תרגול 4 – לוגיקה עמומה

לוגיקה עמומה היא צורה של לוגיקה מתמטית העוסקת בהיגיון המבוסס על דרגות של חברות לאלמנטים שלא מוגדרים במלואם ולא על הגדרות מוחלטות של אמת/שקר. זה מאפשר גמישות מסוימת, במיוחד בסיטואציות בהן קשה לערוך ניסויים ולהגיע לסטטיסטיקה מדויקת. חלק מהיתרונות של לוגיקה עמומה כוללים את יכולתה להתמודד עם אי-ודאות, עמימות וחוסר דיוק בנתונים.

דוגמאות:

מילים כמו "צעיר", "גבוה" , "טוב" ו-"חם" הן עמומות, מכיוון שאין מספר מדויק המגדיר אותן באופן מוחלט.

קבוצה עמומה – Fuzzy sets:

קבוצה עמומה היא קבוצה שבה לכל אלמנט המשתייך אליה מצומד ערך מספרי המבטא את מידת שייכותו לקבוצה.

ניתן לייצג קבוצה עמומה כך:

$$\boldsymbol{A} = \{\, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu_A}(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}\}, \qquad \boldsymbol{\mu_A}: \boldsymbol{X} \to [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$$

כאשר:

$\boldsymbol{X}$ – מרחב הפתרונות.

למשל, עבור קבוצת האנשים הגבוהים (= A) – מרחב הפתרונות X יהיה טווח הגבהים 1.7 – 2.2 מ'. שימו לב, לא קבענו כי אדם אשר נמצא בטווח הזה הינו אדם גבוה, אלא רק הגדרנו פתרונות אפשריים לשאלה: מי הוא אדם גבוה?

$\boldsymbol{\mu_A}(\boldsymbol{x})$ – פונקציית החברות אשר מתאימה לכל x ב-X את מידת הודאות/אמון לשייכותו לקבוצה.

למשל, בדוגמה הקודמת היא תיתן לכל ערך של גובה במרחב הפתרונות (לכל x ב-X) את מידת האמון שאותו הגובה שייך לקבוצת האנשים הגבוהים (= A).

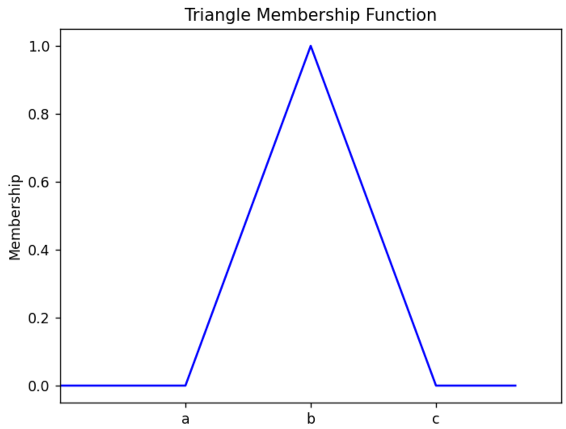
דוגמה: $\mu_A(1.7) = 0.1,\ \mu_A(2) = 0.8$

אם כן, פונקציית חברות מבטאת התפלגות מסויימת (על אף שאינה מבטאת הסתברות, אינה נשענת על סטטיסטיקה) ויכולה להיות מסוגים שונים.

<u>פונקציות חברות פופולריות:</u>

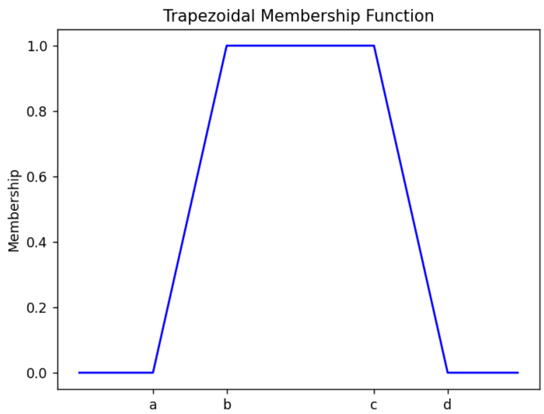
<u>משולש – Triangular:</u>

$$\mu(x) = \begin{cases} 0\,, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}\,, & a \le x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b}\,, & b \le x \le c \\ 0, & x \ge c \end{cases}$$



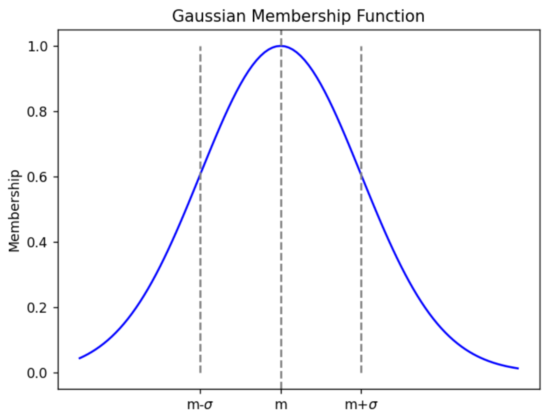
<u>טרפז – Trapezoid:</u>

$$\mu(x) = \begin{cases} 0\,, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}\,, & a \le x \le b \\ 1, & b \le x \le c \\ \dfrac{c-x}{c-b}\,, & c \le x \le d \\ 0, & x \ge d \end{cases}$$



<u>גאוסיאן – Gaussian:</u>

$$\mu(x) = \exp\left(-0.5\left|\frac{x-m}{\sigma}\right|^2\right)$$



בהינתן מערכת הלוקחת בחשבון מספר קבוצות עמומות נוכל למצוא קשרים ביניהן באמצעות אופרטורים לוגים שהפלט שלהם גם הוא עמום .

<u>אופרטורים מרכזיים:</u>

<u>**איחוד ~ OR:** מידת האמון שהאלמנט שייך או ל-A או ל-B :</u>

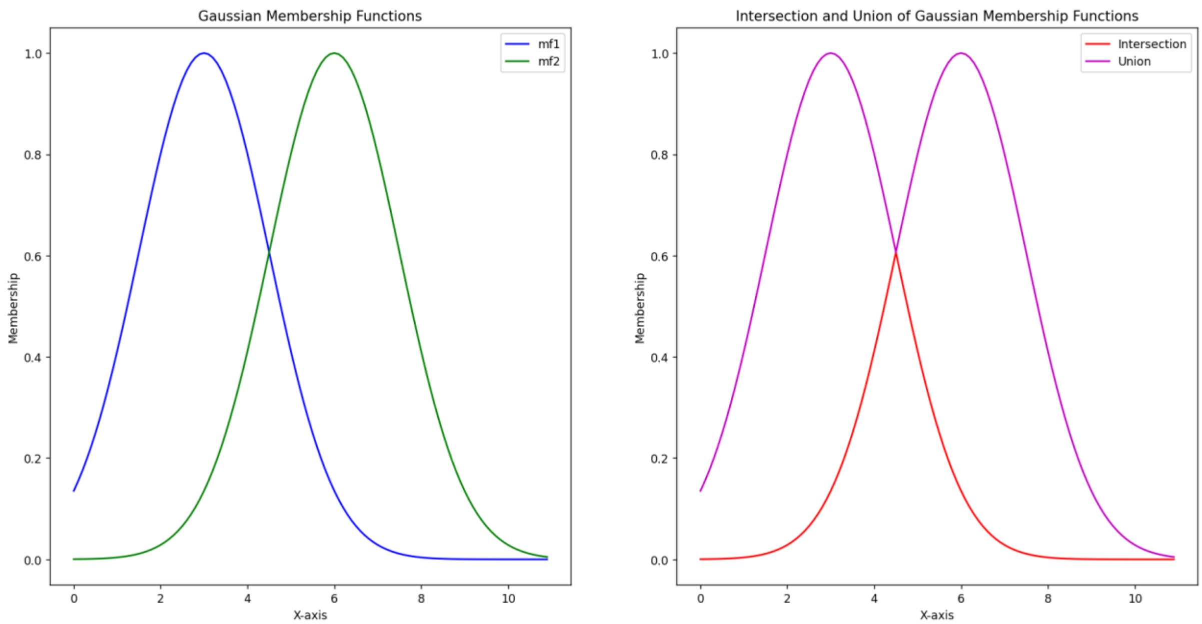
$$A \cup B \to \mu_{A \cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

" If $x \epsilon A$ **OR** $x \epsilon B$ "

<u>**חיתוך ~ AND:** מידת האמון שהאלמנט שייך גם ל-A וגם ל-B:</u>

$$A \cap B \to \mu_{A \cap B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

" If $x \epsilon A$ **AND** $x \epsilon B$ "



בלוגיקה הקלאסית עבור אופרטורים של AND ו-OR אנו רגילים לקבל ערך בוליאני של אמת/שקר לעומת זאת בלוגיקה עמומה האופרטורים המוזכרים יוצרים פונקציות חברות חדשות המתאימות מידת שייכות לקבוצות החיתוך/איחוד בין קבוצות עמומות שונות.

<u>לדוגמה:</u> באיור מעלה, ניתן לראות בגרף השמאלי - שתי פונקציות חברות של שתי קבוצות עמומות על אותו מרחב פתרונות. פונקציות החברות מסוג גאוסיאן וניתן לראות כי ישנה חפיפה ביניהן. בגרף הימני – נראה את פונקציות החברות של קבוצות האיחוד והחיתוך המתאימות על פי האופרטורים שציינו קודם.

למשל: עבור $x = 3$ נקבל $\mu_B(3) = 0.1$, $\mu_A(3) = 1$

ולכן:

עבור אופרטור AND :

$$\mu_{A\cap B}(3) = min\{\mu_A(3), \mu_B(3)\} = min\{1,0.1\} = 0.1$$

מה ההיגיון שעומד מאחור?

<u>הסבר מתמטי:</u>

נביט בטבלת אמת עבור אופרטור AND ונראה בבירור כי ניתן לתאר את הפלט של האופרטור באמצעות פונקציית min של הקלט.

AND Truth Table

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

<u>הסבר על פי ההיגיון הבריא:</u>

מכיוון שמידת החברות של 3 עבור קבוצה A הינה חזקה מאוד ועבור קבוצה B חלשה מאוד אז ההיגיון אומר שמידת האמון ש-3 שייך גם לזה וגם זה היא קטנה (מפני שהוא "נוטה" להיות שייך "רק" ל-A על סמך מידת החברות הגבוהה שלו).

עבור אופרטור OR:

$$\mu_{A\cup B}(3) = max\{1,0.1\} = 1$$

מה ההיגיון שעומד מאחור?

<u>הסבר מתמטי:</u>

נביט בטבלת אמת עבור אופרטור OR ונראה בבירור כי ניתן לתאר את הפלט של האופרטור באמצעות פונקציית max של הקלט.

OR Truth Table

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

<u>הסבר על פי ההיגיון הבריא:</u>

אנו שואלים את עצמנו מה מידת האמון ש-3 שייך לקבוצה A או לקבוצה B ? מכיוון שמידת החברות של 3 עבור קבוצה A הינה חזקה מאוד (בעצם שווה לערך מקסימלי של מידת חברות = 1) אז ניתן להגיד במידה רבה של אמון ש-3 אכן שייך או ל A או לקבוצה B.

מערכת הסקה עמומה – Fuzzy inference:

חוקים:

על סמך ההתניות, אותן אנו יודעים כבר לממש באמצעות האופרטורים העמומים, אנו יכולים לבנות מערכת של חוקים – **אם** (תנאי/ם מסויימ/ים) **אז** (מסקנה/ות)**.**

לדוגמה:

$$\text{חוק} \longrightarrow \text{"if } \overbrace{a\epsilon A}^{\text{תנאי}} \text{ then } \overbrace{b\epsilon B}^{\text{מסקנה}}\text{"}$$

בקבוצות רגילות, התנאי הוא דטרמיניסטי, אך מכיוון שמדובר בקבוצות עמומות, רמת הוודאות של $a\epsilon A$ תקבע את רמת השייכות של $b\epsilon B$.

- מערכת הסקה עמומה עשויה לכלול מספר חוקים כאשר לכל חוק עשוי להיות מספר תנאים ומספר מסקנות.

למשל בהינתן שתי קבוצות עמומות A ו- B נשתמש בחוק לדוגמה שכתבנו קודם:

$$\text{"if } a\epsilon A \text{ then } b\epsilon B\text{"}$$

<u>שלבי ההסקה העמומה:</u>

1. <u>עימום – Fuzzification :</u> הפיכת מספר חד (נקרא גם crisp) a לערך עמום $\mu_A(a)$.
2. <u>הסקה :</u> אנו נדרשים להטיל בצורה מסוימת את התנאי של A על גבי B. פעולה זו מתבצעת על ידי הטלה של קו אופקי החותך את ציר השייכות (ציר ה-*y*) של הקבוצה העמומה B בדיוק בערך מידת החברות שהתקבלה לאחר האופרציות על התנאים. במקרה שלנו, קיים <u>תנאי יחיד</u> ולכן הערך המתקבל הינו פשוט $\mu_A(a)$. הקו המוטל נסמנו ב- $\underline{\boldsymbol{\alpha}}$.

- אם יש יותר מ<u>חוק</u> אחד הרי שנקבל מספר α_k ויש לקבוע מבניהן את הערך היחיד שישפיע. זה מתבצע באמצעות פעולה הנקראת צבירה (*aggregation*) הממומשת על ידי:

$$\beta = \max\{\alpha_k\} \mid \forall k$$

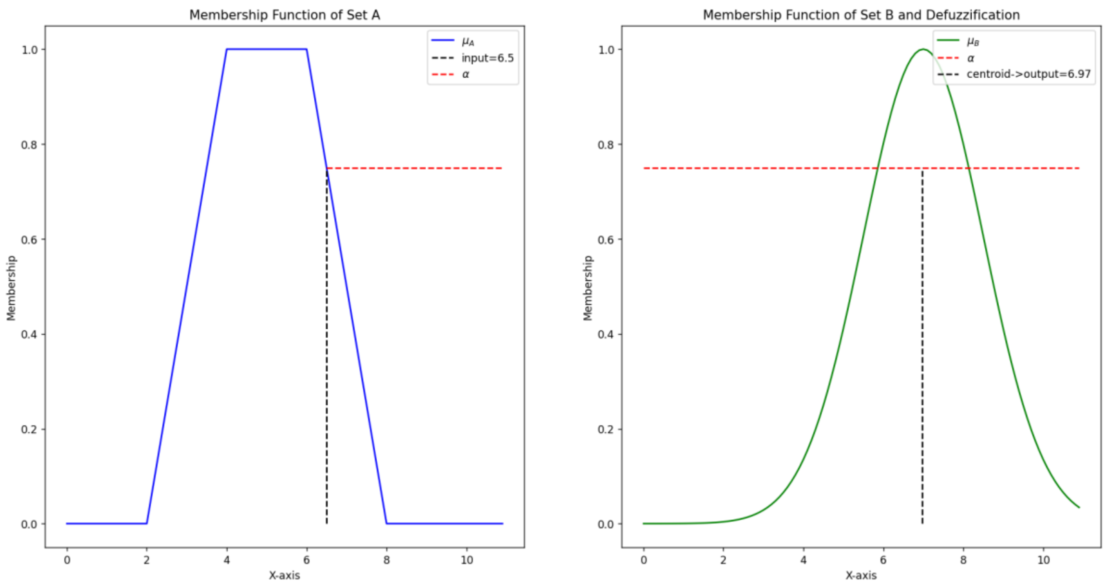
בסה"כ, הקו האופקי שיוטל על B יהיה β. ולבסוף מידת הוודאות $\mu_B(b)$ תקבע על פי <u>השטח הכלוא</u> של $\mu_B(b)$ מתחת ל- β . ככל שהשטח גדול יותר, כך רמת הוודאות גדולה יותר.

3. <u>ביטול עימום – de-Fuzzification :</u> מיפוי ערך עמום למספר חד.

למשל בשיטת ה- **<u>centroid</u>** – נחשב את מרכז השטח הכלוא, נוריד אנך לציר ה-X על מנת לקבל את הערך החד של הפלט.

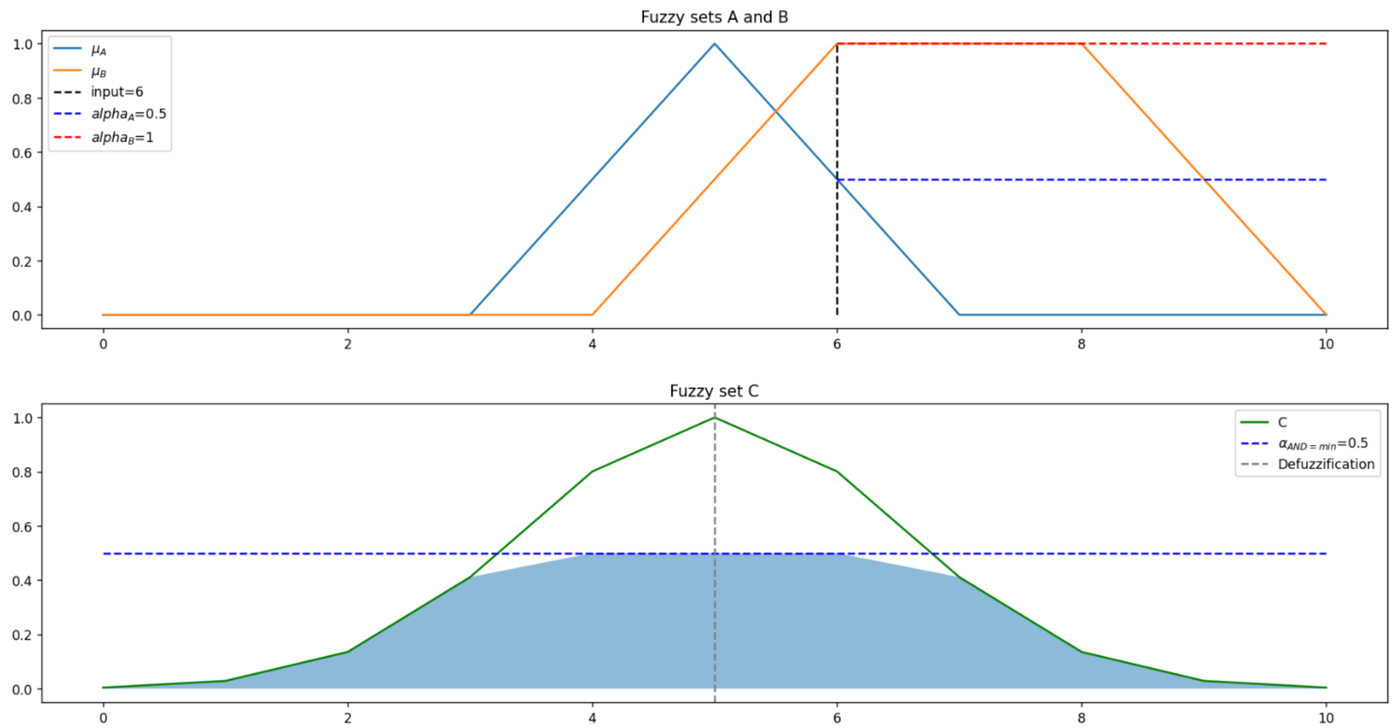
דוגמה למערכת הסקה של <u>חוק אחד בעל תנאי אחד</u> :

"if $a\epsilon A$ then $b\epsilon B$"



דוגמה למערכת הסקה של <u>חוק אחד בעל שני תנאים</u>:

"if $a\epsilon A$ <u>AND</u> $b\epsilon B$ then $c\epsilon C$"



- כל השטח הכלוא צריך להיות צבוע. יש את החללים הריקים בפינות בעקבות מגבלות של הפונקציה שנעשה בה שימוש להצגה.