Bahnen geladener Teilchen in einem Zyklotron unter zeitabhängigem Magnetfeld

Yimu Mao (Grammtik korrigiert mit Chat-GPT)

6.12.2025

1. Physikalische Grundlagen

Wir betrachten ein geladenes Teilchen (z.B. Proton oder Deuteron) mit der Ladung q und der Masse m, das sich in einem räumlich homogenen, zeitabhängigen Magnetfeld

$$\mathbf{B}(t) = B(t)\,\hat{\mathbf{z}}$$

bewegt. Durch das zeitabhängige Magnetfeld entsteht gemäß Faradays Gesetz ein Induktionsfeld.

Wir verwenden polare Koordinaten (r, φ) in der Ebene $z = 0$. Die Geschwindigkeit des Teilchens ist

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\varphi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}.$$

2. Induktionsfeld

Nach Faradays Gesetz gilt:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \quad \Phi_B = \pi r^2 B(t),$$

woraus sich das tangentiale elektrische Feld ergibt:

$$\boxed{E_\varphi(r,t) = -\frac{r}{2}\,\dot{B}(t).}$$

3. Polare Bewegungsgleichungen

Die Lorentzkraft auf das Teilchen lautet:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

In Polarkoordinaten ergeben sich:

$$\text{Radial:} \quad m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -qBr\dot{\varphi}, \tag{1}$$

$$\text{Tangential:} \quad m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = q\Big(-\frac{r}{2}\dot{B} + B\dot{r}\Big) \tag{2}$$

4. Erhaltung des Drehimpulses

Mit der symmetrischen Eichung

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B}(t) \times \mathbf{r}, \quad A_\varphi = \frac{1}{2}rB(t),$$

ist der kanonische Drehimpuls

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} + qrA_\varphi = mr^2\dot{\varphi} + \frac{q}{2}r^2B(t)$$

erhaltend, d.h.

$$\boxed{mr^2\dot{\varphi} + \frac{q}{2}r^2B(t) = \text{konstant} \equiv C}.$$

5. Winkelgeschwindigkeit und Bahngeschwindigkeit

Für eine nahezu konstante Kreisbahn ($\dot{r} \approx 0$) gilt:

Nicht-relativistisch:

$$\dot{\varphi} = \frac{qB}{m}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} = r\frac{qB}{m}.$$

Hinweis: Diese Näherung ist nur für niedrige Geschwindigkeiten ($v \ll c$) gültig.

Relativistisch:

$$\dot{\varphi} = \frac{qB}{\gamma m}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} = \frac{qBr}{\gamma m}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

6. Fazit: Einflussfaktoren auf die Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit eines geladenen Teilchens in einem Zyklotron wird durch mehrere Faktoren beeinflusst:

- **Magnetfeldstärke** B: Je stärker das Magnetfeld, desto größer die Lorentz-Kraft und damit die Winkel- und Bahngeschwindigkeit.
- **Teilchenladung** q: Eine größere Ladung führt bei gleichem Magnetfeld zu höherer Geschwindigkeit.
- **Teilchenmasse** m: Schwerere Teilchen bewegen sich langsamer unter gleichen Bedingungen.
- **Relativistische Effekte** γ: Bei hohen Geschwindigkeiten ($v \sim c$) reduziert der Lorentz-Faktor γ die Winkel- und Bahngeschwindigkeit.
- **Bahnradius** r: Die lineare Geschwindigkeit ist $v_\varphi = r\dot{\varphi}$ und hängt daher proportional vom Radius ab.
- **Zeitliche Veränderung des Magnetfelds** $\dot{B}(t)$: Durch das induzierte elektrische Feld $E_\varphi = -\frac{r}{2}\dot{B}$ kann die Geschwindigkeit zusätzlich verändert werden, insbesondere während der Beschleunigungsphase.