Bahnen geladener Teilchen in einem Zyklotron mit konstantem Magnetfeld

Yimu Mao (überarbeitet mit Chat-GPT)

10.12.2025

1. Physikalische Grundlagen

Wir betrachten ein geladenes Teilchen (z.B. Proton oder Deuteron) mit der Ladung q und der Ruhemasse m_0, das sich in einem homogenen, zeitlich konstanten Magnetfeld

$$\mathbf{B} = B\,\hat{\mathbf{z}}$$

bewegt. Die Geschwindigkeit des Teilchens in der Ebene $z = 0$ wird in Polarkoordinaten (r, φ) beschrieben:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\varphi}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}.$$

Die Bewegung wird durch die Lorentzkraft bestimmt:

$$\frac{d}{dt}(\gamma m_0 \mathbf{v}) = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

mit relativistischem Lorentz-Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad v = |\mathbf{v}|.$$

2. Polare Bewegungsgleichungen

In Polarkoordinaten ergeben sich die Bewegungsgleichungen:

$$\text{Radial:} \quad \gamma m_0(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = 0, \tag{1}$$

$$\text{Tangential:} \quad \gamma m_0(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0 \tag{2}$$

Für eine nahezu konstante Kreisbahn ($\dot{r} \approx 0$) reduziert sich die Gleichung auf:

$$\gamma m_0 r\dot{\varphi}^2 = qBr\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{qB}{\gamma m_0}.$$

Die lineare Bahngeschwindigkeit ist:

$$v_\varphi = r\dot{\varphi} = \frac{qBr}{\gamma m_0}.$$

3. Explizite Trajektoriengleichung

Idealfall (konstante Kreisbahn):

$$r(t) = r_0, \quad \varphi(t) = \dot{\varphi}\,t + \varphi_0$$

Kartesische Koordinaten:

$$x(t) = r_0\cos(\dot{\varphi}\,t + \varphi_0), \quad y(t) = r_0\sin(\dot{\varphi}\,t + \varphi_0)$$

mit

$$\dot{\varphi} = \frac{qB}{\gamma m_0}, \quad v_\varphi = r_0\dot{\varphi}$$

Allgemeiner Fall (mit radialer Bewegung $\dot{r} \neq 0$):

$$\gamma m_0(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = 0, \quad \gamma m_0(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Bahn nicht exakt kreisförmig ist, und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ leicht variieren kann, wenn $\dot{r} \neq 0$ (Winkelimpuls nicht exakt konserviert).

4. Einflussfaktoren auf die Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit eines geladenen Teilchens im Zyklotron hängt von mehreren Faktoren ab:

- **Magnetfeldstärke** B: Höheres B erhöht die Lorentz-Kraft, daher größere Winkel- und Bahngeschwindigkeit.
- **Teilchenladung** q: Größere Ladung erhöht die Geschwindigkeit.
- **Teilchenmasse** m_0: Schwerere Teilchen bewegen sich langsamer bei gleichem Magnetfeld.
- **Relativistische Effekte** γ: Bei hohen Geschwindigkeiten ($v \sim c$) vergrößert γ die effektive Masse, wodurch Winkel- und Bahngeschwindigkeit reduziert werden.
- **Bahnradius** r: Lineare Geschwindigkeit $v_\varphi = r\dot{\varphi}$ steigt mit Radius.
- **Radiale Geschwindigkeit** $\dot{r}$: Wenn die Bahn nicht exakt kreisförmig ist, beeinflusst $\dot{r}$ die Winkelgeschwindigkeit und damit die Gesamtlaufgeschwindigkeit.

5. Zusammenfassung

- Für niedrige Geschwindigkeiten ($v \ll c$) gilt klassisch:

  $$\dot{\varphi} = \frac{qB}{m_0}, \quad v_\varphi = r\frac{qB}{m_0}.$$

- Für relativistische Geschwindigkeiten:

  $$\dot{\varphi} = \frac{qB}{\gamma m_0}, \quad v_\varphi = \frac{qBr}{\gamma m_0}.$$

- Die allgemeine Trajektorie wird durch die Gleichungen mit $\ddot{r}$ und $\ddot{\varphi}$ bestimmt; Abweichungen von der Kreisbahn führen zu Variation von $\dot{\varphi}$.