

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی هوافضا

عنوان

تمرین دوم روش های بهینه سازی

نگارش

فاطمه مقدسیان

استاد درس

دکتر مددی

پاییز 1402

روش‌های بهینه‌سازی نیوتن و شبه-نیوتن از دسته روش‌های بهینه‌سازی بر پایه تکراری هستند. این روش‌ها برای یافتن مینیمم یک تابع، از تکنیک‌های مشتق‌گیری و تکراری برای به‌روزرسانی مقدار تخمینی مینیمم استفاده می‌کنند.

الگوریتم نیوتن

یکی از معروف‌ترین روش‌های بهینه‌سازی با استفاده از مشتق‌گیری، الگوریتم نیوتن است. فرض می‌شود که تابع هدف دو بار قابل مشتق‌گیری است. الگوریتم نیوتن بر اساس تخمین تابع با یک چندجمله‌ای در نزدیکی نقطه جاری عمل می‌کند. فرمول به‌روزرسانی به‌صورت زیر است:

$$J * \delta X = -\nabla F$$

$$(X)_{new} = (X)_{old} + RelaxationFactor * \delta X$$

برای این مسئله Relaxation Factor را مساوی 1 می‌گذاریم.

الگوریتم‌های شبه-نیوتن

الگوریتم‌های شبه-نیوتن نیز بر اساس تقریب مشتق‌ها عمل می‌کنند، اما برخلاف الگوریتم نیوتن، ماتریس هسیان (مشتق دوم) را مستقیماً نمی‌شناسند و به‌جای آن از تقریب‌هایی برای آن استفاده می‌کنند. یکی از الگوریتم‌های معروف شبه-نیوتن، الگوریتم BFGS است.

برای مراحل بعدی که از تقریب ماتریس هسیان استفاده می‌کنیم از معادله زیر استفاده می‌کنیم.

$$J_{new} = J_{old} + \frac{qq^T}{q^T s} - \frac{(J_{old})ss^T(J_{old})}{s^T(J_{old})s}$$

که مقادیر q و s به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$q = \nabla F_{x_{new}} - \nabla F_{x_{old}}$$

$$s = RelaxationFactor * \delta X$$

در شبه نیوتن ، Relaxation Factor ، به دلیل اینکه نسب به نیوتن از پایداری کمتری برخوردار است و به حدس اولیه حساسیت بیشتری دارد کمتر از 1 در نظر می گیریم. که در این مسئله ، برابر با 0.2 است.

تابع هدف :

$$y = e^{X(1)} + e^{X(2)} + 2X(1)^2 + 2X(1)X(2) + X(2)^2$$

نقطه بهینه در روش نیوتن :

تعداد فراخوانی	نقطه بهینه	دقت
6	(-0.0850,-0.2893)	10^{-4}
7	(-0.08493528,-0.28941531)	10^{-8}
8	(-0.084935274092,-0.289415320748)	10^{-12}

این فراخوانی تابع با توجه به Relaxation Factor ، 1 است.

در روش شبه نیوتن :

تعداد فراخوانی	نقطه بهینه	دقت
30	(-0.0849,-0.2895)	10^{-4}
55	(-0.08493527,-0.28941532)	10^{-8}
79	(-0.084935274092,-0.289415320750)	10^{-12}

در روش شبه نیوتن ، تقریب هسیان به طور مکرر بروز رسانی می شود .

برای آنکه متوجه بشویم هزینه محاسباتی نیوتن و شبه نیوتن چطور است. Relaxation Factor برای روش نیوتن مانند شبه نیوتن به 0.2 تغییر داده شده است که جواب به صورت زیر است.

دقت	نقطه بهینه	تعداد فراخوانی
10^{-4}	(-0.0850,-0.2893)	59
10^{-8}	(-0.08493528,-0.28941531)	100
10^{-12}	(-0.084935274092,-0.289415320748)	141

با توجه به جدول بالا می توان متوجه شد که با یک Relaxation Factor یکسان ، روش شبه نیوتن هزینه محاسباتی ، call function کمتر دارد.

معاوضه بین روش نیوتن و روش شبه نیوتن در هزینه محاسباتی ، معکوس کردن ماتریس هسیان در مقابل به روز رسانی تکراری تقریب هسیان نهفته است. روش های شبه نیوتنی زمانی می توانند سودمند باشند که هزینه معکوس ماتریس هسیان بالا باشد یا هنگام برخورد با مسائل بهینه سازی در مقیاس بزرگ که ذخیره و معکوس کردن هسیان کامل ممکن است غیر عملی باشد.