



آنالیز الگوریتم‌ها (۲۲۸۹۱) [بهار ۹۹]

تمرین سری ۶

موعده: سه‌شنبه ۱۲ فروردین ساعت ۱۲

– سؤالات خود پیرامون تمرین را با javadakbari1379@gmail.com, alirtofighim@gmail.com مطرح کنید.

تمرین‌های پیشنهادی

تمرین سری ۳ (سؤال ۲) و سری ۴ و حل تمرین جلسه ۵ از درس الگوریتم کارنگی ملون.

تمرین‌های مربوط به مباحث تدریس شده از درس الگوریتم برکلی.

تمرین‌های عملی مربوط به مباحث تدریس شده از درس دنی اسلیتور.

تمرین‌های تحویلی

۱. یک گراف وزن‌دار و جهت‌دار V راسه و E یاله داریم که فاقد دور منفی است، روی این گراف Q امر مطرح می‌شود، هر امر یکی از دو نوع زیر است:

• v را ورودی داده و از ما می‌خواهند راس v را از گراف پاک کنیم.

• دو راس u, v را ورودی داده و وزن کوتاه‌ترین مسیر (از نظر مجموع وزن یال‌ها) از v به u را از ما می‌خواهند.

متأسفانه در لحظه‌ی مطرح شدن این امور، ما قادر به پاسخ‌دهی به آن‌ها نبودیم و حال همه‌ی Q امر را یک‌جا داریم، الگوریتمی ارائه دهید که با گرفتن گراف و Q امر در زمان اجرای $O(V^3 + Q)$ به عنوان خروجی پاسخ امرهای نوع دوم را بدهد.

۲. یک گراف وزن‌دار V راسه و E یاله با وزن یال‌های نامنفی داریم. شخصی روی راس s و شخص دیگری روی راس e ایستاده‌است، عبور از هر یال e دقیقاً یک واحد زمان می‌برد و به اندازه‌ی وزن یال e هزینه دارد. دو شخص مسئله‌ی ما از یک دیگر متنفرند، به همین دلیل دلیل نمی‌خواهند لحظه‌ای باشد که هر دو روی یک راس قرار گرفته باشند (ولی می‌توانند در یک لحظه در دو سر یک یال باشند و لحظه‌ی بعد جای خود را عوض کنند و ملاقات در وسط یال اشکالی ندارد)، هر دو انسان‌های عجولی هستند به همین دلیل به محض رسیدن به راسی از آن به راس دیگری حرکت می‌کنند و توقفی روی راس‌ها ندارند.

شخص اول می‌خواهد از راس s به راس e و شخص دوم می‌خواهد از راس e به راس s برسد، الگوریتمی طراحی کنید که با گرفتن گراف و راس‌های s و e ، کمترین هزینه‌ای که این دو شخص در مجموع برای این جابه‌جایی باید بدهند را حساب کند.

(آ) زمان اجرای الگوریتم از $O(V^2 \lg V + E^2)$ باشد.

(ب) زمان اجرای الگوریتم از $O(V^2 \lg V + VE)$ باشد.

راهنمایی. سعی کنید گراف جدیدی با V^2 راس بسازید و پاسخ مسئله‌ی بالا را به یک مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر در گراف جدید تبدیل کنید.

۳. یک روش بهینه‌سازی الگوریتم بلمن‌فورد در عمل، این است که اگر در یکی از مراحل ریلکس‌کردن مشاهده کردیم که هیچ یک از d_i ها کاهش پیدا نکرد، الگوریتم را متوقف کنیم؛ می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا این کار باعث بهبود زمان اجرای الگوریتم در بدترین حالت می‌شود یا خیر. اثبات یا رد کنید که برای گرافی وزن‌دار با V راس بدون دور منفی و با وجود یک ترتیب روی یال‌ها برای الگوریتم بلمن‌فورد، نیاز به اجرای $\Omega(V)$ بار فرایند ریلکس کردن روی کل یال‌ها را داریم.

موفق باشید.