



آنالیز الگوریتم‌ها (۲۲۸۹۱)

[بهار ۹۹]

تمرین سری ۱۲

موعده: پنجشنبه ۲۲ خرداد ساعت ۱۲

۱. چندوجهی

$$P = \{[x_1, x_2]^T \mid x_1 + x_2 \geq 1, -x_1 + x_2 \leq 2, x_1 - 2x_2 \leq 4, x_1 \geq 0\},$$

را در نظر بگیرید.

(آ) چندوجهی P را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

(ب) نقاط رأسی P را بیابید.

(ج) جهت‌های دور شونده راسی چندوجهی P را بیابید.

(د) با استناد به قضیه نمایش، نقاط $[1/2, 3/2]^T$ ، $[1, 1]^T$ و $[3, 2]^T$ را به صورت ترکیب نقاط رأسی و جهت‌های دور شونده رأسی بنویسید.

(ه) با استفاده از قضیه نمایش و نمایش نقاط شدنی مساله با استفاده از نقاط رأسی و جهت‌های دور شونده رأسی، مجموعه جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی

$$\min c^T x \quad \text{s.t.} \quad x \in P, \quad (1)$$

که در آن $c^T = [1, 1]$ را در صورت وجود بیابید.

(و) مشابه قسمت قبل، نشان دهید مساله برنامه‌ریزی خطی (۱) که در آن $c^T = [-2, -1]$ جواب بهینه متناهی ندارد.

(ز) مشابه قسمت (ه)، مجموعه جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی (۱) که در آن $c^T = [-2, -2]$ را بیابید.

(ح) مشابه قسمت (ه)، مجموعه جواب بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی (۱) که در آن $c^T = [0, 1]$ را بیابید. این مساله برنامه‌ریزی خطی را به صورت یک مساله برنامه‌ریزی خطی استاندارد بازنویسی کنید، سپس جواب بهینه این مساله برنامه‌ریزی استاندارد را بیابید.

۲. مساله برنامه‌ریزی خطی

$$\begin{cases} \min & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 6 \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

(آ) با افزودن متغیرهای کمبود و مازاد مساله را به صورت استاندارد بازنویسی کنید. فضای التزام (فضای ترکیب خطی نامنفی بردار ضرایب متغیرها) را در صفحه رسم کنید.

(ب) با استناد به فضای التزام، استدلال کنید که چرا این مساله برنامه‌ریزی خطی شدنی است.

(ج) با فرض این که در هر جواب بهینه این مساله حداکثر دو متغیر مقدار غیر صفر می‌گیرند، و با استفاده از فضای التزام، جواب بهینه مساله را بیابید.

موفق باشید.