v به u با ظرفیت c_e خواهیم داشت. چون اگر حداکثر ظرفیت این یال استفاده نشده باشد آنگاه در گراف باقی‌مانده نهایی یال $e' = (v, u)$ با ظرفیت $c_{e'} > 0$ خواهیم داشت. و چون طبق تعریف یال بحرانی افزایشی، افزایش ظرفیت این یال به اندازه ϵ منجر به افزایش شار بیشینه می‌شود، با افزایش این ظرفیت مسیری از s به t ایجاد می‌شود. پس در گراف باقی‌مانده، پیش از افزایش ظرفیت این یال، همچنان ظرفیت ناصفر است و مسیری از s به t شامل این یال وجود دارد و این گراف باقی‌مانده نهایی نیست. پس همه یال‌های $e = (u, v)$ که در گراف باقی‌مانده نهایی مسیری از s به u و همچنین مسیری از v به t وجود داشته و یال با ظرفیت c_e از v به u داشته باشیم، یال افزایشی بحرانی هستند. برای پیدا کردن این یال، در گراف باقی‌مانده نهایی از s یک بار BFS را اجرا می‌کنیم و یال‌هایی که از s قابل دسترسی هستند را پیدا می‌کنیم. بار دیگر جهت یال‌ها را برعکس کرده و از t یک بار BFS را اجرا می‌کنیم و یال‌هایی که به t دسترسی دارند را پیدا می‌کنیم. حال ظرفیت یال‌هایی که انتهای آن‌ها در مجموعه اول و ابتدای آن‌ها در مجموعه دوم است را با ظرفیت اولیه آن‌ها مقایسه می‌کنیم.



۲. درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید. در صورت درست بودن اثبات مختصری ارائه کنید و در صورت نادرست بودن مثال نقض بیاورید.

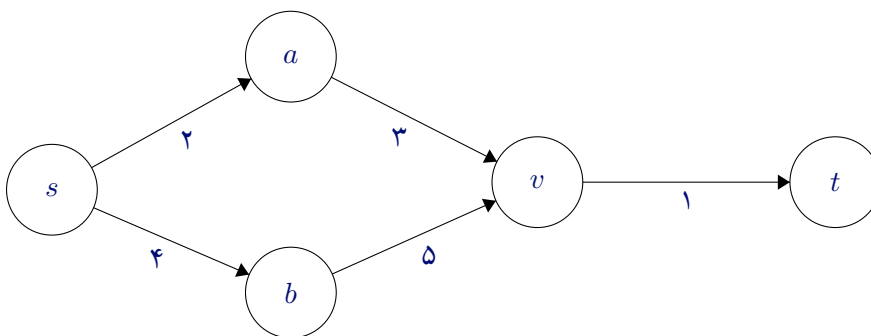
(آ) اگر همه ی یال های جهت دار یک شبکه ظرفیت های متفاوتی داشته باشند ، آنگاه شار بیشینه به طریقی یکتا بدست می آید.

راهنمایی برای پاسخ:

نادرست. در گراف زیر همه ی ظرفیت ها متفاوت هستند، اما حداقل دو شار بیشینه f_1 و f_2 با ظرفیت ۱ وجود دارند.

$$f_1(s, a) = f_1(a, v) = f_1(v, t) = 1, f_1(s, b) = f_1(b, v) = 0$$

$$f_2(s, b) = f_2(b, v) = f_2(v, t) = 1, f_2(a, v) = f_2(s, a) = 0$$



(ب) در مسئله ی شار بیشینه با ظرفیت رأس ها گراف جهت دار $G = (V, E)$ داده شده است که S رأس منبع و T رأس چاه است و ظرفیت هر رأس $v \in V$ برابر با $c_v \geq 0$ است. (ولی ظرفیتی برای یال ها داده نشده است). یک شار f را معتبر برای گراف G می گوییم اگر برای همه ی v ها بجز S و T ، مجموع شار ورودی به رأس v حداکثر c_v باشد. اندازه ی یک شار معتبر f ، مجموع شار خروجی از S است. با داشتن گراف ورودی، مسئله ی شار بیشینه با ظرفیت رأس ها، محاسبه کردن یک شار معتبر با سائز بیشینه است.

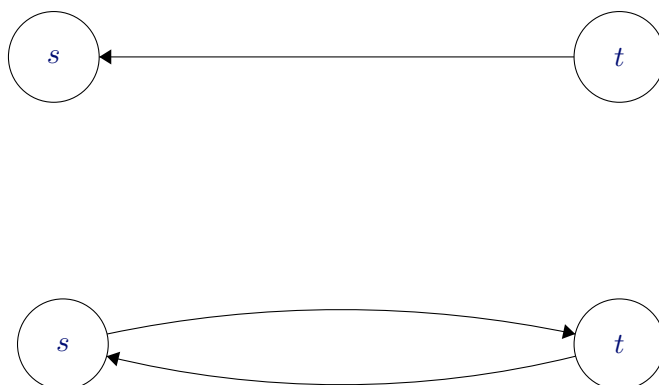
محاسبه ی یک شار بیشینه با ظرفیت رأس ها را می توان به مسئله ی شار بیشینه معمولی (با ظرفیت یال ها) کاهش داد.

راهنمایی برای پاسخ: درست. به این صورت کاهش می‌دهیم که گراف G' را می‌سازیم که در آن به ازای هر رأس v در G با ظرفیت c_v دو رأس v_1 و v_2 را قرار می‌دهیم. همه‌ی یال‌های ورودی به v ، در گراف G' به رأس v_1 وارد می‌شوند. و همه‌ی یال‌های خروجی از v ، از v_2 خارج می‌شوند. و در نهایت یال (v_1, v_2) با ظرفیت c_v قرار داده می‌شود. حالا هر شار f در G که مطابق قوانین ظرفیت رأس‌ها است، می‌تواند تبدیل به یک شار f' در G' شود که آن هم مطابق قوانین ظرفیت رأس‌ها باشد. برای این تبدیل به ازای هر یال $(u, v) \in G$ قرار می‌دهیم $f'(u_2, v_1) = f(u, v)$ و برای $f'(v_1, v_2)$ مقدار آن را برابر با مجموع کل شار ورودی به رأس v قرار می‌دهیم. چون f مطابق قوانین ظرفیت رأس‌ها در G است، داریم $f'(v_1, v_2) \leq c_v$ پس f' نیز مطابق قوانین ظرفیت یال‌ها است.

همچنین هر شار f' در G' می‌تواند به یک شار f در G تبدیل شود که مطابق با قوانین رأس‌ها باشد. برای این تبدیل به ازای هر یال (u, v) در G قرار می‌دهیم $f(u, v) = f'(u_2, v_1)$. پس شار ورودی به هر رأس v حداکثر c_v می‌شود. پس در نهایت شار بیشینه در G' برابر با شاری در G با بیشترین مقدار و مطابق قوانین ظرفیت رأس‌ها است.

ب) اگر هر یال جهت‌دار با ظرفیت c و بین دو رأس u و v در یک شبکه را با دو یال جهت‌دار با جهت‌های مخالف و ظرفیت c بین دو رأس u و v جایگزین کنیم، آنگاه مقدار شار بیشینه ثابت می‌ماند.

راهنمایی برای پاسخ: نادرست. فرض کنید ظرفیت یال‌ها ۱ باشد، در گراف اول اندازه شار بیشینه صفر است ولی در گراف دوم این مقدار برابر با یک است.



۳. در یک ساختمان عمومی مثل یک سینما، داشتن یک نقشه‌ی خروج برای موارد اضطراری نظیر آتش‌سوزی مهم است. در این سوال می‌خواهیم با استفاده از شار بیشینه یک نقشه خروج اضطراری طراحی کنیم. فرض کنید که نقشه سینما یک گراف $G = (V, E)$ است که در آن هر اتاق یا طبقه با یک رأس و هر راهرو یا پله با یک یال مشخص شده‌است. هر راهرو یا پله دارای ظرفیتی c است که نشان می‌دهد حداکثر c نفر همزمان می‌توانند از این راهرو استفاده کنند. پیمایش یک راهرو از یک سر تا سر دیگر یک واحد زمانی طول می‌کشد. (پیمایش یک اتاق صفر واحد زمانی طول می‌کشد). فرض کنید در ابتدا همه مردم در اتاق S هستند و تنها یک خروجی T به خیابان وجود دارد. نشان دهید که چطور با استفاده از مسئله‌ی شار بیشینه، سریع‌ترین راه برای خارج کردن همه افراد از ساختمان را پیدا کنیم. (راهنمایی: گراف G' را طراحی کنید که در آن هر رأس نشان‌دهنده‌ی یک اتاق در هر واحد زمانی باشد).

راهنمایی برای پاسخ: فرض کنید M نفر وجود دارند که باید آن‌ها را خارج کنیم. اول الگوریتمی طراحی می‌کنیم که مشخص کند آیا همه افراد در T واحد زمانی خارج می‌شوند یا خیر. با داشتن این الگوریتم می‌توانیم یک باینری سرچ روی T از ۱ تا $|V|M/c$ انجام می‌دهیم تا کمترین زمان ممکن برای خروج کل افراد را پیدا کنیم. الگوریتمی که استفاده می‌کنیم، با داشتن گراف G ، گراف G' را به صورت زیر می‌سازد:

به ازای هر رأس v در V ، T کپی از v به صورت v_1, v_2, \dots, v_T می‌سازیم به طوری که v_i مربوط به مرحله زمانی i ام است. به ازای هر i یالی از v_i به v_{i+1} با ظرفیت بی‌نهایت می‌کشیم. (افراد تنها می‌توانند یک واحد زمانی در اتاق‌ها بمانند). سپس یالی از v_i به w_{i+1} با ظرفیت c می‌کشیم اگر که یالی از v به w با ظرفیت c در گراف اصلی وجود داشته باشد. فرض کنید همه‌ی افراد در ابتدا در اتاق a هستند و راه خروج اتاق b است. پس قرار می‌دهیم $s = a_1$ و $t = b_T$. برای اینکه بفهمیم همه افراد در T واحد زمانی

از s به t می‌رسند یا خیر، بررسی می‌کنیم که آیا شار بیشینه در G' بزرگتر مساوی تعداد افرادی که در ابتدا در s بودند است یا خیر. اگر برابر بود ما می‌توانیم افراد را در T واحد زمانی خارج کنیم.

موفق باشید.