高等数学及应用

GAODENGSHUXUEJIYINGYONG

(第二版)

主编　吕同富

副主编　金明华　王英

高等教育出版社·北京

内 容 简 介

作者以基于实际应用的课程开发设计模式，编写了新版高职高专数学教材《高等数学及应用》．本书内容包括：极限与连续；导数与微分；导数应用；不定积分；定积分及应用；常微分方程；向量空间与解析几何；多元函数微分学；多元函数积分学．

基于实际应用的课程开发设计模式是本书的特色．学习目的明确，实际问题具体，有大量详实的应用实例可供参考，有相当数量的应用问题可供实践．

本书可作为高职高专理工科类学生“高等数学”课程教材或参考书，也可作为应用型本科和成人高校相关教材．

第二版前言

从2010年《高等数学及应用》出版以来，得到了很多老师的关注，收到了很多读者的Email，给了很多的肯定和鼓励，同时也对书中的内容、体系、讲法等方面提出了很多宝贵意见，借此再版之机，向关怀和支持作者工作的广大读者朋友表示深切谢意．此次再版，根据广大读者的建议，对原《高等数学及应用》的内容作了适当的增删。在保持原《高等数学及应用》特色的前提下，对体例、格式、叙述、内容等方面作了较大的修改，力求使原《高等数学及应用》的优点得到发展，缺点得到克服。其中很多章节和例题都重写了，修改后的内容更符合现代高等数学教学改革实际，即便于教学，又有利于培养学生解决实际问题的能力．此次再版包括：极限与连续，数与微分，导数应用，不定积分，定积分及应用，常微分方程，向量空间与解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学等内容。由于课时体系等原因，删除了线性代数、Fourier级数、Laplace变换等内容，还有对部分过难的例题和习题作了修改和替换，新增了数字教学资源电子教案(由金明华、黄美金、佘卫强、蔡建刚、许建艺制作完成)，Mathematica实验等内容供师生参考(相关数字教学资源可到高等教育出版社网上下载)．修改后的书稿有各种插图429张，有传统意义的例题226个，实际应用问题150个．本书修改由中国数学会会员、中国职业技术教育学会教学工作委员会高职数学研究会委员、吕同富教授执笔．参加本书部分章节修改的还有：金明华副教授修改了本书的全部习题和答案、王英副教授修改了第五章的部分内容、韦华教授修改了第四章的部分内容，另外还有杨风翔教授、韩红副教授、汤风香老师参加了部分内容的修改．全书由吕同富教授统稿．高等教育出版社邓雁城编辑，两年来自始至终给作者以支持和鼓励，还有王玲玲编辑用高度的责任感认真地编辑审校了书稿，纠正了原稿中很多疏漏和错误，这里向他们及本书所列参考文献的作者们，以及为本书再版给予热心支持和帮助的朋友们，表示衷心的感谢．本书可作为高职高专理工科相关专业”高等数学”课程教材，也可作本科院校理工科学生”高等数学”课程参考用书．

吕同富

ltongfu@126.com

2012年04月

第一版序

吕同富教授主编的《高等数学及应用》是针对高等职业院校特点的一部新教材．该书的突出特色包括：

1．作者在构思本教材时，从“将数学建模的思想融入数学基础课教学”的角度进行了思考，值得肯定；本书借鉴国内外优秀教材，大量使用了应用实例引出问题，这是目前国内同类教材中是比较少见的，也是本书的亮点；作者所选用的百余个“实际问题”作为应用示例，无疑会有助于激发学生的学习热情，培养学生的应用能力；

2．与传统的教材相比，作者也努力融文化性于数学内容．很多篇章的“实际问题”涉及古今中外，相映成趣，通而不同，很有启发性，也增添了教材的趣味性；

3．将现代数学软件融入数学基础课程教学，无疑非常有意义，这可以是本书进一步修订和改版的努力目标，如果本书能够在这方面有所推进，无疑会成为另外一个亮点．

高职的特色决定其数学课程无疑应当是突出实用性．但数学教育中实用性(或称工具性)与文化性(或称思维性)的矛盾与平衡，是多年来备受关注但始终困扰不断的问题．数学作为理性思维的重要载体，对学生理性思维发展的作用也是不应当忽视的．即便是高职的学生也是属于中国受过高等教育的群体，数学的教育如何培养学生的理性思维，是需要认真思考和研究的课题．

希望作者与出版社共同努力，经过教学的实践，将本书打造成为精品．

白峰杉

2010年04月于清华园

第一版前言

从德国引进的“基于工作过程”的教学模式，对高职教学改革起到一定的促进作用，推动了高职教学改革向纵深发展，为实现“以服务为宗旨，以就业为导向”的高职教育改革发展目标作出了重要贡献.

改革是永恒的主题.《中国教育和改革发展纲要》要求我们各级学校都要积极地开展各个领域的改革，要求在改革中求生存求发展.然而数学作为高职教育的基础课，教学改革发展缓慢举步为艰.为了进一步适应高职数学教学改革的需要，作者做了艰苦的探索和研究，历时两年完成了这本《高等数学及应用》，希望它能在改革的大潮中激起一点浪花.

本书突出“高职”特色，注重培养学生的实践能力，基础理论以“实用为主、够用为度”，基础知识广而不深、要求学生会用就行.基本应用技能贯穿始终.文字叙述准确，简明扼要，通俗易懂.“以例释理”，理论联系实际.每部分知识既是教材的有效组成部分，又相对独立完整，具有一定的可剪裁性和拼接性，可根据不同的培养目标将内容裁剪、拼接，使前后课程互相衔接，浑然一体.内容覆盖面广，满足了专业大类对理论、技能及其基本素质的要求，同时可满足深入学习的需要，不是学多少编多少，而是给学生留了一定的学习空间，有利于培养学生再学习的能力.

本书内容紧密结合专业要求.站在专业的最前沿，与生产实际紧密相连，与相关专业的市场接轨，渗透专业素质的培养.以介绍成熟、稳定、广泛应用的数学知识为主线，同时介绍新知识、新方法、新技术等，并适当介绍科技发展的趋势，使学生能够适应未来技术进步的需要.与职业培养目标保持一致，及时更新了教材中过时的内容，增加了市场迫切要求的新知识，使学生在毕业时能够适应企业的要求.强调用情景真实的“实际问题”，营造现实工作过程中待解决问题的情境；主张用问题启动学生的思维，鼓励学生基于解决问题的学习、基于“实际应用”的学习；通过设计各种情境真实的“实际问题”，开拓学生的创新思维与想象空间；充分利用各种信息为学生提供跨学科的知识链接，提高学生的综合素质与能力.

本书取材新颖、阐述严谨、内容丰富、重点突出、推导简捷、思路清晰、深入浅出、富有启发性，便于教学与自学.图文并貌，有各种插图450多张，不仅从不同的视角展现了计算机及其相关数学软件在现代数学教学中作用，更使抽象的数学变得生动直观.基于实际应用是本书的特色.书中除了传统意义的习题外，引入了160多个应用实例，简要地介绍了微积分在理工农医、天文地理、航天通信、科学计算、国防建设、民用生活等各方面的实际应用.展示了微积分的强大威力和不可替代的重要地位.

本书在高等教育出版社的指导下，由中国数学会会员、中国职业技术教育学会教学工作委员会高职数学研究会委员、吕同富教授编写.参加本书部分章节编写的还有：金明华副教授编写了本书的全部习题和答案、王英副教授编写了第五章的部分内容、韦华教授编写了第四章的部分内容，另外还有杨风翔教授、韩红副教授、汤风香、陈益军老师参加了部分内容的编写.全书由吕同富教授

统稿.

清华大学白峰杉教授，认真地审阅了书稿，从科学谋篇到整体布局、从开篇序论到内容细节等，提出了很多保贵的修改意见. 高等教育出版社邓雁城编辑，两年来自始至终给作者以支持和鼓励，作者深知没有邓老师的帮助这本书也许无法问世，还有高等教育出版社李茜老师用高度的责任感认真地编辑审校了书稿，纠正了原稿中很多错误，这里向他们及本书所列参考文献的作者们，以及为本书出版给予热心支持和帮助的朋友们，表示衷心地感谢.

本书可作为高职高专理工科相关专业“高等数学”课程教材，也可作本科院校理工科学生“高等数学”课程参考用书.

如果说想引领中国高职数学改革的发展方向，那是狂妄. 不过作者真的想编写一本好书，让读者感到这就是我想要看的书，让老师感到这就是我想用的讲义、让学生感到读了这本书受益终生、让专家感到这本书真的与众不同而且实用……当然做到这些很不容易，这需要对教育无限的热爱和敬业精神来支撑才有可能完成.

《高等数学及应用》是高职数学教学改革的一个尝试，效果如何还有待实践的检验. 希望广大师生和同仁在使用过程中能给作者以指教，把高等数学教学改革进一步推向深入.

吕同富
ltongfu@126.com
2010年05月

目 录

第一章　极限与连续

学习目标与要求

1. 理解极限与连续的概念，会用极限方法分析解决实际问题．
2. 掌握用极限方法判断函数在某点的连续性．
3. 掌握闭区间连续函数的性质．

§ 1.1 极限思想的产生与发展

1．极限思想的产生与发展

(1) 极限思想的由来

与其他科学思想方法一样，极限思想也是社会实践的产物．极限思想可以追溯到古代．刘徽的割圆术是早期极限思想的应用；古希腊人的穷竭法也蕴含了极限思想．到了16世纪，荷兰数学家斯泰文在考察三角形重心的过程中改进了古希腊人的穷竭法，他借助几何直观，大胆地运用极限思想思考问题．在无意中把“极限方法”发展成为一个实用概念．

(2) 极限思想的发展

极限思想的进一步发展与微积分的建立紧密相联．16世纪的欧洲处于资本主义萌芽时期，生产力得到极大的发展，生产和技术中大量的问题，只用初等数学的方法已无法解决，要求数学突破只研究常量的传统范围，而提供能够用以描述和研究运动、变化过程的新工具，这是促进极限发展、建立微积分的社会背景．

早期Newton和Leibniz以无穷小概念为基础建立微积分，后来因遇到了逻辑困难，他们接受了极限思想．Newton用位移的改变量Δs与时间的改变量Δt之比$\Delta s/\Delta t$表示运动物体的平均速度，让Δt无限趋近于零，得到物体的瞬时速度，并由此引出导数概念和微分学理论．他意识到极限概念的重要性，试图以极限概念作为微积分的基础，他说：“两个量和量之比，如果在有限时间内不断趋于相等，且在这一时间终止前互相靠近，使得其差小于任意给定的差，则最终就成为相等”．但Newton的极限观念也是建立在几何直观基础上，因而无法得出极限的严格表述．Newton所运用的极限概念，只是接近于直观性的语言描述：“如果当n无限增大时，a_n无限接近于常数A，则称a_n以A为极限”．这种描述性语言，人们容易接受．但是，这种定义没有定量地给出两个“无限过程”之间的联系，不能作为科学论证的逻辑基础．正因为当时缺乏严格的极限定义，微积分理论才受到人们的怀疑与攻击，例如，在瞬时速度概念中，究竟Δt是否等于零？如果说是零，怎么能用它去作除法呢？如果它不是零，又怎么能把包含着它的那些项去掉呢？这就是数学史上所说的无穷

小悖论．英国哲学家、大主教Berkley对微积分的攻击最为激烈，他说微积分的推导是“分明的诡辩”．贝克莱之所以激烈地攻击微积分，是由于当时的微积分缺乏牢固的理论基础，连Newton自己也无法摆脱极限概念中的混乱．这个事实表明，弄清极限概念，建立严格的微积分理论基础，不但是数学本身所需要的，而且有着认识论上的重大意义．

(3) 极限思想的完善

极限思想的完善与微积分的严格化密切联系．在很长一段时间里，微积分理论基础的问题，许多人都曾尝试解决，但都未能如愿以偿．这是因为数学的研究对象已从常量扩展到变量，而人们对变量数学特有的规律还不十分清楚；对变量数学和常量数学的区别和联系还缺乏了解；对有限和无限的对立统一关系还不明确．这样，人们使用习惯了的处理常量数学的传统思想方法，就不能适应变量数学的新需要，仅用旧的概念说明不了这种“零”与“非零”相互转化的辩证关系．到了18世纪，Robins、DAlembert与Huilier等人先后明确地表示必须将极限作为微积分的基础概念，并且都对极限作出过各自的定义．其中DAlembert的定义是：“一个量是另一个量的极限，假如第二个量比任意给定的值更为接近第一个量”，它接近于现在极限的正确定义．然而，这些人的定义都无法摆脱对几何直观的依赖．事情也只能如此，因为19世纪以前的算术和几何概念大部分都是建立在几何量的概念上．

首先用极限概念给出导数正确定义的是捷克数学家Bolzano，他把函数$y=f(x)$的导数$f'(x)$定义为差商$\Delta y/\Delta x$的极限，他强调指出$f'(x)$不是两个零的商．Bolzano的思想很有价值，但关于极限的本质他仍未说清楚．

到了19世纪，法国数学家Cauchy在前人工作的基础上，比较完整地阐述了极限概念及其理论，他在《分析教程》中指出：“当一个变量逐次所取的值无限趋于一个定值，最终使变量的值和该定值之差要多小就多小，这个定值就叫做所有其他值的极限值，特别地，当一个变量的数值(绝对值)无限地减小使之收敛到极限零，就说这个变量成为无穷小”．Cauchy把无穷小视为以零为极限的变量，这就澄清了无穷小“似零非零”的模糊认识，这就是说，在变化过程中，它的值可以是非零，但它变化的趋向是“零”，可以无限地接近于零．柯西试图消除极限概念中的几何直观，作出极限的明确定义，然后去完成Newton的愿望．但Cauchy的叙述中还存在描述性的词语，如“无限趋近”、“要多小就多小”等，因此，还保留着几何和物理的直观痕迹，没有达到彻底严密化的程度．

为了排除极限概念中的直观痕迹，Weierstrass提出了极限的静态的定义，给微积分提供了严格的理论基础．所谓a_n无限趋近于A，是指：“如果对任意$\varepsilon>0$，存在自然数N，使得当$n>N$时，不等式$|a_n-A|<\varepsilon$恒成立”．这个定义，借助不等式，通过ε和N之间的关系，定量地、具体地刻画了两个“无限过程”之间的联系．因此，这样的定义是严格的定义，可以作为科学论证的基础，至今仍在微积分书籍中使用．在该定义中，涉及的仅仅是数及其大小关系，此外只是给定、存在、任意等词语，已经摆脱了“趋近”一词，不再求助于运动的直观．

自从解析几何和微积分问世以后，运动进入了数学，人们有可能对物理过程进行动态研究．之后，维尔斯特拉斯建立的$\varepsilon-N$语言，则用静态的定义刻划变量的变化趋势．这种“静态–动态–静态”的螺旋式的演变，反映了数学发展的辩证规律。

2．极限思想的思维功能

极限思想在现代数学乃至物理学等学科中有着广泛的应用，这是由它本身固有的思维功能所决定．极限思想揭示了变量与常量、无限与有限的对立统一关系，是唯物辩证法的对立统一规律在数学领域中的应用．借助极限思想，人们可以从有限认识无限，从“不变”认识“变”，从直线形认识曲线形，从量变认识质变，从近似认识精确．无限与有限有本质的不同，但二者又有联系，无限

是有限的发展．无限个数的和不是一般的代数和，把它定义为“部分和”的极限，就是借助于极限的思想方法，从有限来认识无限．“变”与“不变”反映了事物运动变化与相对静止两种不同状态，但它们在一定条件下又可相互转化，这种转化是“数学科学的有力杠杆之一”．例如，要求变速直线运动的瞬时速度，用初等方法无法解决，困难在于速度是变量．为此，人们先在小范围内用匀速代替变速，并求其平均速度，把瞬时速度定义为平均速度的极限，就是借助于极限的思想方法，从“不变”认识“变”．曲线与直线有着本质的差异，但在一定条件下也可相互转化，正如恩格斯所说：“直线和曲线在微分中终于等同起来了”．善于利用这种对立统一关系是处理数学问题的重要手段之一．直线形的面积容易求得，求曲线形的面积问题用初等的方法是不能解决的．刘徽用圆内接多边形逼近圆，一般地，人们用小矩形的面积来逼近曲边梯形的面积，都是借助于极限的思想方法，从直线形来认识曲线形．量变和质变既有区别又有联系，两者之间有着辩证的关系．量变能引起质变，质和量的互变规律是辩证法的基本规律之一，在数学研究工作中起着重要作用．对任何一个圆内接正多边形来说，当它边数加倍后，得到的还是内接正多边形，是量变而不是质变；但是，不断地让边数加倍，经过无限过程之后，多边形就“变”成圆，多边形面积便转化为圆面积．这就是借助于极限的思想方法，从量变来认识质变．近似与精确是对立统一的关系，两者在一定条件下也可相互转化，这种转化是数学应用于实际计算的重要诀窍．前面所讲到的“部分和”、“平均速度”、“圆内接正多边形面积”，分别是相应的“无穷级数和”、“瞬时速度”、“圆面积”的近似值，取极限后就可得到相应的精确值．这都是借助于极限的思想方法，从近似来认识精确．

3．建立概念的极限思想

极限的思想方法贯穿于微积分课程的始终．可以说微积分中的几乎所有的概念都离不开极限．在几乎所有的微积分著作中，都是先介绍函数理论和极限的思想方法，然后利用极限的思想方法给出连续函数、导数、定积分、级数的敛散性、多元函数的偏导数、广义积分的敛散性、重积分和曲线积分与曲面积分的概念．

4．解决问题的极限思想

极限的思想方法是微积分乃至全部高等数学必不可少的一种重要方法，也是微积分与初等数学的本质区别．微积分之所以能解决许多初等数学无法解决的问题(例如求瞬时速度、曲线弧长、曲边形面积、曲面体体积等问题)，正是由于它采用了极限的思想方法．有时我们要确定某一个量，首先确定的不是这个量的本身而是它的近似值，而且所确定的近似值也不仅仅是一个而是一连串越来越准确的近似值；然后通过考察这一连串近似值的趋向，把那个量的准确值确定下来．这就是运用了极限的思想方法．

5．极限思想与π的计算

前面提到计算圆的面积问题，这里不能不提到一些数学家的名字．

(1) 第一个用科学方法寻求圆周率数值的人阿基米德．

阿基米德在《圆的度量》(公元前3世纪)中用圆内接和外切正多边形的周长确定圆周长的上下界，从正六边形开始，逐次加倍计算到正96边形，得到$(3+10/71)<\pi<(3+1/7)$，开创了圆周率计算的几何方法(亦称古典方法，或阿基米德方法)，得出精确到小数点后两位的π值．

(2) 中国数学家刘徽与祖冲之对π的贡献．

中国数学家刘徽在注释《九章算术》(263年)时只用圆内接正多边形就求得π的近似值，也得出精确到两位小数的π值，他的方法被后人称为割圆术．他用割圆术一直算到圆内接正192边形．南北朝时代著名数学家祖冲之进一步得出精确到小数点后7位的π值(约5世纪下半叶)，给出不足近似

值3.141 592 6和过剩近似值3.141 592 7，还得到两个近似分数值，密率355/113和约率22 / 7．他的辉煌成就比欧洲至少早了1 000年．

(3) 群雄逐鹿π．

密率在西方直到1573才由德国人奥托得到，1625年发表于荷兰工程师安托尼斯的著作中，欧洲称之为安托尼斯率．阿拉伯数学家卡西在15世纪初求得圆周率17位精确小数值，打破祖冲之保持近千年的纪录．德国数学家柯伦于1596年将π值算到20位小数值，后投入毕生精力，于1610年算到小数后35位数，该数值被用他的名字称为鲁道夫数．无穷乘积式、无穷连分数、无穷级数等各种π值表达式纷纷出现，π值计算精度也迅速增加．1706年英国数学家梅钦计算π值突破100位小数大关．1873年另一位英国数学家尚可斯将π值计算到小数点后707位，可惜他的结果从528位起错了．到1948年英国的弗格森和美国的伦奇共同发表了π的808位小数值，成为人工计算圆周率值的最高纪录．

(4) 电子计算机的出现使π值计算有了突飞猛进的发展．

1949年美国马里兰州阿伯丁的军队弹道研究实验室首次用计算机(ENIAC)计算π值，算到2037位小数．1989年美国哥伦比亚大学研究人员用克雷－2型和IBM－VF型巨型电子计算机计算出π值小数点后4.8亿位数，后又继续算到小数点后10.1亿位数．至今，最新纪录是小数点后25 769.8037亿位．

§ 1.2 函数极限

1.2.1 函数极限

实际问题 1.1 圆的周长与面积

在生产和实践中，人类首先学会求正方形、矩形、三角形、平行四边形、梯形、任意多边形的周长和面积．在很早以前，人们求圆的周长和面积还是一件很困难的事情，还不知道圆的周长$=2\pi r$，圆的面积$=\pi r^2$，也不知道π的值是多少．我国古代数学家刘徽为了计算圆的周长和面积，于魏景元四年(公元263年)创立了“割圆术”．刘徽借助圆的内接正多边形序列定义了圆的周长和面积．刘徽的作法是：作圆的第一个内接正多边形(正六边形)，平分每个边所对的弧作第二个内接正多边形(正十二边形)，以下用同样的方法，继续作圆的第三个内接正多边形(正二十四边形)，圆的第四个内接正多边形(正四十八边形)……如图 ??所示．

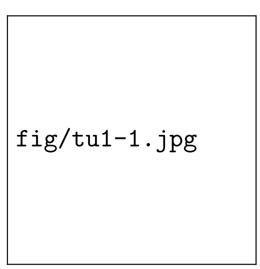

图 1.1　正多边形逼近圆

显然无论正多边形的边数怎样多，每个圆内接正多边形的周长和面积都容易求得．于是，得到圆的内接正多边形周长序列：

$$P_6, P_{12}, P_{24}, \cdots, P_{2^{n-1}6}, \cdots. \tag{1.1}$$

圆的内接正多边形面积序列：

$$A_6, A_{12}, A_{24}, \cdots, A_{2^{n-1}6}, \cdots. \tag{1.2}$$

其中，通项$P_{2^{n-1}6}$表示第n次作的正$2^{n-1}\times 6$边形的周长，通项$A_{2^{n-1}\times 6}$表示第n次作的正$2^{n-1}6$边形的面积．显然，正多边形周长序列逼近了圆的周长，这正多边形面积序列逼近了圆的面积．刘徽说：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣．”很明显，当圆的内接多边形的边数成倍无限增加时，圆内接正多边形周长序列将无限地趋近于圆的周长．圆内接正多边形的面积序列将无限地趋近于圆的面积．既多边形序列的极限是圆．多边形极限位置的周长是圆的周长，多边形极限位置的面积就是圆的面积．对于正多边形的周长，当n无限增大时，圆的内接正多边形周长序列$\{P_{2^{n-1}6}\}$将逐渐稳定趋于某个数l．“割之弥细”，用圆的内接正多边形的周长近似代替圆的周长，而圆的周长“所失弥少”，当“割之又割，以至于不可割”，即圆的内接正多边形的边数成倍无限增加时，圆的内接正多边形的极限位置“则与圆合体”，此时，圆的内接正多边形周长序列$P_{2^{n-1}6}$稳定于某个常数l，l就是圆的周长，只有在无限的过程中才能真正“无所失矣”．

图 **??**的渐近过程很快，我们可以放慢了看一下,如图 **??**所示(这不是刘徽当时的原作)．

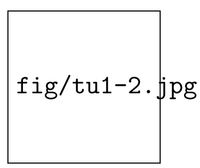

图 1.2　正多边形逼近圆

根据上述分析，圆的周长可以这样定义：若圆的内接正多边形的周长序列$P_{2^{n-1}6}$稳定于某个数l(当n无限增大时)，则l 为圆的周长．

圆是曲边形，它的内接多边形是直边形，二者有本质区别，但是这个区别又不绝对，当“圆的内接正多边形的边数无限增加”时，圆的内接多边形转化为圆周．因此，在无限的过程中，直边形能转化为曲边形．即在无限的过程中，由直边形的周长序列得到了曲边形的周长．这就是极限思想和方法在定义圆的周长时的应用．

根据圆周长的定义，可以计算出半径为r的圆周长 $c=2\pi r$.

实际问题 1.2 温度下降趋势

将一个温度为500℃的物体移置室温为25℃的房间中，观察温度变化趋势．结果发现，开始高温物体温度降低很快，迅速降到400℃、300℃、200℃、100℃……随着时间的延长，高温物体温度下降越来越慢，经验告诉我们，如果“时间足够长”，这个物体的温度将降至室温25℃．如图**??**所示．用符号表示为

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = 25.$$

实际问题 1.3 电阻对电流强度的影响

由Ohm定律可知，电压＝电阻×电流强度，$U = RI$，当电压U一定时，电流强度I与电阻R成反比，$I = \frac{U}{R}$，即随着电阻的增大电流会越来越小．如图 ??所示．用符号表示为

$$\lim_{R\to+\infty} I(R) = 0.$$

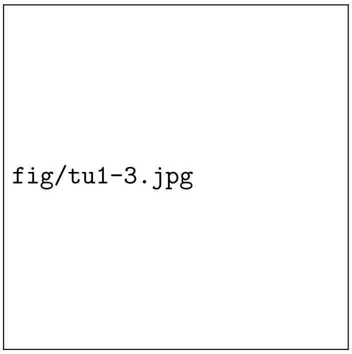

图 1.3　物体温度越来越小

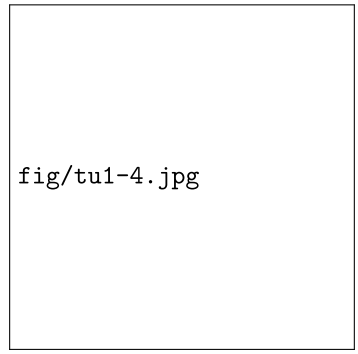

图 1.4　电流强度越来越小

定义 1.1　无穷远点极限的描述性定义

如果当x绝对值无限增大时，函数$f(x)$无限趋近于一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$的极限．记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A. \tag{1.3}$$

如果当x正向无限增大时，函数$f(x)$无限趋近于一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$的极限．记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A. \tag{1.4}$$

如果当x负向无限增大时，函数$f(x)$无限趋近于一个确定的常数A，则称A为函数$f(x)$的极限．记作

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A. \tag{1.5}$$

例 1.1　观察研究函数$y = \dfrac{1}{x^2}, y = \dfrac{2x}{x-3}, y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$的图像(图 ??、??、??)可知

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-3} = 2,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1.$$

例 1.2　观察研究函数$y = \arctan x, y = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$的图像(图 ??、??)可知

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$$

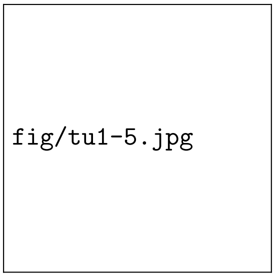

图 1.5　$y=\frac{1}{x^2}$

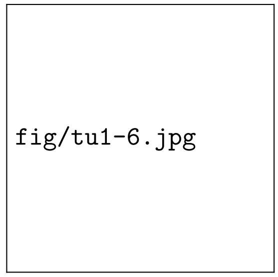

图 1.6　$y=\frac{2x}{x-3}$

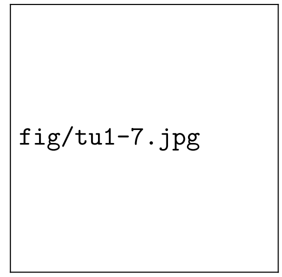

图 1.7　$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\frac{\sqrt{2}}{3},$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=-\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

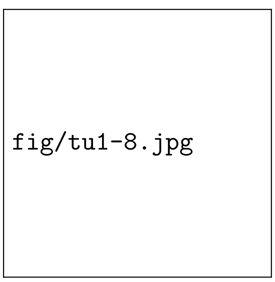

图 1.8　$y=\arctan(x)$

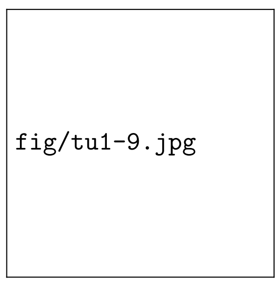

图 1.9　$y=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

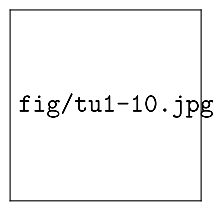

图 1.10　行人的影子

实际问题 1.4 夜间路灯下行人影子变化趋势

你夜间走在街道上，假如距你50m远的正前方有一盏高挂10m的路灯．如图??所示，随着你距离路灯越来越近，你会发现身后的影子越来越短，当你走到路灯下发现影子不见了．也就是说，随着你越来越接近路灯，你身后影子的长度越来越趋于0．

当你走过路灯转身返回时，发现了同样的现象．也是随着你越来越接近路灯时，你身后影子的长度越来越趋于0．

事实上，不论你从哪个方向向路灯走来，随着你越来越接近路灯，你身后影子的长度都越来越趋于0．

例 1.3　研究函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$在$x=1$附近的变化趋势．

解　对$x\neq1$，可通过对分子因式分解化简为
$$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1,x\neq1,$$
因此，$f(x)$的图像是挖掉点(1,2)的直线$y=x+1$，如图 ??所示．

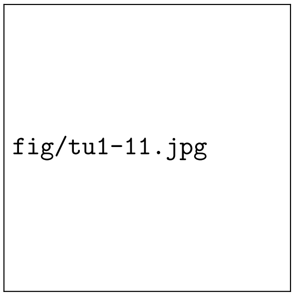

图 1.11　$y=\frac{x^2-1}{x-1}$

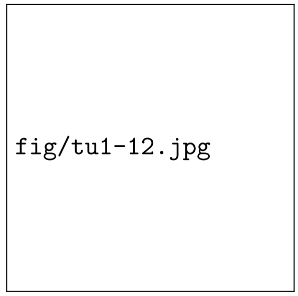

图 1.12

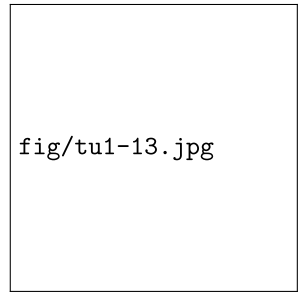

图 1.13　$y=x+1$

研究函数$f(x)$在点$x=1$的函数值，虽然$f(1)$没有定义，但可取一系列趋近1的x值，计算$f(x)$的值(表??) 观察变化趋势.

结果发现，随着x的值从左边无限趋近1，函数$f(x)$的值无限趋近2．把这个过程称为，当x的值趋近1^-时，$f(x)$ 的左极限是2．记作

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

随着x的值从右边无限趋近1时，函数$f(x)$的值无限趋近2．把这个过程称为，当x的值趋近1^+时，$f(x)$ 的右极限是2．记作

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

不难发现

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

表 1.1　计算结果

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.1	2.1	0.9	1.9
1.01	2.01	0.99	1.99
1.001	2.001	0.999	1.999
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x\to 1^+$	$f(x)\to 2$	$x\to 1^-$	$f(x)\to 2$

定义 1.2　x_0点极限的描述性定义

设$f(x)$至少在x_0点的左侧附近有定义．如果对x_0左侧充分接近x_0的x，$f(x)$能任意接近A，则称当x趋于x_0^-时，A是$f(x)$的左极限．记作$f(x_0^-)$，即

$$f(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A. \tag{1.6}$$

设$f(x)$至少在x_0点的右侧附近有定义．如果对x_0右侧充分接近x_0的x，$f(x)$能任意接近A，则称当x趋于x_0^+时，A是$f(x)$的右极限．记作$f(x_0^+)$，即

$$f(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A. \tag{1.7}$$

设$f(x)$除了可能在x_0没有定义外，在x_0的开区间有定义．如果对充分接近x_0的x，$f(x)$能任意接近A，则称A是$f(x)$的极限．当x趋于x_0时，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A. \tag{1.8}$$

根据x_0点极限描述性定义，不难得到下面结论．

定理 1.1　函数$f(x)$在x_0点存在极限的充要条件．函数$f(x)$在x_0点极限存在的充要条件是，函数$f(x)$在x_0点的左极限和右极限都存在且相等．即

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A. \tag{1.9}$$

“充分接近，任意接近”都是不确切的描述，他们的含义有赖于不同的情况．对于精加工的机械师来说，“接近”可能是在千分之几厘米之内．对于天文学家来说，“接近”可能是在几千光年之内．但这个定义足够清楚，能使我们识别和计算特定函数的极限．

从图 **??**、**??**、**??**可看出，当x趋近1时，这三个函数的极限都是2．不仅如此，图 **??**函数在$x=1$没有定义，图 **??**函数在$x=1$的定义是1，图 **??**函数在$x=1$的定义是2．尽管它们在$x=1$点的定义情况不同，但这并不影响它们在$x=1$点极限值的存在．还有对于图 **??** “极限值等于函数值”，这是一个有待于进一步关注的情况．

在定义1.2所描述的极限定义图**??**、**??**中，$x\to x_0$的方式是任意的，可以左边，也可以右边．

例 1.4　Heaviside函数H定义为

$$H(t)=\begin{cases}1, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

这个函数是以电机工程师Oliver Heaviside(1850-1925)的名字命名的，可以用来描述一个在$t=0$时刻接通的电流．如图 **??**所示．

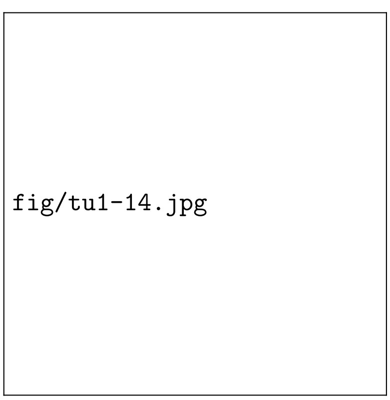

图 1.14　在0点的极限情况

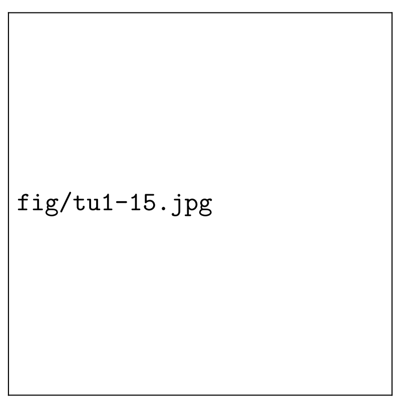

图 1.15　在0点的极限情况

当t从左边趋近于0时，$H(t)$趋近于0．即$\lim\limits_{t\to 0^-} H(t)=0$.当$t$从右边趋近于0时，$H(t)$趋近于1．即$\lim\limits_{t\to 0^+} H(t)=1$.当$t$趋近于0时，$H(t)$不趋近于一个常数，因此$\lim\limits_{t\to 0} H(t)$不存在．

例 1.5　讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0.\end{cases}$$

当$x\to 0$ 时是否有极限.

解　由图 ??可知

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

以上两例是函数在某点左、右极限都存在，而函数在该点极限不存在的例子. 函数在某点极限不存在的例子还有如下情形.

例 1.6　与无穷有关的极限.研究函数$y=\dfrac{1}{x}$在0点的极限情况.

解　由图 ??可知

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$$

左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}$，右极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}$都不存在，所函数$y=f(x)=\dfrac{1}{x}$的极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$不存在.

fig/tu1-16.jpg

图 1.16　在0点是无穷

fig/tu1-17.jpg

图 1.17　在0点振荡

例 1.7　振荡敏感函数$y=\sin\dfrac{\pi}{x}$.

解　由图 ??可知，当x趋近于0时，函数$y=\sin\dfrac{\pi}{x}$振荡，不趋于任何值.

1.2.2 极限的性质

下面只介绍$x \to x_0$时函数极限的性质，其他变化过程中的极限也有类似性质．为叙述方便先给出邻域的概念：设$x_0 \in \mathbb{R}, \forall \delta > 0$.

数集 $\{x||x-x_0|<\delta\}$表示为$U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

称为x_0的δ邻域．当不需要说明邻域半径δ时，通常是对某个确定的邻域半径δ，常将其表示为$U(x_0)$，简称x_0的邻域.

数集 $\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$表示为$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$，即

$$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta)-\{x_0\},$$

在x_0的邻域中去掉x_0，称为x_0的去心δ邻域．当不需要注明邻域半径δ时，通常是指某个确定的邻域半径δ，常将其表示为$\overset{\circ}{U}(x_0)$，简称x_0的去心邻域.

定理 1.2 极限的性质.

(1) (唯一性) 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$，则$A=B$.

(2) (有界性) 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则函数$f(x)$在$\overset{\circ}{U}(x_0)$有界.

(3) (保号性) 若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且$A>0$(或$A<0$)，则在$\overset{\circ}{U}(x_0)$有$f(x)>0$或$(f(x)<0)$.

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且在$\overset{\circ}{U}(x_0)$有$f(x)\geqslant 0$或$(f(x)\leqslant 0)$,则$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$).

(4) (两边夹) 若在$\overset{\circ}{U}(x_0)$有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),$$

且

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=A,$$

则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，且

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

§ 1.3 极限运算

1.3.1 极限四则运算

前面用列表法和图像法求解了一些极限问题，但这两种方法都有局限性．为了进一步计算函数的极限，给出极限的四则运算法则.

定理 1.3 若$\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,则

(1) $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$；

两个函数代数和的极限等于函数极限的代数和(可推广到有限多个函数).

(2) $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$；

两个函数乘积的极限等于函数极限的乘积(可推广到有限多个函数).

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

两个函数商的极限，当分母的极限不为零时，等于这两个函数极限的商.

推论 1.1　若C为常数,n为正整数,则有

(1) $\lim(Cf(x)) = C\lim f(x) = CA$；常数因子可以提到极限符号外面.

(2) $\lim(f(x))^n = (\lim f(x))^n = A^n$；函数$n$次幂的极限，等于极限的$n$ 次幂.

实际问题 1.5 产品价格预测

设一产品价格满足$P(t) = 20 - 20\mathrm{e}^{-0.5t}$，请你对该产品价格作一个长期预测.

解　对该产品销售价格作长期预测

方法之一是求$\lim\limits_{t\to\infty} P(t)$的值，如图 ??所示.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} P(t) &= \lim_{t\to\infty}(20 - 20\mathrm{e}^{-0.5t}) = \lim_{t\to\infty} 20 - \lim_{t\to\infty} 20\mathrm{e}^{-0.5t}\\ &= \lim_{t\to\infty} 20 - 20\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-0.5t} = 20 - 0 = 20.\end{aligned}$$

该产品的长期价格为20元.

实际问题 1.6 某野生鱼数量

通过诸多手段测得水中某野生鱼数量N与时间t满足关系

$$N = \frac{1\ 000}{1 + 9\mathrm{e}^{-0.115\ 8t}},$$

问该水域中最多有该种鱼数量多少？

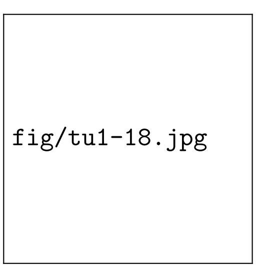

图 1.18

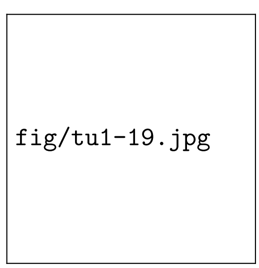

图 1.19

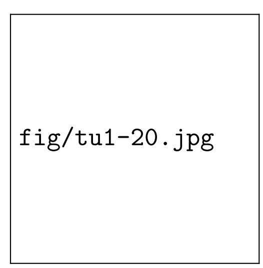

图 1.20

解　求该鱼种的数量，实质是对鱼群数量的一个长期估计. 求$\lim\limits_{t\to\infty} N(t)$即可.

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1\ 000}{1 + 9\mathrm{e}^{-0.1158t}} = \frac{1\ 000}{1 + 0} = 1\ 000.$$

该种野生鱼现存余量1 000条. 如图 ??所示.

实际问题 1.7 断路电阻的极限算法

有一10Ω电阻与一可变电阻R_1并联，电路的总电阻为$R=\frac{10R_1}{10+R_1}$，当有可变电阻R_1的支路断开时，电路的总电阻是多少?

解 当含有可变电阻R_1的支路断开时，电路的总电阻

$$R=\lim_{R_1\to\infty}\frac{10R_1}{10+R_1}=\lim_{R_1\to\infty}\frac{10}{\frac{10}{R_1}+1}=10.$$

实际问题 1.8 产品销量变化趋势

某新型产品一上市销量迅速上升，然后随时间延长，销量越来越少，其销量y与时间t的关系为$y=\dfrac{200t}{t^2+100}$，问该产品长期销售前景如何?

解 该产品长期销售量是对远期销售前景的一个预测，即求$\lim\limits_{t\to\infty}y$.

$$\lim_{t\to\infty}y=\lim_{t\to\infty}\frac{200t}{t^2+100}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{200}{t}}{1+\frac{100}{t^2}}=\frac{0}{1+0}=0,$$

随着时间的推移，人们对该产品越来越失去信心，转而去购买其它产品．看来企业要想生存下去，必须不断地开发新产品以满足人们不断增长的新需求，如图 ??所示.

实际问题 1.9 割线斜率变化趋势

设$y=\sqrt{x}$上两点$P(1,1),Q(x,\sqrt{x})$，研究割线PQ斜率的变化趋势.

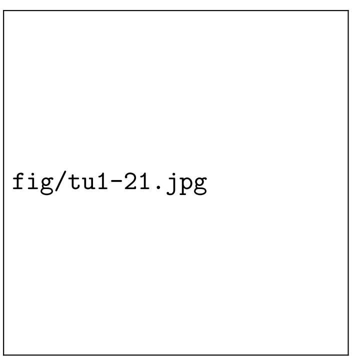

图 1.21 PQ斜率变化

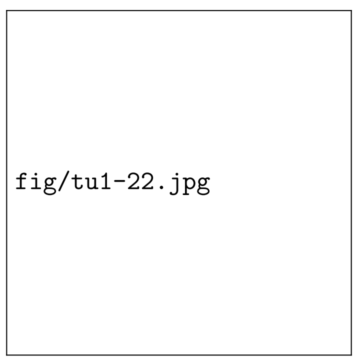

图 1.22 两边夹

解 如图 ??所示，割线PQ的斜率为

$$k=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

当x趋近于1时，Q点越来越趋近于P点，当Q点与P点重合时，割线PQ的极限位置就是曲线$y=\sqrt{x}$过点$P(1,1)$的切线.

由于$\lim\limits_{x\to1}x-1=0$，商的极限运算法则不能直接使用，可先对分子有理化，约去分子分母含有0的公因子，然后再求极限.

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2},$$

因此，可得曲线$y=\sqrt{x}$过点$P(1,1)$的切线为

$$y = \frac{1}{2}(x-1)+1.$$

用类似方法可求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}.$$

例 1.8 应用两边夹法则．求$\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}$.

解 首先注意到不能用

$$\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

因为$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$极限不存在，可参考图 **??**所示．然而，因为

$$-1 \leqslant \sin\frac{1}{x} \leqslant 1,$$

有

$$-x^2 \leqslant x^2\sin\frac{1}{x} \leqslant x^2,$$

又

$$\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0,$$

用两边夹法则，有

$$\lim_{x\to 0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0.$$

如图 **??**所示．

1.3.2 两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$

证明 因为$\dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{-\sin x}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$，所以只需讨论$x>0$时的情形即可．

作单位圆如图 **??**所示，设圆心角是$x(0<x<\frac{\pi}{2})$，过A 作切线与OP的延长线交于T．于是，$\triangle AOP$的面积<扇形AOP的面积< $\triangle AOT$的面积．即

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x,$$

同除以$\frac{1}{2}\sin x$并取它们的倒数，得

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

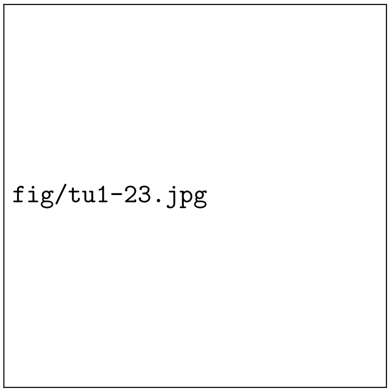

图 1.23

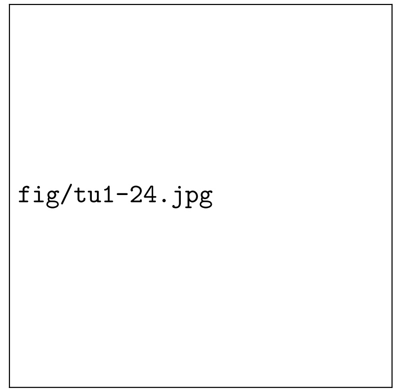

图 1.24

又因为$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，由两边夹法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

如图??所示.

这个重要极限有很多用途，下面列举几例.

例 1.9　验证圆面积公式$A=\pi r^2$.

解　易得半径为r的圆的内接正n边形面积

$$A_n=\frac{r^2}{2}n\sin\frac{2\pi}{n}(n\geqslant 3),$$

求极限得

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{r^2}{2}n\sin\frac{2\pi}{n}=r^2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\times\pi\right)=\pi r^2\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}=\pi r^2.$$

例 1.10　求极限$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

解

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\left(\frac{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}\right)=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

$$=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=\cos a.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$,　$(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e})$.

列出$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$的数值表，观察变化趋势，如表 ??所示.
由表??可以看出，当$x\to\infty$时，$(1+\frac{1}{x})^x$的值无限趋近于e. 即$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，如图??所示.

表 1.2　计算结果

x	1	5	10	100	1 000	10 000	$\cdots$
$(1+\frac{1}{x})^x$	2	2.488	2.594	2.705	2.717	2.718	$\cdots$

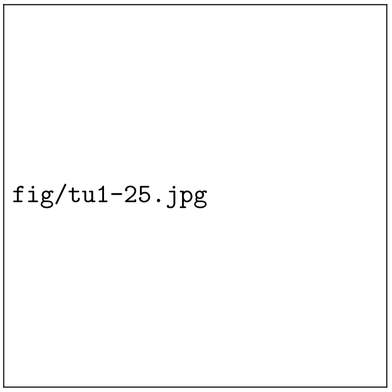

图 1.25

公式还可以写成$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

例 1.11　求极限$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$, $a>0$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}&=\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{x-a}\ln\frac{x}{a}\right)=\lim_{x\to a}\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{1}{x-a}}\\&=\lim_{x\to a}\ln\left(\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}}\right)^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}\ln\left(\lim_{x\to a}\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}}\right)\\&=\frac{1}{a}\ln\mathrm{e}=\frac{1}{a}.\end{aligned}$$

例 1.12　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln\mathrm{e}=1.$$

例 1.13　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, $a>0$.

解　设$y=a^x-1$或$x=\dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}$则$x\to 0\Leftrightarrow y\to 0$，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}&=\lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}=\ln a\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\\&=\frac{\ln a}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}}=\ln a.\end{aligned}$$

例 1.14 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}$.

解 设$y=(1+x)^a-1$或$a\ln(1+x)=\ln(1+y)$. $x\to 0\Leftrightarrow y\to 0$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a\ln(1+x)}{x}\frac{y}{\ln(1+y)}$$

$$=a\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}}{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y}}=a.$$

例 1.15 求极限$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{a^x-a^\alpha}{x-\alpha}$.

解 设$y=x-\alpha$，$x\to\alpha\Leftrightarrow y\to 0$，有

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{a^x-a^\alpha}{x-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}a^\alpha\frac{a^{x-\alpha}-1}{x-\alpha}=a^\alpha\lim_{x\to\alpha}\frac{a^{x-\alpha}-1}{x-\alpha}$$

$$=a^\alpha\lim_{y\to 0}\frac{a^y-1}{y}=a^\alpha\ln a.$$

后面有多处用到两个重要极限. 特别是将用它们推出导数的重要公式.

1.3.3 无穷小

1. 无穷小定义

在实际应用中，常会遇到以零为极限的变量. 例如，把石子投入水中，水波向四周传开，水波的振幅随时间的增加而逐渐减小并趋近于零；又如，电容器放电时，电压随时间的增加而逐渐减小并趋近于零；还有，若$f(x)=x-1$，当$x\to 1$时，$f(x)\to 0$. 对于这种变量. 给出下面定义.

定义 1.3 无穷小定义

如果$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时，函数$f(x)$的极限为0，则称$f(x)$为无穷小.

注意：

(1) 无穷小是一个以0为极限的变量，常量中除0以外，无论多小的量都不是无穷小.

(2) 无穷小与自变量的变化过程密切相关，说一个量是无穷小，必须指明自变量x的变化趋势.

例如：当$x\to 0$时，$2x$是无穷小；而当$x\to 1$时，$2x$不是无穷小.

2. 无穷小性质

定理 1.4 无穷小有如下结论：

(1) 有限个无穷小的代数和仍为无穷小；

(2) 有界变量与无穷小的乘积仍为无穷小；

(3) 常数乘无穷小仍为无穷小；

(4) 有限个无穷小的乘积仍为无穷小.

例 1.16 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

解 当$x\to 0$时，$\sin\dfrac{1}{x}$是有界变量，根据无穷小性质2可知

$$\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0.$$

如图??所示.

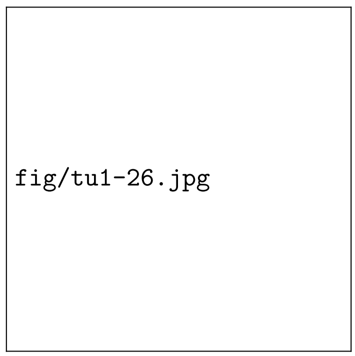

图 1.26

3. 无穷小与极限的关系

极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，表示当$x\to x_0$时，函数$f(x)$ 趋近于常数A . 显然，$f(x)$趋近于A等价于$f(x)-A$ 趋近于零. 即当$x\to x_0$时，变量$f(x)-A$是无穷小.

容易看出，无穷小与极限之间存在如下结论.

定理 1.5 函数$f(x)$以A为极限的充要条件是$f(x)$等于A与一个无穷小之和. 即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha,\quad \lim_{x\to x_0}\alpha=0.$$

4. 无穷小比较

不难知道，当$x\to 0$时，$2x\to 0$，$x^2\to 0$. 现将它们趋近于零的情况列出如表 ??所示.

表 1.3　计算结果

x	$2x$	x^2
0.1	0.2	0.01
0.01	0.02	0.000 1
0.001	0.002	0.000 001
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\to 0$	$\to 0$	$\to 0$

当$x\to 0$，虽然$2x$和x^2两个无穷小都趋近于零，但它们趋近于零的速度不同. 表 ??中的数据表明，在$x\to 0$的过程中，$x^2\to 0$比$2x\to 0$“快些”，而$2x\to 0$ 与$x\to 0$“快慢相近”.

定义 1.4 两个无穷小的关系

设α,β是同一变化过程中的两个无穷小.

(1) 如果$\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称$\alpha$是比$\beta$高阶的无穷小．记为$\alpha=o(\beta)$.

(2) 如果$\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=C$($C$不为零的常数)，则称$\alpha$与$\beta$ 是同阶无穷小．记为$\alpha=O(\beta)$.

特别地，当$C=1$时，称α与β是等价无穷小．记为$\alpha\sim\beta$.

例 1.17 当$x\to 0$时x，$3x$，x^3都是无穷小．由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to 0}x^2=0,$$

所以，当$x\to 0$时，x^3是比x高阶的无穷小；由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3,$$

所以，当$x\to 0$时，$3x$与x是同阶无穷小.

例 1.18 当$x\to\infty$时，比较无穷小$\dfrac{1}{x}$与$\dfrac{1}{x^2}$.

解 当$x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x^2}$，$\dfrac{1}{x}$都是无穷小．由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

所以，当$x\to\infty$时，$\dfrac{1}{x^2}$是比$\dfrac{1}{x}$高阶的无穷小.

例 1.19 当$x\to 0$时，比较无穷小$\dfrac{1}{1-x}-1-x$ 与x^2.

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-x}-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)(1-x)}{x^2(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}=1,$$

所以，当$x\to 0$ 时，$\dfrac{1}{1-x}-1-x$ 与x^2 是等价无穷小，即$\dfrac{1}{1-x}-1-x\sim x^2$.

定义 1.5 无穷大定义

当$x\to x_0$时(或$x\to\infty$)时，如果函数$f(x)$的绝对值无限增大，则称$f(x)$为无穷大．记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

∞不是一个数，不表示极限存在．是极限不存在的一种特殊表示.

例如，当$x\to 1$时，$\left|\dfrac{1}{x-1}\right|$无限增大，所以$\lim\limits_{x\to 1}\left|\dfrac{1}{x-1}\right|=\infty$．又如，当$x\to\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^+$时，$\tan x$取负值且绝对值无限增大，所以$\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\tan x=-\infty$.

定理 1.6 若$f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小．反之，若$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大．

例 1.20 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}$．

解 因为

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x}=0,$$

故

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\infty.$$

例 1.21 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+2}{7x^3+5x-3}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$； (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$．

解 (1) 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{7+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}\right)}=\dfrac{3-0+0}{7+0+0}=\dfrac{3}{7}$.

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}}=\dfrac{0}{2}=0$.

(3) 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=0$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}=\infty$.

一般地：当$a_0\neq 0, b_0\neq 0$ 时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & m<n;\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n;\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

定理 1.7 (等价无穷小代换定理) 如果$\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，且$\lim\dfrac{\alpha' f(x)}{\beta' g(x)}$存在，则$\lim\dfrac{\alpha f(x)}{\beta g(x)}=\lim\dfrac{\alpha' f(x)}{\beta' g(x)}$.

常用的等价无穷小量：当$x\to 0$时，有

$\sin x\sim x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim(\mathrm{e}^x-1)\sim\ln(1+x)$；

$(1-\cos x)\sim\dfrac{x^2}{2}$；$((1+x)^\mu-1)\sim\mu x$ (μ为常数,$\mu\neq 0$).

1.3.4 无穷远极限与铅直水平渐近线

1. 铅直渐近线

例 1.22　讨论极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$.

解　当x趋近于0时，x^2也趋近于0，因此，$\dfrac{1}{x^2}$会变得很大．从图 ??可以看出，$f(x)$的值可以通过使x与0充分接近而变得任意大．因此$f(x)$的值不趋向一个数，因而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$不存在．即

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty.$$

通过让x与0充分接近，可以使$\dfrac{1}{x^2}$变得任意大.

fig/tu1-27.jpg

图 1.27　铅直渐近线

fig/tu1-28.jpg

图 1.28　铅直渐近线

fig/tu1-29.jpg

图 1.29　铅直渐近线

例 1.23　讨论极限$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x-3}$.

解　如果x接近3但比3大，那么$x-3$是一个小的正数，而$2x$接近6．因此，$\dfrac{2x}{x-3}$是一个大的正数．因此，

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2x}{x-3}=+\infty.$$

同样地，如果x接近3但比3小，那么$x-3$是一个绝对值很小的负数，但$2x$仍然是一个接近6的正数．因此，$\dfrac{2x}{x-3}$是一个绝对值很大的负数．因此

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x}{x-3}=-\infty.$$

如图 ??所示，直线$x=3$是一条铅直渐近线.

例 1.24　找出$f(x)=\tan x$的铅直渐近线.

解　因为

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},$$

在$x=0$处，可能会有铅直渐近线．事实上，因为当$x\to\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^-$时，$\cos x=0^+$，当$x\to\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^+$时，$\cos x=0^-$，而当$x$在$\dfrac{\pi}{2}$附近时，$\sin x$为正，故

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty,$$

因此，$x=\dfrac{\pi}{2}$是一条铅直渐近线．同理，$x=\dfrac{(2k+1)\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$是$f(x)=\tan x$的全部铅直渐近线．如图 ??所示．

2. **水平渐近线**

铅直渐近线中讨论的是，设x趋近于一个常数，结果使y值变得任意大．下面设x趋近于无限大，看y如何变化．

例 1.25 研究$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$的水平渐近线．

解 如图 ??所示，当x无限增大时，$f(x)$的值越来越接近1．事实上

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=1,$$

这表示，当x越来越大时，$f(x)$的值越来越接近1．即$f(x)$以$y=1$为水平渐近线．

fig/tu1-30.jpg

图 1.30　水平渐近线

fig/tu1-31.jpg

图 1.31　水平渐近线

fig/tu1-32.jpg

图 1.32　水平渐近线

例 1.26 研究$f(x)=\dfrac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}$的水平渐近线．

解 如图 ??所示，当x无限增大时，$f(x)$的值越来越接近$\frac{3}{5}$．事实上

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{5+\dfrac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{3}{5}.$$

这表示，当x越来越大时，$f(x)$的值越来越接近$\dfrac{3}{5}$．即$f(x)$以$y=\frac{3}{5}$为水平渐近线．

例 1.27 研究$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$的水平渐近线．

解 如图 ??所示，当x无限增大时，$f(x)$的值越来越接近0．事实上

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{0}{\sqrt{1+0}+1}=0.\end{aligned}$$

这表示，当x越来越大时，$f(x)$的值越来越接近0．即$f(x)$以$y=0$为水平渐近线．

§ 1.4 函数连续性

流体的连续流动，气温的连续上升，压力的连续增加，植物的不断生长等都与“连续”有关．“连续”的数学定义与连续一词在实际生活中的含义非常接近．一个连续的过程是逐渐进行的过程，没有间断或者阶跃的过程．如果函数$y=f(x)$的图像可以用笔在纸上连续运动画出，则这个函数是连续函数．

连续函数是物体在空间运动的数量描述，是连续物理过程的数学表示．18世纪、19世纪人类几乎没有去寻找其他类型的运动形式．当1920年物理学家发现光进入粒子而且受热的原子以离散的频率发射光波时，人们大为惊讶，由于这些发现和其他发现以及在计算机科学、统计学和数学建模中大量应用间断函数，连续性问题则成为在实践中和理论上都有重大意义的问题之一．

1.4.1 函数连续的概念

1. 函数连续性

实际问题 1.10 邮政计价

当邮件的重量小于等于20g时邮费0.8元，当邮件的重量大于等于20g小于等于100g时每20g邮费0.8元，当邮件的重量超过100g时超过部分邮费按2元计算，且每个邮件的重量不超过200g．求邮件邮寄费用y(单位：元)与重量x(单位：g)的函数关系式．并用图表示上述函数关系．

解 考察函数

$$y=\begin{cases}0.8, & 0<x\leqslant 20;\\ 0.8\times\dfrac{x}{20}, & 20<x\leqslant 100;\\ 6, & 100<x\leqslant 200\end{cases}$$

在区间(0，200]各点的极限．结果发现，当$0<x_0<20$时，函数的极限值等于函数值，

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=0.8,\ \ 0<x_0<20.$$

当$x_0=20$时，函数的极限值等于函数值，

$$\lim_{x\to 20^-}f(x)=\lim_{x\to 20^+}f(x)=f(20)=0.8.$$

当$20<x_0\leqslant 100$时，函数的极限值等于函数值．

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=0.8\times\frac{x_0}{20},\ \ 20<x_0\leqslant 100.$$

当$100<x_0\leqslant 200$时，函数的极限值等于函数值．

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=6,\ \ 100<x_0\leqslant 200.$$

当$x_0=100$时，

$$\lim_{x\to 100^-}f(x)=f(100^-)=0.8\times\frac{100}{20}=4,$$

$$\lim_{x\to 100^+}f(x)=f(100^+)=6,$$

$$f(100^-)\neq f(100^+).$$

此时，函数的极限值不存在，当然不等于函数值．

函数图像如图??所示.

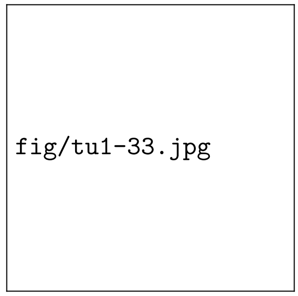

图 1.33　邮政计价

上面事实可以总结如下：已知函数$f(x)$在x_0存在极限A，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$x_0$可能属于函数$f(x)$的定义域，也可能不属于函数$f(x)$的定义域；即使$x_0$属于函数$f(x)$的定义域，$f(x_0)$也不一定等于$A$．$f(x_0) = A$有着特殊的意义．从图 ??可以看出，这时函数具有连续性.

定义 1.6　函数连续性定义

设函数$f(x)$在$U(x_0)$有定义，若函数$f(x)$在x_0存在极限，且极限等于$f(x_0)$，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{1.10}$$

则称$f(x)$在x_0连续，x_0是函数$f(x)$的连续点.

函数$f(x)$在x_0连续，不仅要求x_0要有属于$f(x)$的定义域，而且要有(??)式成立．因此，函数$f(x)$在x_0连续比函数$f(x)$ 在x_0存在极限有更高的要求.

(??)式可改写为

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0.$$

定理 1.8　设$\Delta x = x - x_0$，$\Delta y = f(x) - f(x_0)$，则$f(x)$在x_0连续当且仅当

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0. \tag{1.11}$$

这说明了连续的本质：当自变量变化微小时，函数值相应变化也很微小.

定义 1.7　左连续右连续

如果

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0), \tag{1.12}$$

则称函数$f(x)$在x_0左连续．如果

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0), \tag{1.13}$$

则称函数$f(x)$在x_0右连续.

若$f(x)$在x_0连续，则$f(x)$在x_0既右连续又左连续.

定义 1.8　区间连续定义

如果函数$f(x)$在区间I的每一点都连续，则函数$f(x)$在区间I连续.

2. 函数$f(x)$在x_0连续性检验

函数$f(x)$在x_0连续，当且仅当满足下列条件：

(1) $f(x_0)$存在(x_0在$f(x)$定义域中)；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在(当$x\to x_0$时$f(x)$有极限);

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$(极限值等于函数值).

3. 函数的间断点

由函数$y=f(x)$在x_0连续的定义可知，函数$y=f(x)$在点x_0不连续有下列三种情况之一：

(1) 函数$f(x)$在点x_0的戮域$\overset{\circ}{U}(x_0)$有定义(在x_0没有定义)；

(2) 虽然在x_0有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在；

(3) 虽然在x_0有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

则称函数$f(x)$在x_0不连续，x_0 称为函数$y=f(x)$的不连续点或间断点.

例如，函数$y=\frac{1}{x}$，在$x=0$ 没有定义，所以$x=0$是函数$y=\dfrac{1}{x}$ 的间断点.

4. 间断点分类

定义 1.9　间断点的分类

设x_0是函数$f(x)$的间断点，如果当$x\to x_0$时，左、右极限都存在，则称x_0为$f(x)$ 的第一类间断点；否则，称x_0为$f(x)$ 的第二类间断点.

第一类间断点又分为：

(1) 如果$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在且相等，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，称$x_0$ 为可去间断点；

(2) 如果$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$均存在但不相等，称$x_0$为$f(x)$ 的不可去间断点或跳跃间断点.

例 1.28　讨论函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$在$x=-1$的连续性.

解　因为函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 在$x=-1$没有定义, 所以函数$f(x)$ 在$x=-1$ 处不连续.

例 1.29　求函数$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ 的间断点，并说明类型.

解 $f(x)$在$x=0$ 有定义，但

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=-1\neq\lim_{x\to0^+}f(x)=1,$$

所以点$x=0$是函数$f(x)$ 的间断点,且为第一类间断点(不可去).

实际问题 1.11 个人所得税计算公式

个税起征点原来是2 000元，现在是3 500元，使用超额累进税率的计算方法：

缴税额＝全月应纳税所得额×税率－全月应纳税所得额速算扣除数

全月应纳税所得额＝(应发工资额－四金)－3 500元

实发工资额＝应发工资额－四金－缴税额

扣除标准：2011年9月份起，个税按3 500元/月的起征标准计算

表 1.4 工资、薪金所得适用个人所得税7级超额累进税率表

级数	全月应纳税所得额x	税率%	速算扣除数(元)
1	$x\leqslant 1\ 500$	3	0
2	$1\ 500<x\leqslant 4\ 500$	10	105
3	$4\ 500<x\leqslant 9\ 000$	20	555
4	$9\ 000<x\leqslant 35\ 000$	25	1 005
5	$35\ 000<x\leqslant 55\ 000$	30	2 755
6	$55\ 000<x\leqslant 80\ 000$	35	5 505
7	$80\ 000<x$	45	13 505

因此得，工资、薪金个人所得税计算函数

$$f(x)=\begin{cases}0.03x, & x\leqslant 1500,\\ 0.1x-105, & 1\ 500<x\leqslant 4\ 500,\\ 0.20x-555, & 4\ 500<x\leqslant 9\ 000,\\ 0.25x-1\ 005, & 9\ 000<x\leqslant 35\ 000,\\ 0.30x-2\ 755, & 35\ 000<x\leqslant 55\ 000,\\ 0.35x-5\ 505, & 55\ 000<x\leqslant 80\ 000,\\ 0.45x-13\ 505, & 80\ 000<x.\end{cases}$$

个税计算方法步骤：

①在表??列示的7级中，找到自己相对应的税率及对速算扣除数

②算出自己的应纳税额=本人月收入－个税“起征点”3 500元

③算出自己的个税=应纳税额×对应的税率－速算扣除数

例 1.30 某公司职员在扣除三险一金后的月收入为10 000元，位于上表中的第3档.

解 对应的税率为20%，速算扣除数为555，则应纳税额为

(10 000元－个税起征点3 500元)＝6 500元，

个税＝6 500×20%－555元=745元.

例 1.31 设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1.\end{cases}$ 讨论$f(x)$在$x=1$ 的连续性.

解 因为$f(1)=1$，而

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x^2=1$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(1+x)=2$$

所以$\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 不存在，则函数$f(x)$ 在$x=1$ 处不连续.

fig/tu1-34.jpg

图 1.34

fig/tu1-35.jpg

图 1.35

例 1.32 讨论函数$f(x)=\begin{cases}2x^2-x+1, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x>0\end{cases}$ 在$x=0$ 的连续性.

解 因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(2x^2-x+1)=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$

所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1=f(0)$ 由定义可知，函数$f(x)$在点$x=0$ 处连续．如图**??**所示.

1.4.2 初等函数连续性

1. 基本初等函数的连续性

基本初等函数在定义域都是连续函数(图**??**-**??**)．例如，指数函数$y=a^x(a>0,a\neq1)$ 在定义域$\mathbb{R}$是连续函数.

2. 连续函数的和、差、积、商的连续性

定理 1.9 如果函数$f(x)$和$g(x)$ 在点x_0 连续，那么它们的和、差、积、商(分母不为零)仍在

fig/tu1-36.jpg

图 1.36

fig/tu1-37.jpg

图 1.37

fig/tu1-38.jpg

图 1.38

fig/tu1-39.jpg

图 1.39

fig/tu1-40.jpg

图 1.40

fig/tu1-41.jpg

图 1.41

点x_0 连续.即

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=f(x_0)\pm g(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=f(x_0)g(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\quad (g(x_0)\neq 0).$$

3. **反函数的连续性**

定理 1.10　如果函数$y=f(x)$在某区间单值、单调增加（或减少）且连续，则它的反函数$y=f^{-1}(x)$ 也在对应的区间严格单调增加（或减少）且连续.

例如，$\sin x$ 在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 单调增加且连续，所以它的反函数$y=\arcsin x$ 在$[-1,1]$ 也是单调增加且连续．同样地，$y=\arccos x$ 在$[-1,1]$ 单调减少且连续．总之，反三角函数$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\mathrm{arccot}x$ 在它们的定义域内都是连续函数.

4. **复合函数的连续性**

定理 1.11　设函数$u=\varphi(x)$ 在点x_0连续，且$u_0=\varphi(x_0)$ ，而函数$y=f(u)$ 在u_0 连续，则复合函数$y=f(\varphi(x))$ 在x_0 也连续.

此定理表明，由连续函数复合而成的复合函数仍是连续函数．因此复合函数求极限时，极限符号“lim ”和函数记号“f”等可以交换．即

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x))=f(\varphi(\lim_{x\to x_0}x))=f(\varphi(x_0))$$

或

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u).$$

5. 初等函数的连续性

由基本初等函数，经有限次四则运算及有限次复合运算所生成的并且能用一个式子表示的函数称为初等函数．由基本初等函数的连续性，连续函数的和、差、积、商的连续性、反函数的连续性以及复合函数的连续性可得下列重要结论：一切初等函数(定义域仅是孤立点集的除外)在定义域都是连续函数．

若x_0 是初等函数定义区间内的点，由上述结论则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$．关于分段函数的连续性，除按上述结论考虑每一段函数的连续性外，要重点讨论分段点的连续性．

1.4.3 闭区间连续函数性质

闭区间连续函数的有界性定理、最值定理和介值定理．

定理 1.12 (有界性定理) 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，则函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$有界．即$\exists M>0, \forall x\in[a,b]$，有

$$|f(x)| \leqslant M. \tag{1.14}$$

如图??所示．

fig/tu1-42.jpg

图 1.42 有界性定理

fig/tu1-43.jpg

图 1.43 最值定理

定理 1.13 (最大值和最小值定理) 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，则函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$有最大值M和最小值m．即$\exists x_1,x_2\in[a,b]$，使$f(x_1)=m$与$f(x_2)=M$，且$\forall x\in[a,b]$，有$m\leqslant f(x)\leqslant M$．

一般来说，开区间连续函数可能取不到最大值或最小值．例如函数$f(x)=x$在$(0,1)$既取不到最大值也取不到最小值．

如图 ??所示，若函数$f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 连续，则函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$至少存在一点$\xi_1\in[a,b]$，使得函数值$f(\xi_1)$为最小值，即$f(\xi_1)\leqslant f(x)$．又至少存在一点，$\xi_2\in[a,b]$，使得函数值$f(\xi_2)$为最大值，即$f(x)\leqslant f(\xi_2)$．

定理 1.14 （零点定理） 若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$连续，且$f(a)f(b) < 0$(即$f(a)$与$f(b)$异号)，则至少存在一点$c \in [a,b]$，使
$$f(c) = 0.$$

定理1.14的几何意义是，$y = f(x)$在闭区间$[a,b]$是连续曲线，且连续曲线的始点$(a, f(a))$与终点$(b, f(b))$分别在x轴的两侧，则此连续曲线至少与x轴有一个交点．

定理 1.15 （介值定理） 设函数$f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 连续，m与M分别是函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$的最小值与最大值，c是m与M之间的任意数($m \leqslant c \leqslant M$)，则在闭区间$[a,b]$ 至少有一点$\xi(\xi \in [a,b])$，使得$f(\xi) = c$．如图 ??所示．

fig/tu1-44.jpg

图 1.44

fig/tu1-45.jpg

图 1.45

例 1.33 求证方程$x - \sin x - 1 = 0$ 在$[0,\pi]$至少存在一个实根ξ.

证明 设$f(x) = x - \sin x - 1$ ，显然$f(x)$ 是初等函数，因此$f(x)$ 在闭区间$[0,\pi]$连续．又$f(0) = -1 < 0$，$f(\pi) = \pi - 1 > 0$，由介值定理得，在$[0,\pi]$ 至少存在一点ξ，使得$f(\xi) = 0$，即$\xi - \sin\xi - 1 = 0, (\xi \in [0,\pi])$．这等式说明方程$x - \sin x - 1 = 0$ 在$[0,\pi]$至少存在一个实根．如图 ??所示.

实训一

一、填空题

1. 如果函数$f(x)$ 的定义域为[1，2]，则函数$f(1 - \ln x)$ 的定义域为________.
2. 函数$f(x) = \mathrm{e}^{\sin^2 x}$复合过程为________.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n+7)^3(2n+1)^2}{(5n+9)^4(n+2)} =$________.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{3^{n-1}}\right) =$________.
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} =$________.
6. 设$y = x - 2\arctan x$，则 $\lim\limits_{x\to -\infty} (y - x) =$________.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin(n!)}{\sqrt{2n^3+3n+5}}=$________.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^x=3$，则$k=$________.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+3x}=$________.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$________.

11. 函数$f(x)=\dfrac{x^3+3x+5}{x^2+x-6}$的连续区间为________.

12. 设$f(x)=\begin{cases} x+2 & , \quad x\leqslant 0, \\ \dfrac{\tan x}{x} & , \quad x>0, \end{cases}$ 则$x=0$是函数$f(x)$的第________类间断点.

13. 设$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+ax+4}{x+1}=3$，则$a=$________.

14. 当$x\to 0$时，$\sqrt[3]{1+ax}-1$与$\sin 2x$为等价无穷小，则$a=$______.

15. 设函数$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x^2)}{\sin^2 x} & , \quad x>0, \\ a+x^2 & , \quad x\leqslant 0, \end{cases}$ 则$a=$________时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续.

16. $y=\dfrac{|x-1|}{x^2-1}$，$x=1$为第________类________间断点.

17. 函数$y=f(x)$是连续奇函数，且$f(-1)=1$，则$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$________.

18. 曲线$f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$的水平渐近线为________，铅直渐近线为________.

二、选择题

1. 下列函数中为初等函数的是(　　).

(A) 绝对值函数$f(x)=|x|$；　(B) 取整函数$f(x)=[x]=n, n\leqslant x<n+1$；

(C) 符号函数$f(x)=\mathrm{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$

(D) Dirichlet函数$D(x)=\begin{cases} 1, & x\in \text{有理数}, \\ 0, & x\in\text{无理数}. \end{cases}$

2. 已知数列$\{2+(-1)^n\}$，则该数列(　　).

(A) 收敛于1；　(B) 收敛于3；　(C) 发散；　(D) 以上结论都不对.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$是$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 成立的(　　).

(A) 充分条件；　(B) 必要条件；　(C) 充分必要条件；　(D) 无关条件.

4. 下列极限错误的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\infty$；　(B) $\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$；　(C) $\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty$；　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1$.

5. 当$x\to 0^+$时，下列变量是无穷小的有(　　).

(A) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$；　(B) 2^x+3^x-1；　(C) $\ln x$；　(D) $\dfrac{\cos x}{x}$.

6. 若x 是无穷小，下面说法中错误的是(　　).

(A) x^2是无穷小；　(B) $2x$是无穷小；

(C) $x-0.000\ 01$是无穷小；　(D) $-x$是无穷小.

7. 下列等式成立的是(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=0$；　(B) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$；　(C) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=1$；　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{(n+10\ 000)}$ 的值是(　　).

(A) e；　(B) $\mathrm{e}^{10\ 000}$；　(C) $\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{10\ 000}$；　(D) 其他值.

9. 当$x\to\infty$时，$f(x)=x\sin x$是(　　).

(A) 无穷大量；　(B) 无穷小量；　(C) 无界变量；　(D) 有界变量.

10. 函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\mathrm{e}^x}{2+x}+\ln(1+x)$的间断点个数是(　　).

(A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D) 3.

11. 当$x\to 0$时，$1-\cos x$ 是$\sin^2 x$的(　　).

(A) 高阶无穷小；　(B) 同阶无穷小，但不等价；　(C) 等价无穷小；　(D) 低阶无穷小.

12. $f(x)$在$x=x_0$处有定义是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在的(　　).

(A) 充分条件；　(B) 必要条件；　(C) 充要条件；　(D) 无关条件.

13. 函数$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x\cos\dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$ 则$x=0$是$f(x)$ 的(　　).

(A) 连续点；　(B) 可去间断点；　(C) 跳跃间断点；　(D) 振荡间断点.

14. $f(x)$在$x=x_0$处极限存在是$f(x)$在$x=x_0$处连续的(　　).

(A) 充分条件但非必要条件；　(B) 必要条件但非充分条件；

(C) 充要条件；　(D) 无关条件.

三、计算题

1. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+1}{(x-1)^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\tan\dfrac{1}{x}+\dfrac{3-x-3x^2}{x^2+x}\right)$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin(\sin x))}{x}$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\ln(n+1)-\ln n)$；

(8) $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{x}+x}$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}$；

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+2}(1+2+3+\cdots+(n-1)-\frac{n^2}{2})$；

(11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$；

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$；

(13) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$；

(14) $\lim\limits_{x\to1^{-0}}\dfrac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x-1}}$；

(15) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$；

(16) $\lim\limits_{x\to0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$；

(17) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x-1}\ln(x+2)}{1+\cos x}$；

(18) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$.

2. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，求$a$.

3. 若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}+ax+b\right)=0$，试求常数$a,b$的值.

4. 设$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}, & x>0,\\ \ln(1+x), & -1<x\leqslant 0,\end{cases}$ 求$f(x)$的间断点，并说明间断点的类型.

5. 设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{1-2x^2}-1}{\cos x-1}, & x>0\\ x^2+x+a, & x\leqslant 0\end{cases}$，应当怎样选取$a$，使得$f(x)$在$x=0$处连续.

6. 若$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+a}{x-2}=b$，求常数$a,b$的值.

四、证明题

1. 证明方程$x\cdot 2^x=1$至少有一个小于1的正根.

2. 证明方程$x=a\sin x+b\ (a>0,b>0)$至少有一个正根，并且它不超过$a+b$.

五、应用题

1. 假设某种传染病流行t天后，传染的人数$N(t)$为

$$N(t)=\frac{10^6}{1+5\times10^3\mathrm{e}^{-0.1t}},$$

求(1) t为多少天时，会有50万人传染上这种疾病？

(2) 若从长远考虑，将有多少人传染上这种疾病？

2. 某种细菌的繁殖的速度在培养基充足等条件满足时，与当时已有的数量A_0成正比，即$v=kA_0\ (k>0,k$为比例常数)，问经过时间t后细菌的数量是多少？

部分实训答案

实训一

一、1. $x \in [\frac{1}{e}, 1]$； 2. $f(x) = \mathrm{e}^u, u = v^2, v = \sin x$； 3. $\frac{3^3 \cdot 2^2}{5^4}$； 4. $\frac{3}{2}$； 5. 3； 6. π； 7. 0； 8. $\ln 3$； 9. e^3； 10. $\frac{6}{5}$； 11. $(-\infty, -3), (-3, 2), (2, +\infty)$； 12. 一； 13. $a = 5$； 14. $a = 6$； 15. $a = 2$； 16. 一，跳跃； 17. -1； 18. $y = 0, x = 1$.

二、1. A； 2. C； 3. C； 4. A； 5. A； 6. C； 7. D； 8. A； 9. C； 10. B； 11. B； 12. D； 13. C； 14. B.

三、1. (1) 2； (2) ∞； (3) -2； (4) 1； (5) 1； (6) 3； (7) 1； (8) e^{-3}； (9) 3； (10) $-\frac{1}{2}$； (11) 1； (12) e； (13) $\frac{3}{2}$； (14) $+\infty$； (15) $\frac{1}{2}$； (16) 0； (17) $\frac{\ln 2}{2\mathrm{e}}$； (18) $\frac{1}{2}$. 2. $\ln 2$. 3. $a = -1, b = 1$. 4. $x = 0$为第一类跳跃间断点，$x = 1$为第二类无穷间断点. 5. $a = \frac{4}{3}$. 6. $a = 2, b = 1$.

五、1. 约90天，1000000人. 2. $\lim\limits_{n\to\infty} A_0(1 + \frac{kt}{n})^n = A_0\mathrm{e}^{kt}$.

实训二

一、1. $-2f'(x_0)$； 2. $\frac{1}{2}$； 3. $\mathrm{e}x^{\mathrm{e}-1}+\mathrm{e}^x$； 4. $f'(0)$； 5. $\frac{2x}{(1+x^2)\ln 10}$； 6. π^2； 7. $y = 5x-7$； 8. $x = 1$,$y = 1$； 9. 0； 10. $\frac{4!}{2(x+1)^5}$； 11. $(2\ln a)^n a^{2x}$； 12. $3^n \cos(3x + n \cdot \frac{\pi}{2})$； 13. 1； 14. $\mathrm{e}^{x+f(x)} f'(\mathrm{e}^x)+\mathrm{e}^{f(x)} f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}$； 15. $2\mathrm{e}^2\mathrm{d}x$； 16. $\frac{2}{(2-x)^3}$； 17. $y = \frac{\pi}{2}(x+1)$； 18. $y = -4x+2$； 19. $1, -1$.

二、1. A； 2. C； 3. C； 4. C； 5. D； 6. C； 7. D； 8. D； 9. C； 10. B； 11. C； 12. D； 13. A； 14. C； 15. A.

三、1. (1) $y' = -\frac{28}{x^5} + \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - \frac{2\mathrm{e}^x}{x^3}$； (2) $y' = a^a x^{a^a-1} + x^{a-1} a^{x^a+1} \ln a + a^{a^x+x} \ln^2 a$； (3) $y' = \arctan x$； (4) $y' = \frac{x\cos\ln 2x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{1+x^2}\sin\ln 2x}{x}$； (5) $y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$； (6) $y' = -\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$； (7) $y' = \cos f(\sin x) \cdot f'(\sin x)\cos x$； (8) $y' = \frac{2}{x\ln x\ln\ln x}$； (9)

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}\right)$； (10) $y' = \dfrac{1}{5}\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}\left(\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{2x}{5x^2+10}\right)$； (11) $y' = a^{\arctan x^2}\cdot\dfrac{2x\ln a}{1+x^4}+x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$； (12) $y' = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b\left(\ln\dfrac{a}{b}-\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x}\right)$；
(13) $y' = x^{x^x+x}\left(\ln^2 x+\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$.

2. $e^{2t}(1+2t)$. 3. 207360. 4. $(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\dfrac{1}{(x-2)^n}-\dfrac{1}{(x-1)^n}\right)$. 5. $k=1, p_0(-1,-1)$或$k=5, p_0(1,5)$. 6. $y-1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x+1)$. 7.$y' = \dfrac{2\sqrt{1+y}(2\cos 2x+y^2\sin x)}{4y\sqrt{1+y}\cos x-1}$.
8. -2. 9. $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$. 10. $y=-2x+1$. 11. $\dfrac{dy}{dx}=-t, \dfrac{d^2y}{dx^2}=\csc t$. 12. 当$\Delta x=1$时，$\Delta y=18, dy=11$;当$\Delta x=0.1$时，$\Delta y=1.161, dy=1.1$;当$\Delta x=0.01$时，$\Delta y=0.110601, dy=0.11$. 13. $dy=\dfrac{x+y}{x-y}dx$； 14.$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^y}{2-y}$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(3-y)e^{2y}}{(2-y)^3}$.

五、 1. $\dfrac{ds}{dt}|_{t=2}=144\pi\ m^2/s$. 2. 0.64 cm/min. 3. 27.318 cm/min. 4. 11 m/sec.

实训三

一、 1. $(\ln(e-1), e-1)$； 2. $\sqrt{2}$； 3. $-1, 1$； 4. $(0,2], [2,+\infty)$； 5. $x=2, (2,1)$； 6. $[1,+\infty), [0,1], (1,\ln 2)$； 7. 2； 8. 0； 9. e^4； 10. $y=x$.

二、 1. C； 2. A； 3. A； 4.D ； 5.C ； 6.D ； 7.B ； 8.A ； 9.B .

三、 1. $a=2$,极大值$y=\sqrt{3}$； 2. 极大值$f(2)=2$,极小值$f(10)=-2$； 3. 单调递增区间：$(0,1]$及$[e^2,+\infty)$,单调递减区间：$[1,e^2]$,极小值$y|_{x=1}=0$;极大值$y|_{x=e^2}=\dfrac{4}{e^2}$.

4. 单调递增区间：$(-\infty,1]$及$[3,+\infty)$,单调递减区间：$[1,3]$，下凹区间：$[2,+\infty)$，上凸区间：$(-\infty,2]$，极小值$y|_{x=3}=-5$;极大值$y|_{x=1}=-1$，拐点：$(2,-3)$. 5. 最大值$y=5$，最小值$y=-\dfrac{5}{4}$. 6. $\sqrt[3]{3}$. 7. (1) $\dfrac{m}{n}a^{m-n}$； (2) 1； (3) 1； (4) $\dfrac{1}{3}$； (5) $\sec^2 2$； (6) 1； (7) $e^{-\frac{2}{\pi}}$； (8) $\dfrac{1}{2}$.

8. 铅直渐近线：$x=-1$，斜渐近线：$y=x-1$. 9. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\ln 2}{2}\right), R=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. 10. $(x+4)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{125}{4}$. 五、 1. 底边约为$4.2m$，高约为$2.1m$. 2. 7500台. 3. $v=3$. 4. $\dfrac{a\pi}{4+\pi}, \dfrac{4a}{4+\pi}$

实训四

一、1.$e^{-x}-4\cos 2x)$； 2. $-\dfrac{x}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}$； 3. $\dfrac{\sin x}{x}dx$，$\dfrac{\sin x}{x}+C$； 4. $\tan x+\sec x+C$； 5. $\cos x-\sin x+C$ ； 6.$\ln|x+\sin x|+C$ ； 7.$\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C$ ； 8.$x^2+\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{3}x^6+C$ ； 9.$\arctan\ln x+C$

; 10.$\frac{1}{4}f^2(x^2)+C$.

二、 1. C ; 2.D ; 3.C ; 4.A ; 5.D ; 6.B ; 7.C ; 8.A ; 9.A ; 10.A ; 11.B ; 12.D .

三、 1. (1) $\frac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}+C$； (2) $\sqrt{\frac{2h}{g}}+C$； (3) $\frac{3^{1-x}}{\ln 3}-\frac{2^{1-x}}{\ln 2}+C$； (4) $2\mathrm{e}^t-2\sqrt{t}+C$； (5) $\frac{2}{3}x^3+\arctan x+C$； (6) $x^{\frac{3}{4}}+\frac{8}{5}x^{\frac{5}{4}}+\frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}}+C$； (7) $\frac{1}{2}(x-\sin x)+C$； (8) $\tan x-\cot x+C$； (9) $-\frac{1}{x}-\arctan x+C$； (10) $3\tan x-x+C$.

2. (1) $-\frac{1}{2}\cos 2x-3\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}+C$； (2) $\frac{1}{200}(2x+3)^{100}+C$； (3) $\arcsin\frac{x}{3}+\sqrt{9-x^2}+C$； (4) $-\sin\mathrm{e}^{-x}+C$； (5) $\frac{3}{8}(2x^2+1)^{\frac{2}{3}}+C$； (6) $-\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3x^3+5}+C$； (7) $-2\ln|\cos\sqrt{x}|+C$； (8) $-4\sqrt{1-\sqrt{x}}+C$； (9) $\frac{1}{2}\ln|\ln^2 x-1|+C$； (10) $-\frac{1}{2}\cot(x^2+1)+C$； (11) $\ln(\mathrm{e}^x+1)+C$； (12) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right|+C$； (13) $\frac{1}{7}\sec^7 x-\frac{2}{5}\sec^5 x+\frac{1}{3}\sec^3 x+C$； (14) $\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$； (15) $\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|+C$； (16) $\frac{1}{2}\ln|x^2+3x+2|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C$； (17) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$； (18) $\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C$.

3. $\cos x-\frac{2\sin x}{x}+C$. 4. $-x^2-\ln|1-x|+C$.

5. (1) $\sqrt{2x+1}-\ln(1+\sqrt{2x+1})+C$； (2) $6(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x})+C$； (3) $4(\sqrt[4]{x}-\arctan\sqrt[4]{x})+C$； (4) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}+1}\right|+C$； (5) $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$； (6) $\frac{a^2}{2}(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2})+C$； (7) $-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3}+C$； (8) $\frac{1}{408}(2x+1)^{102}-\frac{1}{404}(2x+1)^{101}+C$.

6. (1) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$； (2) $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$； (3) $-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C$； (4) $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\sin x-\frac{1}{2}\cos x+C$； (5) $3\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C$； (6) $\frac{1}{2}x(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$； (7) $x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{1}{2}x^2+C$； (8) $\ln x\ln\ln x-\ln x+C$.

四、 1. $y=\ln x+1$. 2. $y=x^3+\frac{2}{3}x-2$. 3. $Q(x)=\sqrt{0.01x+1}-1$. 4. 1.

实训五

一、 1. $0,\frac{1}{2}\pi$； 2. $0.f(x)$； 3. 0； 4. $>,<$； 5. $2x\mathrm{e}^{-x^4}$； 6. $\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$； 7. $\frac{1}{2}$； 8. $\frac{1}{3}$； 9. $\frac{17}{6}$； 10. 0； 11. 0； 12. $\frac{4}{15}$； 13. $\frac{1}{\pi}$； 14. 1.

二、 1. A； 2. A； 3. A； 4. B； 5. B； 6. B； 7. C； 8. B；

9. D； 10. B； 11. C； 12. C； 13. D； 14. B； 15. D； 16. A.

三、 1. (1) -1； (2) $\frac{1}{101}$； (3) $\frac{\pi}{2}$； (4) 2； (5) 1； (6) $\frac{5}{3}$； (7) $2\sqrt{2}$； (8) $4\sqrt{2}$； (9) $(\sqrt{3}-1)a$； (10) $6\left(1+\frac{\pi}{4}-\arctan 2\right)$； (11) $2\left(1-\frac{1}{e}\right)$； (12) $4(2\ln 2-1)$； (13) $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}$；

(14) $\frac{17}{6}$. 2. $\frac{\ln x\sin^2\ln x}{x}-4x\sin^2 2x$. 3. $x=0$, 极小值$f(0)=0$. 4. $\frac{\cos x}{\sin x-1}$. 5. (1) $-\frac{1}{3}$; (2) $\frac{1}{4}\ln\frac{a}{b}$. 6. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)+\frac{\pi}{12}$. 7. $\frac{7}{3}-\frac{1}{\mathrm{e}}$. 8. $3x^2-\frac{2}{3}x$. 9.最大值$f(1)=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}+\arctan 2-\frac{\pi}{4}$最小值$f(0)=0$. 10. (1) $\frac{1}{2}$; (2) π; (3) $\frac{\pi}{4}$; (4) $2\sqrt{\ln 2}$; (5) 发散; (6) $\arcsin 1$.

五、 1. $\frac{3}{2}-\ln 2$. 2. $3-\frac{11}{6}$. 3. 4. 4. $2\pi+\frac{4}{3}, 6\pi-\frac{4}{3}$. 5. $\frac{16}{3}$. 6. $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$. 7. $\frac{1}{3}, \frac{3}{10}\pi$. 8. $\mathrm{e}^2+1, \frac{\pi}{2}(3\mathrm{e}^4+1)$. 9. $160\pi^2$. 10. $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1)$. 11. $6a$. 12. $2.45\pi R^4$ (J).

实训六

一、 1. $y=\mathrm{e}^{-x}+C$; 2. $y=2-2\mathrm{e}^x$; 3. $2\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^{2x}+1$; 4. $\frac{1}{1+x^2}(x+C)$; 5. $y''-3y'+2y=0$; 6. $(1-2y)y'=2\sqrt{y-y^2}$; 7. $\cos x-\mathrm{e}^{-x}+C_1x^2+C_2x+C_3$; 8. $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-1$; 9. $3\mathrm{e}-2x+\mathrm{e}^x$; 10. $C_1x+C_2x^2-C_1-C_2+1$.

二、 1. D; 2. C; 3. C; 4. A; 5. D; 6. B; 7. C; 8. C; 9. C; 10. C; 11. B; 12. C; 13. D; 14. C; 15. B.

三、 1. (1) $y=\mathrm{e}^{Cx}$; (2) $10^x+10^{-y}=C$; (3) $\sin x\cos y=C$; (4) $\ln y=\tan\frac{x}{2}$; (5) $(1+\mathrm{e}^x)\sec y=2\sqrt{2}$.

2. (1) $\ln\frac{y}{x}=Cx+1$; (2) $y^2=x^2(2\ln|x|+C)$; (3) $y^2=2x^2(\ln x+2)$.

3. (1) $y=\mathrm{e}^x-\frac{\mathrm{e}^x}{x}+C$; (2) $y=\mathrm{e}^{-\sin}(x+C)$; (3) $y=(x+1)^2\left(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right)$; (4) $x=\mathrm{e}^{-y}(y^2+C)$; (5) $\frac{3}{2}x^2+\ln\left|1+\frac{3}{y}\right|=C$; (6) $y=\frac{1}{\ln x+Cx+1}$.

4. $f(x)=-2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}+2$.

5. (1) $C_1y^2-1=(C_1x+C_2)^2$; (2) $y=C_1\ln|x|+C_2$; (3) $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{4x}$; (4) $y=C_1\mathrm{e}^{-5x}+C_2\mathrm{e}^x$; (5) $y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{2}(x^2+2x)\mathrm{e}^{2x}$; (6) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$.

6. (1) $y=\sqrt{2x-x^2}$; (2) $y=\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})-\ln 2$; (3) $y=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$; (4) $y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x(x^2-x)$.

四、 1. 30分. 2. $t=-0.305h^{\frac{5}{2}}+9.64, 10s$. 3. $y=\frac{1000\times 3^{\frac{t}{3}}}{9+3^{\frac{t}{3}}}$. 4. $x=\frac{ax_0\mathrm{e}^{at}}{a-bx_0+bx_0\mathrm{e}^{at}}$. 5 $t=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln(2\sqrt{6})s$

实训七

一、 1. 0或8; 2. $\{x_0-x, y_0-y, z_0-z\}$, $\{x,y,z\}$; 3. $-4, 8j$; 4. $-\frac{2}{5}$; 5. $\pm\frac{1}{3}\{2,-2,1\}$; 6. $\frac{\pi}{6}$; 7. $\pm\frac{3}{2}$; 8. $3, i-7j-5k$; 9. $\frac{1}{2}$; 10. 2; 11. $3\sqrt{6}$; 12. $(1,-2), \sqrt{5}$; 13. $y^2+z^2=3x$;

14. $2x-3y+5z=11$； 15. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{5}$； 16. $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$； 17. $\dfrac{\sqrt{11}}{11}$； 18. $\left(-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

二、 1. B； 2. A； 3. A； 4. C； 5. C； 6. D； 7. C； 8. B； 9. B； 10. C； 11. C； 12. B； 13. B； 14. B； 15. C； 16. D.

三、 1. (1) $(a,b,-c),(-a,b,c),(a,-b,c)$； (2) $(a,-b,-c),(-a,b,-c),(-a,-b,c)$； (3) $(-a,-b,-c)$.

2. $|\overrightarrow{M_1M_2}|=2;\cos\alpha=-\dfrac{1}{2},\cos\beta=\dfrac{1}{2},\cos\gamma=-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\alpha=\dfrac{2\pi}{3},\beta=\dfrac{\pi}{3},\gamma=\dfrac{3\pi}{4}$. 3. $|a+b|=|a-b|=17$. 4. $5x-14y-11z+1=0$. 5. $x-3z+2=0$. 6. $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$或$\begin{cases} x=1,\\ y+2z=8.\end{cases}$ 7. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-4}{-1}$. 8. $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-7}{7}=\dfrac{z-17}{19}$, $\begin{cases} x=-t,\\ y=7t+7,\\ z=19t+17.\end{cases}$

9. $\begin{cases} y-z-1=0,\\ x+y+z=0\end{cases}$. 10. $\varphi=0$. 11. $2x-y+z=7$. 12. $(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=9$或$x^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9$. 13. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. 14. (1) xoy面； (2) 平面； (3) 在$y=x$面上的椭圆； (4) 直线； (5) 圆柱面； (6) 两条平行于z轴的直线； (7) 双曲抛物面； (8) 旋转抛物面； (9) 下半锥面； (10) 一条平行于z轴的直线； (11) 圆； (12) 双曲抛物面； (13) 椭球面； (14) 双叶双曲面； (15) 单叶双曲面.

15. $3y^2-z^2=16;3x^2+2z^2=16$. 16. $\begin{cases} x^2+y^2=2x,\\ z=0\end{cases}$. 17. $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{1}{4},\\ z=0\end{cases}$

五 、1. 5880 J. 2. (1)$x^2+y^2+z^2=6370^2$; $\dfrac{x^2}{6378^2}+\dfrac{y^2}{6378^2}+\dfrac{z^2}{6357^2}=1$. 3. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{6383^2}+\dfrac{y^2}{6383^2}+\dfrac{z^2}{6362^2}=1,\\ z=0.\end{cases}$

实训八

一、1. $\mathscr{D}=\{(x,y)|2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4,y^2<x\}$； 2. $1,0,\sin 1$； 3. $(0,0),y=2x^2$； 4. $2\cos 2y$； 5. $\mathrm{e}^{y(x^2+y^2)}[2xy\mathrm{d}x+(x^2+3y^2)\mathrm{d}y]$； 6. $\dfrac{1}{3x-2y+z}(3\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$； 7. $2\mathrm{e}^2+4,\mathrm{e}^2+1$； 8. $\dfrac{z-4y}{6z-y}$； 9. $-\sin 2t+3t^2\cos t^3$； 10. $\mathrm{d}x$； 11. $\left(-\dfrac{\sqrt[3]{18}}{3},\sqrt[3]{18},-\sqrt[3]{18}\right)$； 12. $4i-2j$； 13. $f(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3})=\dfrac{1}{27}$,大； 14. -5.

二、 1. D； 2. B； 3. D； 4. B； 5. D； 6. D； 7. A； 8. D； 9. A； 10. A.

三、 1. (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-4y^2,\dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8xy$； (2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2\sin y-y\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{y},\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3\cos y-\mathrm{e}^x-\dfrac{x}{y^2}$； (3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{xy}(y\sin(x+y)+\cos(x+y)),\dfrac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{xy}([x\sin(x+y)+\cos(x+y))$； (4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$

$y^2(1+xy)^{y-1}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left(\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}\right)$；　(5) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}, \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x^{\frac{y}{z}}\ln x}{z}, \dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{yx^{\frac{y}{z}}\ln x}{z^2}$；　(6) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}, \dfrac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x, \dfrac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z}y^z\ln x\ln y$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial x}=2xzf_1', \dfrac{\partial w}{\partial y}=f_1'+2yzf_2', \dfrac{\partial w}{\partial z}=x^2f_1'+y^2f_2'$.

4. $\dfrac{\pi}{4}$.　5. $6xy^2, 6x^2y-6y-1, 6y^2$.　6. $2,2,0$.　7. $\Delta z=-0.204, \mathrm{d}z=-0.2$.

8. (1) $\mathrm{d}z=\cos\dfrac{x}{y}\left(\dfrac{1}{y}\mathrm{d}x-\dfrac{x}{y^2}\mathrm{d}y\right)$；　(2) $\mathrm{d}z=2\mathrm{e}^{x^2+y^2}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$；　(3) $\mathrm{d}z=y^2x^{y-1}\mathrm{d}x+x^y(1+y\ln x)\mathrm{d}y$；　(4) $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{xy}\left(y\ln z\mathrm{d}x+x\ln z\mathrm{d}y+\dfrac{1}{z}\mathrm{d}z\right)$.

9. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2(\mathrm{e}^{2(x+y)}+1)}{\mathrm{e}^{2(x+y)}+2x+y}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2\mathrm{e}^{2(x+y)}+1}{\mathrm{e}^{2(x+y)}+2x+y}$.

10. $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=(\sin t)^{\cos t-1}\cos^2 t-(\sin t)^{\cos t+1}\ln\sin t$.

11. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\sin(x^2+y^2)+2x^2\cos(x^2+y^2)+4x\mathrm{e}^{x^2+y^2}(1+x^2), \dfrac{\partial z}{\partial y}=2xy\cos(x^2+y^2)+4x^2y\mathrm{e}^{x^2+y^2}$.

12. $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^x(1+x)}{1+x^2\mathrm{e}^{2x}}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1+\ln y}{1+y^2\ln^2 y}$.　13. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz}{\mathrm{e}^z-xy}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xz}{\mathrm{e}^z-xy}$.

14. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2,-1)}=-\dfrac{1}{5}, \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2,-1)}=-\dfrac{11}{5}$.　15. $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x+\sqrt{2}\mathrm{d}y$.

16. $\mathrm{d}z=\dfrac{z+x\ln y}{x(1-\ln x)}\mathrm{d}x+\dfrac{x}{y(1-\ln x)}\mathrm{d}y$.　17. $5i+2j+12k, \left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$.

18.切线方程：$\dfrac{x-\frac{\pi}{2}+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$，法平面方程：$x+y+\sqrt{2}z=\dfrac{\pi}{2}+4$.

19.$M_1(-1,1,-1)$及$M_2\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27}\right)$.

20. $4x+2y-z=6, \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{x-4}{-1}$.　21. $x-y-z=3$.　22. 极大值$f(0,0)=0$.

23. 极大值$f(-3,2)=31$，极小值$f(1,0)=-6$.

五、1. 长宽均为$2m$,高为$1m$时，用料最省.

2. $x=1.1$(元)，$y=1.15$(元)时利润最大.　3. 12张磁盘，10盒磁带.　4. $x=y=z=\dfrac{1}{6}$.

实训九

一、1. 2π；　2. $\dfrac{2\pi}{3}$；　3. $\dfrac{2}{3}\leqslant I\leqslant 21$；　4. $>$；　5. 2；　6. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$；　7. $\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-x}^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$　8. $\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-1})$；　9. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sec\theta}f(r^2)r\mathrm{d}r$；　10. $\dfrac{\pi a^4}{2}$；　11. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$；　12. $12a$；　13. 0；　14. x^2+C.

二、1. B；　2. C；　3. D；　4. D；　5. B；　6. D；　7. C；　8. C.

三、1. A. 2. (1) $\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y,\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}}f(x,y)\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^4\mathrm{d}x\int_x^{2\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y,\int_0^4\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2}}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x$ 3. (1) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$, (2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$. 4. (1) $\pi(1-\mathrm{e}^{-a^2})$； (2) $\frac{4}{3}\pi$. 5. (1) $\frac{27}{64}$； (2) $1-\sin 1$； (3) $\frac{\pi}{2}(2\ln 2-1)$； (4) $\frac{3\pi^2}{64}$. 6. 18π. 7. $\frac{5\pi}{6}$. 8. 4. 9. $(\mathrm{e}-1)\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathrm{e}+1)\right)$. 10. (1) $\frac{17}{30}$； (2) $-\frac{1}{2}$. 11. πa^2. 12. (1) $\frac{1}{30}$； (2) $\frac{\pi m a^2}{8}$； 13 $9\cos 2+4\cos 3$. 14. $\frac{3\pi a^5}{8}$. 15. $\frac{1}{3}$. 16. $\frac{2\pi R^7}{105}$.

五、1. $\frac{2}{3}\pi\rho R^2$. 2. $\left(\frac{3}{10},\frac{3}{2}\right)$. 3. $\frac{21}{2}$. 4. $\sqrt{2}\pi$

参考文献

[1] 刘玉琏，傅沛仁．数学分析讲义(上)．北京：高等教育出版社．2000

[2] 刘玉琏，傅沛仁．数学分析讲义(下)．北京：高等教育出版社．2000

[3] Frank R. Giordano,George B. Thomas，Joel R．Hass，Maurice D．Weir．托马斯微积分．叶其孝，王耀东，唐兢译．北京：高等教育出版社．2003

[4] James Stewart．微积分(上)．白峰杉，译．北京：高等教育出版社．2004

[5] James Stewart．微积分(下)．白峰杉，译．北京：高等教育出版社．2004

[6] 同济大学．高等数学．北京：高等教育出版社．2004

[7] 吕同富．经济数学及应用．北京：中国人民大学出版社．2011

[8] 吕同富，康兆敏，方秀男．数值计算方法．北京：清华大学出版社．2008