

# Homework 3

3.1(a)  $e_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left( \frac{1}{2} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$

$\rightarrow T(e_1) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$e_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \left( \frac{1}{2} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$

$\rightarrow T(e_2) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$e_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \frac{1}{2} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \checkmark$

$\rightarrow T(e_3) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(b)  $\text{Mat}_E(T) := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c)  $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1+0+\frac{1}{2} \\ 1+0-\frac{1}{2} \\ -2+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$

(d) ~~...~~

$T_1 = \frac{1}{2}(x_1 + 3x_2 - x_3), a_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$T_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3), a_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$T_3 = -x_1 + x_2, a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(e) Each a.k.a vector represents a row in  $\text{Mat}_E(T)$ .

(f)  $T(x) = 0, \rightarrow T_1 \rightarrow \frac{1}{2}(x_1 + 3x_2 - x_3) = 0$

$T_2: \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3) = 0$

$T_3: x_2 = x_1$

$\hookrightarrow$  This is the intersection of all three planes of  $\mathbb{R}^3$  under  $T$  at  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .