



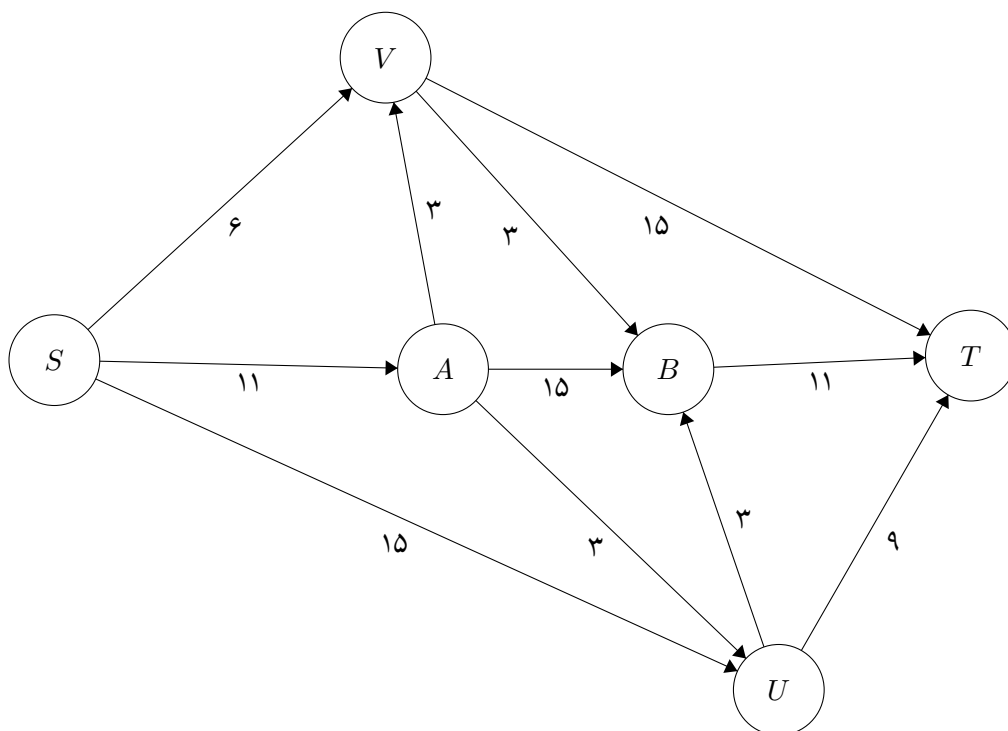
## آنالیز الگوریتم‌ها (۲۲۸۹۱) [بهار ۹۹]

تمرین سری ۷

موعده: سه‌شنبه ۲۶ فروردین ساعت ۱۲

– سوالات خود پیرامون تمرین را با [andishe.ghasemi.9@gmail.com](mailto:andishe.ghasemi.9@gmail.com) مطرح کنید.

۱. در گراف زیر ظرفیت هر یال مشخص شده‌است. و  $S$  رأس منبع<sup>۱</sup> و  $T$  رأس چاه<sup>۲</sup> در این شبکه است. (آ) یک شار بیشینه بدست آورید و شکل آن را به همراه مقدار جریان عبوری از هر یال مشخص کنید. (ب) یک برش کمینه بدست آورید. مقدار ظرفیت خروجی این برش و همچنین رأس‌های آن را مشخص کنید. (پ) گراف باقی‌مانده نهایی را رسم کنید. کدام رأس از  $S$  قابل دسترسی است؟ کدام رأس دسترسی به  $T$  دارد؟ (ت) به یک یال بحرانی افزایشی می‌گوییم اگر افزایش ظرفیت آن یال منجر به افزایش شار بیشینه شود. به یک یال بحرانی کاهش می‌گوییم اگر کاهش ظرفیت آن یال منجر به کاهش شار بیشینه شود. یک یال افزایشی بحرانی و یک یال افزایشی کاهش در این گراف پیدا کنید. (اگر وجود دارد).
- (ث) الگوریتمی بهینه برای پیدا کردن یک یال بحرانی کاهش طراحی کنید.
- (ج) الگوریتمی بهینه برای پیدا کردن یک یال بحرانی افزایشی طراحی کنید. (امتیازی)



<sup>1</sup>source

<sup>2</sup>sink

۲. درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید. در صورت درست بودن اثبات مختصری ارائه کنید و در صورت نادرست بودن مثال نقض بیاورید.

(آ) اگر همه ی یال های جهت دار یک شبکه ظرفیت های متفاوتی داشته باشند ، آنگاه شار بیشینه به طریقی یکتا بدست می آید.

(ب) در مسئله ی شار بیشینه با ظرفیت رأس ها گراف جهت دار  $G = (V, E)$  داده شده است که  $S$  رأس منبع و  $T$  رأس چاه است و ظرفیت هر رأس  $v \in V$  برابر با  $c_v \geq 0$  است. (ولی ظرفیتی برای یال ها داده نشده است). یک شار  $f$  را معتبر برای گراف  $G$  می گوئیم اگر برای همه ی  $v$  ها  $f(S, v) \leq c_v$  و  $f(v, T) \leq c_v$  باشد. اندازه ی یک شار معتبر  $f$  ، مجموع شار خروجی از  $S$  است. با داشتن گراف ورودی ، مسئله ی شار بیشینه با ظرفیت رأس ها ، محاسبه کردن یک شار معتبر با سائز بیشینه است.

محاسبه ی یک شار بیشینه با ظرفیت رأس ها را می توان به مسئله ی شار بیشینه معمولی (با ظرفیت یال ها) کاهش داد.

(پ) اگر هر یال جهت دار با ظرفیت  $c$  و بین دو رأس  $u$  و  $v$  در یک شبکه را با دو یال جهت دار با جهت های مخالف و ظرفیت  $c$  بین دو رأس  $u$  و  $v$  جایگزین کنیم ، آنگاه مقدار شار بیشینه ثابت می ماند.

۳. در یک ساختمان عمومی مثل یک سینما ، داشتن یک نقشه ی خروج برای موارد اضطراری نظیر آتش سوزی مهم است. در این سوال می خواهیم با استفاده از شار بیشینه یک نقشه خروج اضطراری طراحی کنیم. فرض کنید که نقشه سینما یک گراف  $G = (V, E)$  است که در آن هر اتاق یا طبقه با یک رأس و هر راهرو یا پله با یک یال مشخص شده است. هر راهرو یا پله دارای ظرفیتی  $c$  است که نشان می دهد حداکثر  $c$  نفر همزمان می توانند از این راهرو استفاده کنند. پیمایش یک راهرو از یک سر تا سر دیگر یک واحد زمانی طول می کشد. (پیمایش یک اتاق صفر واحد زمانی طول می کشد). فرض کنید در ابتدا همه مردم در اتاق  $S$  هستند و تنها یک خروجی  $T$  به خیابان وجود دارد. نشان دهید که چگونه با استفاده از مسئله ی شار بیشینه ، سریع ترین راه برای خارج کردن همه افراد از ساختمان را پیدا کنیم. (راهنمایی : گراف  $G'$  را طراحی کنید که در آن هر رأس نشان دهنده ی یک اتاق در هر واحد زمانی باشد).

موفق باشید.