

تمرین چهارم اتوماتا

نیما بهرنگ ۹۶۱۰۰۱۱۴

۲۴ دی ۱۳۹۷

استاد خزایی

پرسش ۱

۱.

۲.

۳.

۴.

۵. ماشینی می سازیم که در هر گام یک حرف را به جای مناسبش می برد.

$$\begin{aligned}Q &= q_0, q_a, q_b, q_c, q_1 \\ \forall x \in \{a, b, c\} \delta(q_0, x) &= (q_x, Z, L) \\ \forall x \in \{a, b, c\}, w \in \{a, b, c, Z\} \delta(q_x, w) &= (q_x, w, L) \\ \forall x \in \{a, b, c\} \delta(q_x, B) &= (q_1, x, R) \\ \forall x \in \{a, b, c\} \delta(q_1, x) &= (q_1, x, R) \\ \delta(q_1, Z) &= (q_0, Z, R) \\ \delta(q_0, B) &= (f, B, L) \\ \delta(f, Z) &= (f, B, L) \\ \delta(q_0, Z) &= (q_0, Z, R)\end{aligned}$$

پرسش ۲

۱. اعداد اول حداکثر ۱۰۰ رقمی محدود است پس ماشین تورینگی وجود دارد که همه آنها را بررسی کن و بنویسد و متوقف شود. پس بازگشتی است
۲. چون نمی دانیم تعداد اعداد دوقلو متناهی است یا نا متناهی پس یک الگوریتم نیاز است و بازگشتی برشمردنی است
۳. بازگشتی برشمردنی است. با الگوریتم اعداد پیدا کردن عدد اول می توان فهمید که اول است یا خیر پس برایش الگوریتم داریم.
۴. بازگشتی است. به دو دلیل
اگر L_1 تهی باشد پس آن زبان یک زبان بازگشتی برشمردنی است.
دوم اگر یک زبان بازگشتی برایش باشد، چون L_2 نیز بازگشتی است، برای L_1 نیز یک ماشین می توان ساخت که معادل زبان بازگشتی باشد و این با فرض مسئله تناقض دارد.

پرسش ۳

می‌دانیم ماشین‌های تورینگ داریم که یک رشته باینری را با عددی جمع کنند و همچنین ماشینی که رشته را کپی کند. حال چون بشریت این رمان‌ها را در زمان محدود نوشته پس تعداد آنها ثابت است و حجم باینری شده بزرگترین آنها نیز تعریف شده و مقدار ثابتی است مثل K بیت
حال کافی است بارشده K تا صفر شروع کنیم و یکی یکی به آن بیفزاییم، این گونه تمام اعداد حداکثر K بیتی را می‌سازیم.
برای این کار ابتدای هر گام، یکی کپی از عدد قبلی را در ادامه رشته کپی می‌کنیم و سپس آن قسمت را یکی می‌افزاییم

پرسش ۴

اگر فرض کنیم چنین ماشینی وجود دارد، می‌توانیم به روش زیر ماشینی بسازیم که جواب قسمت اول باشد که می‌دانیم وجود ندارد.

با استفاده از ماشین تشخیص $\#$ و دادن رشته‌ای متناظر با ورودی دلخواه به صورت زیر، جواب مسئله اول را می‌دهیم.

در ورودی هر $\#$ را با کاراکتری که در زبان نیست تعویض می‌کنیم تا تمام $\#$ حذف شوند. حال در تعریف

ماشین داده شده در ورودی، استیتی را که به فاینال می‌رود را این گونه بازنویسی می‌کنیم

$$\delta(q, x) = (F, X, Dir) \longrightarrow \delta(q, x) = (F, \#, Dir)$$

پس تنها زمانی که فاینال می‌رویم که $\#$ دیده ایم و هر وقت به فاینال برویم قطعا $\#$ می‌بینیم پس این ماشین در صورت وجود جواب مسئله اول را به صورت بازگشتی می‌دهد که با فرض مسئله تناقض دارد.

پرسش ۵

آ (غلط زیرا ماشین جهانی هر ماشین تورینگی را می پذیرد و خود یک ماشین تورینگ است پس خود را می پذیرد.

ب (غلط چون هر دو شمارا تا هستند(نا متناهی) و این یعنی هر دو با اعداد طبیعی هم ارزش و هم اندازه هستند پس تعدادشان یکی باید باشد زیرا همان رابطه هم ارزی که هر یک را با اعداد طبیعی هم ارز می کند را می توان استفاده کرد تا این دو را هم ارز نشان داد.

ج غلط زیرا طبق اثبات های قبلی می دانیم زبان همه ماشین هایی که خودشان را می پذیرند بازگشتی برشمردنی است اما متمم آنها نیست.

پرسش ۶

جزئیات کامل این اثبات را در صفحه ۳۴۸ کتاب اصلی درس می توانید ببینید. این سوال را با فرض برابری ماشین چند نواره با هد های متفاوت و قابلیت ثابت ماندن هد ها حل می کنیم. ماکزیمم اندازه مجموعه $|\delta(q, a)| = k$ باشد. یک ماشین قطعی با دو نوار در نظر می گیریم که نوار اول همان رشته اصلی است و در نوار دوم جزئیات هر گام را به صورت کامل می نویسد. این اطلاعات هر گام شامل وضعیت نوار اصلی و موقعیت هد است. حال در هر مرحله یکی یکی این جزئیات را می خواند (موقعیت کنونی را هم با یک مارک می توان نگه داریم) و چون در گام بعدی به تعدادی حالت ممکن است برود، پس کافی است هر حالت که به آن می رود را در انتهای نوار دوم اضافه کند تا زمانی در آینده آن را ببیناید. با این کار BFS روی حالت ها زده ایم پس اگر در ماشین غیر قطعی با تعداد متناهی حالت m به حالت فاینال رسیده باشیم در این حالت نیز با حداکثر $k \times m$ تا حرکت در ماشین ما، قطعاً به همان حالت می رسد که این عدد تعداد راس های درختی است که ما روی آن BFS زده ایم. بلعکس اگر ما به حالت فاینال رسیده باشیم پس تعدادی حرکت در ماشین غیر قطعی وجود دارد که به حالت فاینال برسد.

پرسش ۷

قدرت ماشین یک طرفه کمتر مساوی ماشین دوطرفه است زیرا اگر همان مشخصات و توابع و کاراکترهای یک طرفه را روی دوطرفه اجرا کنیم به همان جواب یک طرفه خواهیم رسید.

حال اگر یک ماشین دو طرفه داشته باشیم، می‌توانیم به صورت زیر برایش یک ماشین یک طرفه معرفی کنیم. هرگاه این ماشین به سمت چپ حرکت کرد به طوری که از اندازه نوار خارج می‌شد، یک کپی از کل نوار را در ادامه رشته کنونی پیاده می‌کنیم (برای این کار ماشین تورینگ کپی کن را قبلاً ساخته ایم) سپس تمام کاراکترهای رشته قبلی را B می‌گذاریم پس رشته ما به اندازه طولش به سمت راست منتقل می‌شود و می‌تواند باز هم به سمت چپ برود.

برای پیاده کردن ماشین کپی‌کننده کافی است تا از کاراکتری مثل ! استفاده کنیم و تمام رشته همواره بین دوتا !! باشد یعنی !asdasd! حال برای کپی کردن کافی است محتوای داخل ! را کپی کنیم و دوباره ! را در ابتدا و انتهای رشته بگذاریم.

پرسش ۸

کافی است نشان دهیم با ماشین دو پشته ای می توان هر حرکت ماشین تورینگ را شبیه سازی کرد و همچنین با ماشین تورینگ هر حرکت ماشین دوپشته ای.

۱. در ماشین تورینگ ما در خانه ای هستیم و تعداد حرف در سمت راست پوینتر و تعدادی در سمت چپ است باقی خالی هستند B. حال کافی است تا حروف سمت چپ به همراه حرفی که پوینتر روی آن است را در استک اول و حروف سمت راست را در استک دوم بگذاریم به این صورت که

$abcdeYfghi : abcd*(e)fghi$

ما در خانه * هستیم و استک ها به ترتیب این گونه هستند:

$abcde \rightarrow Top$

$ihgf \rightarrow Top$

حال با هر حرکت ماشین تورینگ کافی است تا محتوی روی استک ها را درست کنیم یعنی ابتدا از هر دو استک یک کاراکتر برداریم و اگر به سمت راست رفتیم کاراکتری که ماشین تورینگ جایگزین خانه فعلی کرده را به استک اول افزوده و کاراکتری که روی استک دوم بود را به استک اول اضافه کنیم. اگر به چپ رفتیم هم فقط کافی است کاراکتری که جایگزین شده را به استک دوم اضافه کنیم. پس تمام حرکات ماشین تورینگ قبل معادل سازی است.

۲. حال برای شبیه سازی ماشین دو پشته ای کافی است همانند قسمت قبل محتوی استک ها را معادل کنیم به این صورت که با یک # روی نوار، بین محتوی استک اول و دوم تمایز قائل شویم

$abcd \rightarrow Top$

$efgh \rightarrow Top$

$dcba\#efgh$

حال با تغییر محتوای ابتدایی هر استک، کافی است از سر و ته نوار کاراکتر کم و زیاد کنیم.