# מבוא למערכות לומדות (67577) | תרגיל 1 חלק תאורטי

שם: נמרוד בר גיורא | ת"ז: 207090622

## 1 חלק תאורטי

### אלגברה ליניארית

#### שאלה 1

> 1. Prove that orthogonal matrices are isometric transformations. That is, let $T : V \mapsto W$ be some linear transformation and $A$ the corresponding matrix. Show that if $A$ is an orthogonal matrix then $\forall x \in V \ \ ||Ax|| = ||x||$.

**הוכחה:** תהי $A$ מטריצה אורתוגונלית המייצגת העתקה $T : V \to W$.

נסמן $\dim(V) = n$ ו־ $\dim(W) = m$, כלומר $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. מתקיים לכל $x \in V$ ש־

$$\|Ax\| = \sqrt{\langle Ax \mid Ax\rangle} \overset{\text{הגדרת הצמוד}}{=} \sqrt{\langle x \mid A^* Ax\rangle} \overset{A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})}{=} \sqrt{\langle x \mid A^\top Ax\rangle} \overset{\text{אורתוגונלית } A}{=} \sqrt{\langle x \mid I_n x\rangle} = \sqrt{\langle x \mid x\rangle} = \|x\|$$

כנדרש. ■

#### שאלה 2

> 2. Calculate the SVD of the following matrix $A$. That is, find the matrices $U, \Sigma, V^\top$ where $U, V$ are orthogonal matrices and $\Sigma$ diagonal.
>
> $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

נתונה המטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. נמצא מטריצות $U, \Sigma, V$ כך ש־ $U, V$ אורתוגונליות מסדר $3\times 3$ ו־ $2\times 2$ בהתאמה ו־ $\Sigma$ אלכסונית מסדר $3 \times 2$ כך ש־ $A = U\Sigma V^\top$.

נחשב את $A^\top A$ ונלכסן אותה אורתוגונלית:

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

נחשב את הפולינום האופייני:

$$\chi_{A^\top A}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda-2 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda-4 \end{bmatrix} = (\lambda-2)\det\begin{bmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 2 & \lambda-4 \end{bmatrix} - 2\det\begin{bmatrix} 0 & \lambda-2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} =$$
$$= (\lambda-2)((\lambda-2)(\lambda-4)-4) - 4(\lambda-2) = (\lambda-2)((\lambda-2)(\lambda-4)-8) =$$
$$= (\lambda-2)\left(\lambda^2 - 6\lambda + 8 - 8\right) = (\lambda-2)(\lambda-6)\lambda$$

לכן הערכים העצמיים הם $\{0,2,6\}$. נמצא להם וקטורים עצמיים. עבור הע"ע $0$:

$$A^\top A - 0I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{דירוג}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

לכן הוקטור $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ הוא ו"ע של $A^\top A$ עם ע"ע $0$. ננרמל אותו ונקבל את הוקטור

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

עבור הע"ע $2$:

$$A^\top A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{דירוג}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

לכן הוקטור $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ הוא ו"ע של $A^\top A$ עם ע"ע $2$. ננרמל אותו ונקבל את הוקטור:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

עבור הע"ע $6$:

$$A^\top A - 6I = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{דירוג}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

לכן הוקטור $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ הוא ו"ע של $A^\top A$ עם ע"ע $6$. ננרמל ונקבל את הוקטור:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ולכן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^3$ שמלכסן את $A^\top A$ הוא:

$$\left( \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

נסמן

$$\boxed{V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}}$$

אז $V$ מטריצה אורתוגונלית כי עמודותיה הן בסיס א"נ של $\mathbb{R}^3$.
את המטריצה $\Sigma \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ נגדיר להיות:

$$\boxed{\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}}$$

כי היא מקיימת ש־ $\Sigma^\top \Sigma = \begin{bmatrix} 6 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$. עכשיו כפי שראינו בתרגול מתקיים ש־

$$U\Sigma = AV = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ולכן

$$\boxed{U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

היא אורתוגונלית למשל כי עמודותיה הן הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$, והוא בסיס א"נ.
עם המטריצות שמצאנו מתקיים ש־ $A = U\Sigma V^\top$.

**שאלה 3**

3. In this question we prove the Power-Iteration algorithm for finding the SVD of a matrix. Let $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ and define $C_0 = A^\top A$. Denote $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ the eigenvalues of $C_0$, with the corresponding normalized eigenvectors $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Let us assume the $\lambda_1 > \lambda_2$. Define $b_k \in \mathbb{R}$ as follows:

$$b_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \quad b_{k+1} = \frac{C_0 b_k}{\|C_0 b_k\|}$$

where $a_1 \neq 0$. Show that: $\lim_{k\to\infty} b_k = \pm v_1$.

**הוכחה:** נתונה מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. נסמן $C_0 = A^\top A$, $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ הע"ע של $C_0$, $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ הו"ע המתאימים מנורמלים. נניח ש־ $\lambda_1 > \lambda_2$ ונגדיר:

$$b_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad , \quad b_{k+1} = \frac{C_0 b_k}{\|C_0 b_k\|}$$

עם $a_1 \neq 0$. נשים לב שלפי הגדרת $b_0$ ומכך ש־ $v_1, \ldots, v_n$ ו"ע של $C_0$ נובע ש־

$$C_0 b_0 = C_0 \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i C_0 v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i v_i$$

נוכיח באינדוקציה שלכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים ש־

$$b_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^k v_i}{\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^k v_i \right\|}$$

בסיס: לפי ההגדרה ולפי החישוב לעיל:

$$b_1=\frac{C_0b_0}{\|C_0b_0\|}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\lambda_iv_i}{\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\lambda_iv_i\right\|}$$

כנדרש.

צעד: נניח נכונות עבור $k-1$ ונוכיח עבור $k$:

$$b_k\overset{\text{לפי ההגדרה}}{\overset{\downarrow}{=}}\frac{C_0b_{k-1}}{\|C_0b_{k-1}\|}\overset{\text{מהנחת האינדוקציה}}{\overset{\downarrow}{=}}\frac{C_0\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k-1}v_i}{\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k-1}v_i\right\|}}{\left\|C_0\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k-1}v_i}{\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k-1}v_i\right\|}\right\|}=\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k-1}C_0v_i}{\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k-1}v_i\right\|}}{\left\|\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k-1}C_0v_i}{\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k-1}v_i\right\|}\right\|}=\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k-1}\lambda_iv_i}{\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k-1}v_i\right\|}}{\left\|\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k-1}\lambda_iv_i}{\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k-1}v_i\right\|}\right\|}=$$

$$=\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k}v_i}{\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k-1}v_i\right\|}}{\frac{1}{\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k-1}v_i\right\|}\cdot\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k}v_i\right\|}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k}v_i}{\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k}v_i\right\|}$$

וזה מוכיח את צעד האינדוקציה.

נחשב את הנורמה $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k}v_i\right\|$ לכל $k\in\mathbb{N}$:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k}v_i\right\|=\sqrt{\left\langle\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k}v_i\mid\sum_{j=1}^{n}a_j\lambda_j^{k}v_j\right\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ia_j\lambda_i^{k}\lambda_j^{k}\langle v_i\mid v_j\rangle}\overset{\text{כי זו סדרת וקטורים א"נ}}{\overset{\downarrow}{=}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\lambda_i^{k}\right)^2}$$

ועכשיו בעזרת הזהות שהוכחנו באינדוקציה וע"י חילוק המונה והמכנה ב־$\lambda_1^k$ נקבל ש־:

$$b_k=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k}v_i}{\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k}v_i\right\|}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\lambda_i^{k}v_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i\lambda_i^{k}\right)^2}}\overset{\cdot\frac{\lambda_1^k}{\lambda_1^k}}{\overset{\downarrow}{=}}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^kv_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\right)^2}}$$

מכיוון ש־$\lambda_1>\lambda_2\geqslant\lambda_3\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n$ אז לכל $2\leqslant i\leqslant n$ מתקיים ש־$\frac{\lambda_i}{\lambda_1}<1$ ולכן:

$$\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\xrightarrow[k\to\infty]{}0$$

ולכן:

$$b_k=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^kv_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\right)^2}}\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{a_1v_1}{\sqrt{a_1^2}}=\frac{a_1}{|a_1|}v_1=\pm v_1$$

כנדרש. ■

## אינפי רב־מימדי

### שאלה 4

> 4. Let $x \in \mathbb{R}^n$ be a fixed vector and $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a fixed orthogonal matrix. Calculate the Jacobian of the function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:
> $$f(\boldsymbol{\sigma}) = U \cdot \operatorname{diag}(\boldsymbol{\sigma}) U^\top x$$
> Where $\operatorname{diag}(\boldsymbol{\sigma})$ is an $n \times n$ matrix where
> $$\operatorname{diag}(\boldsymbol{\sigma})_{ij} = \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

נסמן לכל $1 \leqslant i, j \leqslant n$ את הכניסה ה־$i, j$ של $U$ ב־ $u_j^i \in \mathbb{R}$ (כאשר $i$ מסמן את אינדקס השורה ו־$j$ את אינדקס העמודה), ולכל $1 \leqslant i \leqslant n$ נסמן את העמודה ה־$i$ של $U$ ב־ $u_i \in \mathbb{R}^n$. נשים לב שלכל $\sigma \in \mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$f(\sigma) = U\operatorname{diag}(\sigma) U^\top x = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & u_1^\top & - \\ & \vdots & \\ - & u_1^\top & - \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} | & & | \\ \sigma_1 u_1 & \dots & \sigma_n u_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^\top x \\ \vdots \\ u_n^\top x \end{bmatrix} =$$

$$= u_1^\top x \sigma_1 u_1 + \ldots + u_n^\top x \sigma_n u_n = \sigma_1 u_1^\top x u_1 + \ldots + \sigma_n u_n^\top x u_n = \sum_{\ell=1}^{n} \sigma_\ell u_\ell^\top x u_\ell \in \mathbb{R}^n$$

נשים לב שלכל $1 \leqslant i \leqslant n$, הכניסה ה־$i$ של הוקטור שקיבלנו היא סכום הכניסות ה־$i$ של הוקטורים שהוא הסכום שלהם, כלומר:

$$\left[\sum_{\ell=1}^{n} \sigma_\ell u_\ell^\top x u_\ell\right]_i = \sum_{\ell=1}^{n} \left[\sigma_\ell u_\ell^\top x u_\ell\right]_i = \sum_{\ell=1}^{n} \sigma_\ell u_\ell^\top x u_\ell^i$$

ונשים לב שבנוסחא הזו $u_\ell^\top x u_\ell^i \in \mathbb{R}$ (הוא סקלר). לכן נוכל להגדיר לכל $1 \leqslant i \leqslant n$ $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^n : \quad f_i(\sigma) = \sum_{\ell=1}^{n} \sigma_\ell u_\ell^\top x u_\ell^i$$

ונקבל ש־

$$f(\sigma) = \begin{bmatrix} f_1(\sigma) \\ \vdots \\ f_n(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\ell=1}^{n} \sigma_\ell u_\ell^\top x u_\ell^1 \\ \vdots \\ \sum_{\ell=1}^{n} \sigma_\ell u_\ell^\top x u_\ell^n \end{bmatrix}$$

עכשיו לכל $1 \leqslant i, j \leqslant n$ נקבל ש־

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\sigma) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{\ell=1}^{n} \sigma_\ell u_\ell^\top x u_\ell^i = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_\ell u_\ell^\top x u_\ell^i\right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_j u_j^\top x u_j^i\right) = u_j^\top x u_j^i = \langle u_j \mid x \rangle u_j^i$$

ולכן:

$$J_\sigma(f) = \begin{bmatrix} \langle u_1 \mid x \rangle u_1^1 & \dots & \langle u_n \mid x \rangle u_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_1 \mid x \rangle u_1^n & \dots & \langle u_n \mid x \rangle u_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ \langle u_1 \mid x \rangle u_1 & \dots & \langle u_n \mid x \rangle u_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle u_1 \mid x \rangle & & \\ & \ddots & \\ & & \langle u_n \mid x \rangle \end{bmatrix} =$$

$$= U \cdot \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} \langle u_1 \mid x \rangle \\ \vdots \\ \langle u_1 \mid x \rangle \end{bmatrix}\right) = U \cdot \operatorname{diag}\left([x]_{\mathcal{B}_U}\right)$$

כאשר השיוויון האחרון נובע מכך ש־$U$ אורתוגונלית, ולכן עמודותיה הן בסיס אורתונורמלי $\mathcal{B}_U = (u_1, \ldots, u_n)$ של $\mathbb{R}^n$, ולומדים בליניארית ש־ $\begin{bmatrix} \langle u_1|x\rangle \\ \vdots \\ \langle u_1|x\rangle \end{bmatrix}$ הוא בדיוק עמודת הקואורדינטות של $x$ ביחס לבסיס האורתונורמלי הזה.

**שאלה 5**

5. Use the chain rule to calculate the gradient of $h(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}||f(\boldsymbol{\sigma}) - y||^2$

נגדיר $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$\forall \sigma \in \mathbb{R}^n : \quad g(\sigma) = \frac{1}{2}\|\sigma - y\|^2$$

ונקבל ש־ $h(\sigma) = \frac{1}{2}\|f(\sigma) - y\|^2 = g(f(\sigma)) = (g \circ f)(\sigma)$. לפי כלל השרשרת מתקיים ש־

$$J_\sigma(h) = J_{f(\sigma)}(g) \cdot J_\sigma(f)$$

בשאלה הקודמת ראינו ש־ $J_\sigma(f) = U \cdot \operatorname{diag}\left([x]_{\mathcal{B}_U}\right)$, כאשר $x \in \mathbb{R}^n$ ו־$U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אורתוגונלית, ו־$\mathcal{B}_U$ בסיס א"נ של $\mathbb{R}^n$ המורכב מעמודותיה של $U$.

נחשב את $J_\sigma(g)$:

לכל $1 \leqslant i \leqslant n$ הנגזרת של $g(\sigma)$ לפי $\sigma_i$ היא:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\sigma_i}g(\sigma) &= \frac{\partial}{\partial\sigma_i}\left(\frac{1}{2}\|\sigma - y\|^2\right) = \frac{\partial}{\partial\sigma_i}\left(\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n}(\sigma_\ell - y_\ell)^2\right) = \frac{\partial}{\partial\sigma_i}\left(\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n}\left(\sigma_\ell^2 - 2\sigma_\ell y_\ell + y_\ell^2\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\sigma_i}\left(\sigma_\ell^2 - 2\sigma_\ell y_\ell + y_\ell^2\right) = \frac{1}{2}(2\sigma_i - 2y_i) = \sigma_i - y_i\end{aligned}$$

ולכן:

$$\nabla g(\sigma) = \begin{bmatrix} \sigma_1 - y_1 \\ \vdots \\ \sigma_n - y_n \end{bmatrix} = \sigma - y$$

ולכן כפי שראינו - $J_\sigma(g) = (\nabla g(\sigma))^\top = (\sigma - y)^\top$. נציב בכלל השרשרת ונקבל ש־

$$J_\sigma(h) = (f(\sigma) - y)^\top U \operatorname{diag}\left([x]_{\mathcal{B}_U}\right)$$

לכן הגרדיינט של $h(\sigma)$ הוא:

$$\nabla h(\sigma) = (J_\sigma(h))^\top = \left((f(\sigma) - y)^\top U \operatorname{diag}\left([x]_{\mathcal{B}_U}\right)\right)^\top = \operatorname{diag}\left([x]_{\mathcal{B}_U}\right) U^\top (f(\sigma) - y)$$

**שאלה 6**

6. Calculate the Jacobian of the softmax function $S:\mathbb{R}^d \to [0,1]^k$

$$S(\mathbf{x})_j = \frac{e^{x_j}}{\sum_{l=1}^{k} e^{x_l}}$$

כתבו בפורום שיש טעות בשאלה והפונקציה היא $S:\mathbb{R}^d \to [0,1]^d$. כלומר $k=d$.

כמו בתרגול, נגדיר לכל $i\in[d]$ את הפונקציה $g_i:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ ע"י:

$$\forall x\in\mathbb{R}^d: \quad g_i(x) = e^{x_i}$$

ואת הפונקציה $h:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ ע"י:

$$\forall x\in\mathbb{R}^d: \quad h(x) = \sum_{\ell=1}^{k} e^{x_\ell}$$

נקבל שלכל $i\in[d]$ מתקיים ש- $S_i(x) = \frac{g_i(x)}{h(x)}$.

לכן לכל $i,j\in[d]$ מתקיים ש-

$$\frac{\partial}{\partial x_j}S_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{e^{x_i}}{\sum\limits_{\ell=1}^{k} e^{x_\ell}} = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{g_i(x)}{h(x)} = \frac{\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}h(x) - \frac{\partial h(x)}{\partial x_j}g_i(x)}{h^2(x)} \qquad \bigstar$$

נשים לב שלכל $j\in[d]$ הנגזרת החלקית של $h(x)$ ביחס ל- $x_j$ היא:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}h(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{\ell=1}^{k} e^{x_\ell} = \sum_{\ell=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_j}e^{x_\ell} = e^{x_j}$$

בתרגול ראינו שעבור $i=j$ מתקיים ש-

$$\frac{\partial}{\partial x_j}S_i(x) = S_i(x)\left(1-S_j(x)\right)$$

במקרה שבו $i\neq j$ נקבל שהנגזרת החלקית של $g_i(x)$ ביחס ל- $x_j$ היא:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}g_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}e^{x_i} = 0$$

ולכן:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}S_i(x) \overset{\bigstar}{=} \frac{\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}h(x) - \frac{\partial h(x)}{\partial x_j}g_i(x)}{h^2(x)} = \frac{0 - e^{x_j}\cdot e^{x_i}}{\left(\sum\limits_{\ell=1}^{k} e^{x_\ell}\right)^2} = -\frac{e^{x_j}}{\sum\limits_{\ell=1}^{k} e^{x_\ell}}\cdot\frac{e^{x_i}}{\sum\limits_{\ell=1}^{k} e^{x_\ell}} = -S_j(x)\,S_i(x)$$

ולכן מטריצת היעקוביאן של $S$ היא:

$$\mathbb{R}^{d\times d} \ni J_x(S) = \begin{bmatrix} S_1(1-S_1) & -S_2S_1 & \dots & -S_dS_1 \\ -S_1S_2 & S_2(1-S_2) & \dots & -S_dS_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -S_1S_d & -S_2S_d & \dots & S_d(1-S_d) \end{bmatrix}$$

**שאלה 7**

7. Let $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ be defined as $f(x,y) = x^3 - 5xy - y^5$. Calculate the Hessian of $f$.

נתחיל בחישוב הנגזרות החלקיות של $f$:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 - 5xy - y^5\right) = 3x^2 - 5y$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 - 5xy - y^5\right) = -5x - 5y^4$$

ונמשיך עם הנגזרות השניות החלקיות:

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 - 5y\right) = 6x$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 - 5y\right) = -5$$
$$\frac{\partial^2}{\partial^2 y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-5x - 5y^4\right) = -20y^3$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-5x - 5y^4\right) = -5$$

ולכן:

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -5 \\ -5 & -20y^3 \end{bmatrix}$$

## תאוריית אומדן

### שאלה 8

8. Let $x_1, x_2, \ldots \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{P}$ be a sample of infinity size drawn from some probability distribution function $\mathcal{P}$ with finite expectation and variance. Show that the sample mean estimator $\hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum x_i$ calculated over the first $n$ samples is a consistent estimator. Hint: for any given fixed value of $n \in \mathbb{N}$ bound from above the probability of deviating more than $\varepsilon$.

**הוכחה:** נסמן ב־$\mu$ את התוחלת של $\mathcal{P}$ וב־$\gamma$ את השונות שלה.

לפי ההגדרה, האומד $\hat{\mu}_n$ מנסה לאמוד את התוחלת של $\mathcal{P}$ - $\mu$, ולכן הוא קונסיסטנטי אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים ש־

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\mu_n - \mu| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

נחשב לכל $n \in \mathbb{N}$ את התוחלת של $\hat{\mu}_n$ (הוא הרי מ"מ):

$$\mathbb{E}\left(\hat{\mu}_n\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \overset{\text{ליניאריות התוחלת}}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(x_i\right) \overset{x_i \overset{\text{iid}}{\sim} P}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu = \mu$$

מכיוון ש־ $x_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{P}$ אז בפרט הם ב"ת ולכן נוכל לחשב גם את השונות של $\hat{\mu}_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$ בקלות:

$$\operatorname{Var}\left(\hat{\mu}_n\right) = \operatorname{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Var}\left(x_i\right) = \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\gamma = \frac{\gamma}{n}$$

יהי $\varepsilon > 0$. לפי אי־שיוויון צ'בישב:

$$\mathbb{P}\left(|\hat{\mu}_n - \mu| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\operatorname{Var}\left(\hat{\mu}_n\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{\gamma}{n}}{\varepsilon^2} = \frac{\gamma}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ומכיוון שהסתברות היא אי־שלילית לפי הגדרתה אז נובע מסנדוויץ' ש־

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|\mu_n - \mu| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

וזה נכון לכל $\varepsilon > 0$. לכן $\hat{\mu}_n$ קונסיסטנטי כנדרש. ■

### שאלה 9

9. Let $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ be $m$ observations sampled i.i.d from a multivariate Gaussian with expectation of $\mu \in \mathbb{R}^d$ and a covariance matrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Derive the log-likelihood function of $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. Hint: follow the approach used to derive the likelihood function for the univariate case.

ראינו בכיתה שפונקציית הצפיפות של מ"מ $X$ המתפלג $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ עם $\mu \in \mathbb{R}^d$ ו־ $\Sigma \in M_{d\times d}(\mathbb{R})$ היא:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d: \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

בנוסף ראינו שעבור מ"מ $X \sim \mathcal{P}(\theta)$ עם פונקציית צפיפות $f$, פונקציית ה־likelihood שלו היא:

$$\mathcal{L}(\theta \mid x) = f_\theta(x)$$

ופונקציית ה־log-likelihood היא $\log\left(f_\theta(x)\right)$.

ולכן עבור התצפיות $x_1, \ldots, x_m \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ הנתונות מתקיים לכל $i \in [m]$ ש־

$$\mathcal{L}(\theta \mid x_i) = f_\theta(x_i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_i - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x_i - \mu)\right)$$

מכיוון שהם בלתי תלויים ובעלי התפלגות זהה:

$$\mathcal{L}(\theta \mid x_1, \ldots, x_m) = f_\theta(x_1, \ldots, x_m) = \prod_{i=1}^m f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^m \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_i - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x_i - \mu)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\left((2\pi)^d |\Sigma|\right)^{\frac{m}{2}}} \prod_{i=1}^m \exp\left(-\frac{1}{2}(x_i - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x_i - \mu)\right) =$$

$$= \frac{1}{\left((2\pi)^d |\Sigma|\right)^{\frac{m}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (x_i - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x_i - \mu)\right)$$

ולכן פונקציית ה־log-likelihood של $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ היא:

$$\log\left(\frac{1}{\left((2\pi)^d |\Sigma|\right)^{\frac{m}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (x_i - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x_i - \mu)\right)\right) =$$

$$= \log\left(\frac{1}{\left((2\pi)^d |\Sigma|\right)^{\frac{m}{2}}}\right) + \log\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (x_i - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x_i - \mu)\right)\right) =$$

$$= -\frac{m}{2}\log\left((2\pi)^d |\Sigma|\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (x_i - \mu)^\top \Sigma^{-1} (x_i - \mu)$$

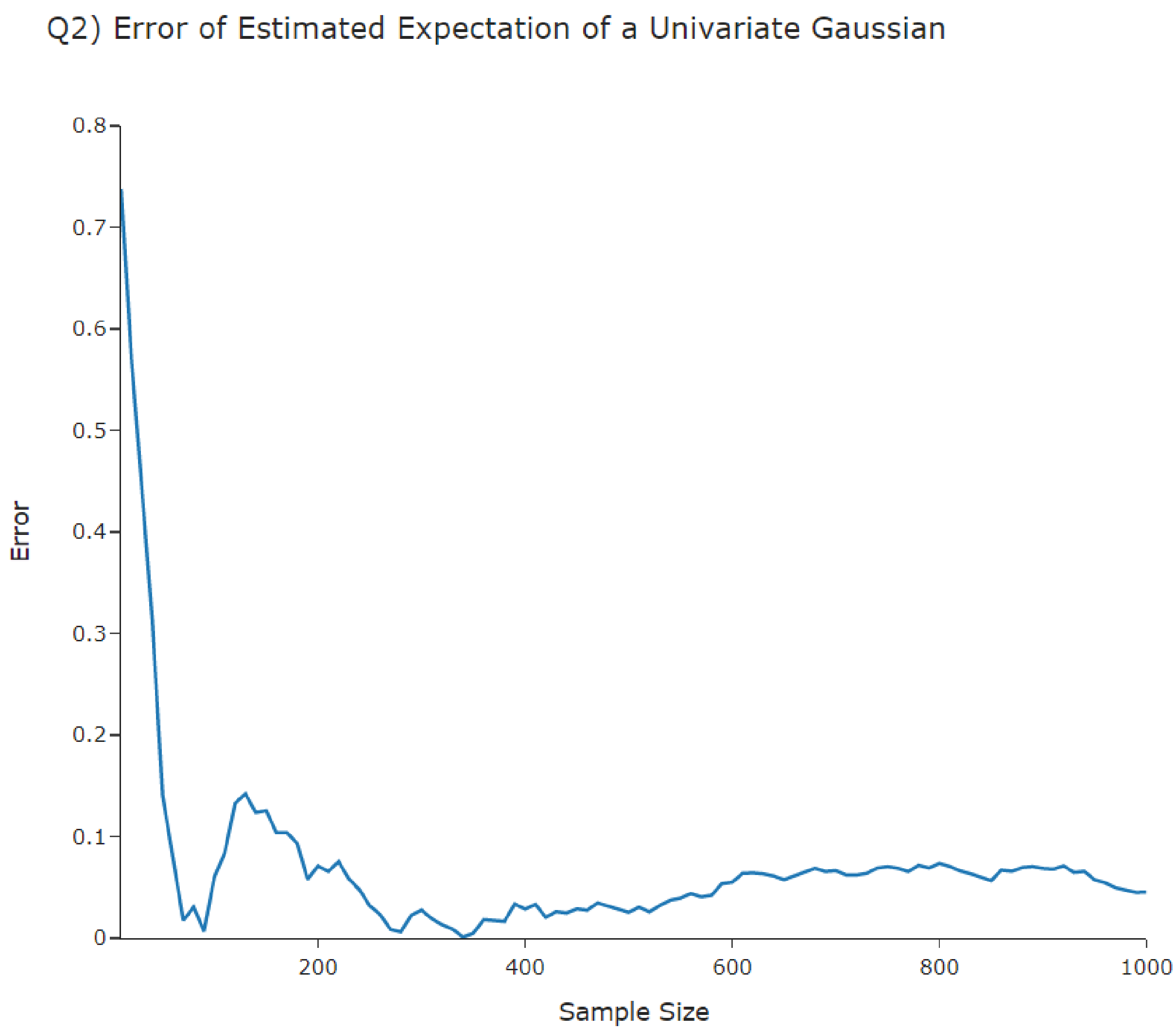
## 2 חלק מעשי

**שאלה 1**

הערכים של התוחלת ושל השונות שחושבו מודפסים בקוד כפי שכתוב בהוראות.

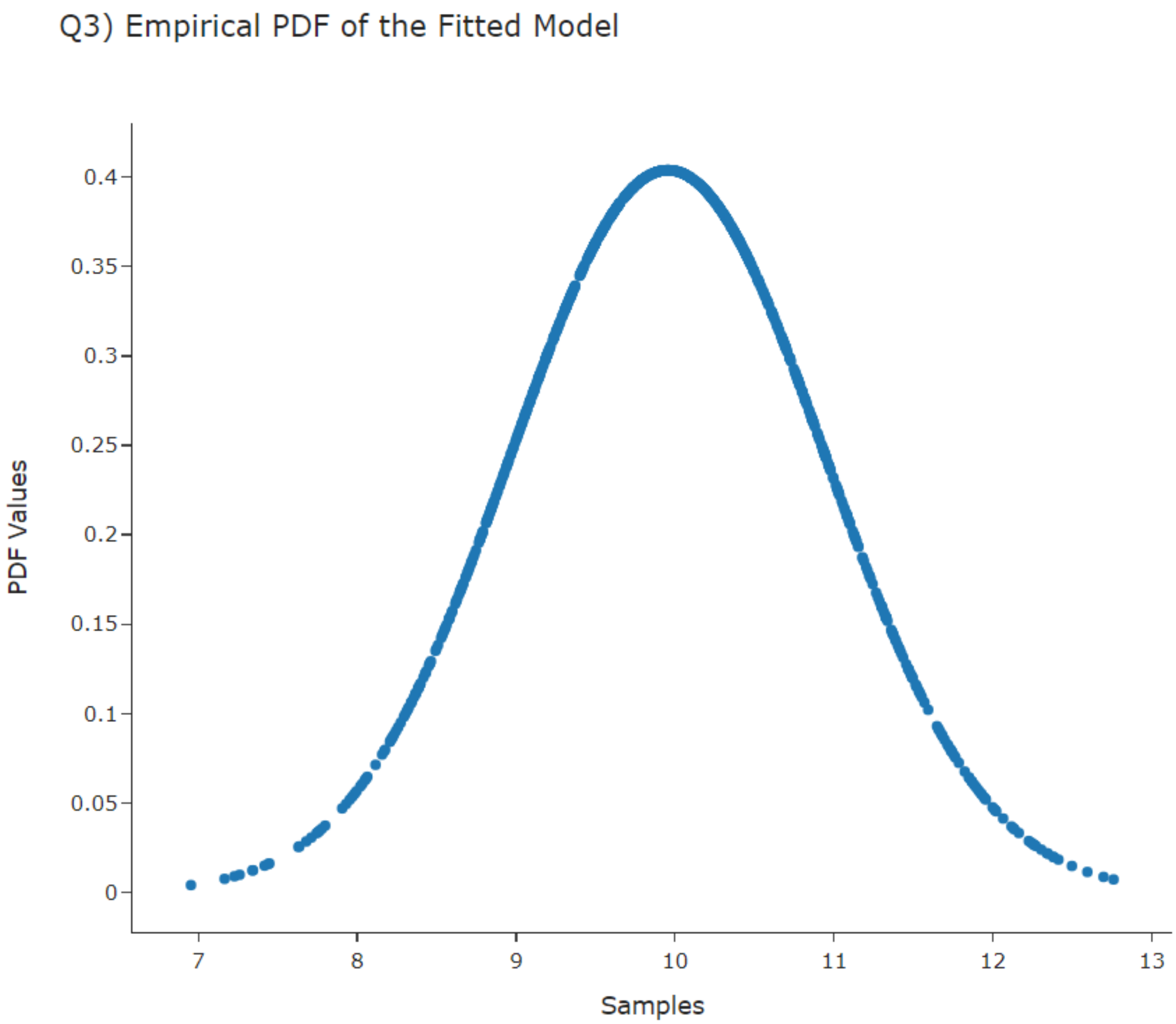
**שאלה 2**

גרף המציג את גודל השגיאה באומדן התוחלת ביחס למספר הדגימות:



**שאלה 3**

גרף המציג את פונקציית הצפיפות שחושבה ע"י המודל:

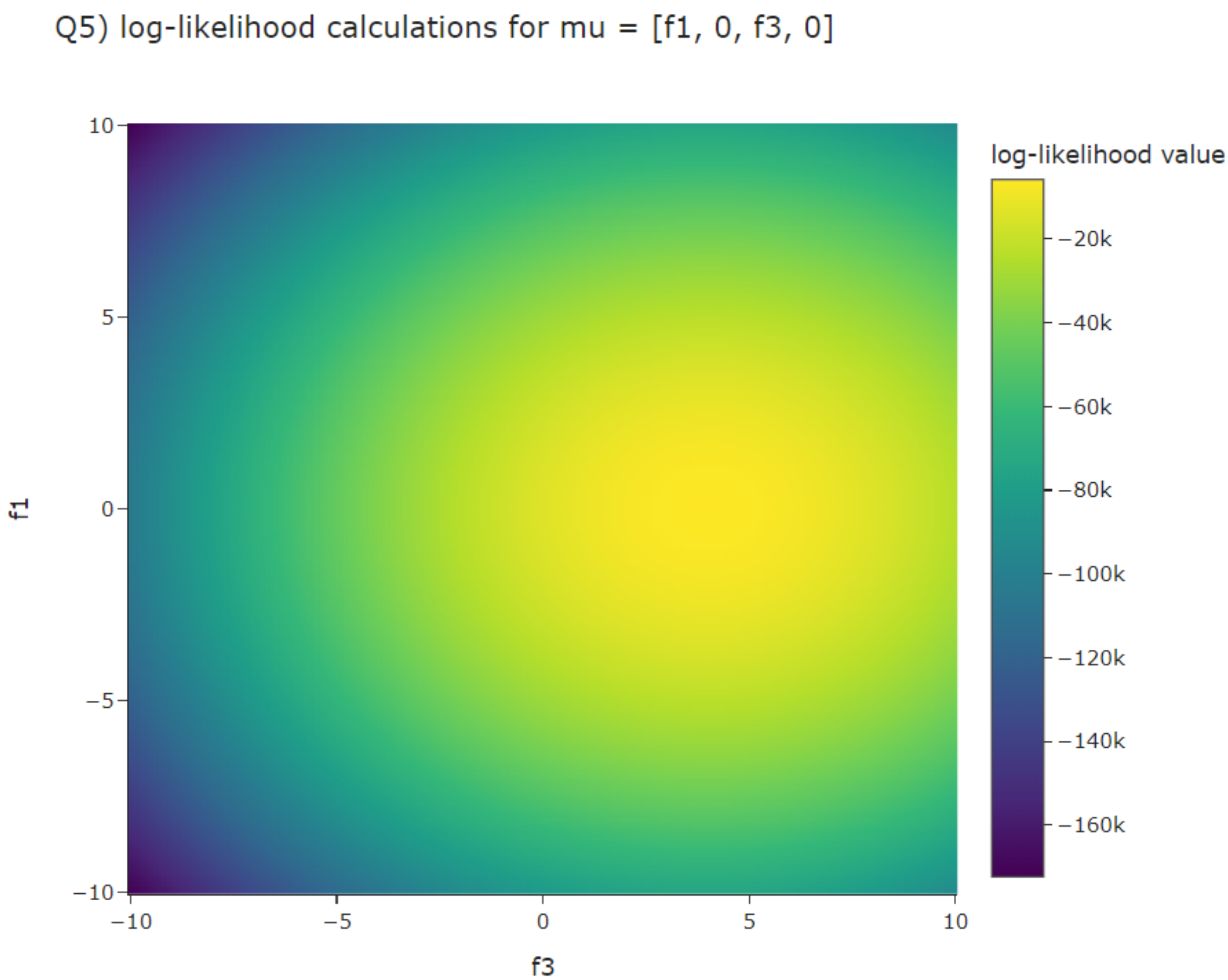


**שאלה 4**

הערכים של וקטור התוחלת ושל מטריצת השונות המשותפת שחושבו מודפסים בקוד כפי שכתוב בהוראות.

**שאלה 5**

גרף (HeatMap) המציג את ערך פונקציית ה־log-likelihood:




**שאלה 6**

מתוך כל הערכים שחושבו בשאלה הקודמת, המודל שהשיג ערך מקסימלי עבור פונקציית ה־log-likelihood הוא:

$$\mu = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & f_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.050 & 0 & 3.970 & 0 \end{bmatrix}$$

והערך המקסימלי שהתקבל הוא $-5806.003$.