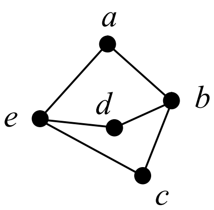
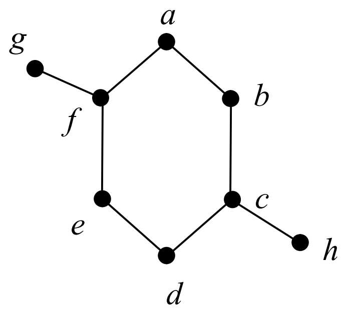
TD 3 – Coloration de Graphe
(Annoté)

Exercice 1

On ne sait pas toujours trouver le nombre minimum de couleurs pouvant colorer un graphe (le « nombre chromatique » du graphe) ; des algorithmes existent qui donnent un nombre de couleurs possible, ce nombre n'étant pas forcément le plus petit.
Nous considérons l'algorithme de coloration de graphes suivant :
On range les sommets dans l'ordre décroissant de leurs degrés : $s_1, s_2, s_3 \ldots s_n$.
On colorie ces sommets dans l'ordre précédemment défini avec pour règle de donner à chaque sommet la couleur la plus petite (on suppose les couleurs numérotées dans l'ordre croissant), en fonction des sommets voisins qui sont déjà colorés.





1. Donner les bornes sup et inf sur le nombre chromatique de chacun de ces deux graphes.
2. Appliquer cet algorithme aux deux graphes représentés ci-dessous.
3. Comparer, pour chaque graphe, le nombre de couleurs obtenues avec son nombre chromatique.

Corrigé :

Soit un graphe de n sommet et m arêtes.

- $\gamma(G) \geq \dfrac{n}{n - d_{\min}}$; avec d_{min} est le degré minimum des sommets de G

$$\gamma(G1) \geq \frac{5}{5-2} = \frac{5}{3}$$

$$\gamma(G2) \geq \frac{8}{8-1} = \frac{8}{7}$$

- $\gamma(G) \geq C_{\max}$; avec C_{max} est le cardinal de la plus grande clique de G $\rightarrow \gamma(G) \geq C_{\max}$

$$\gamma(G1) \geq 2$$

$$\gamma(G2) \geq 2$$

- $\gamma(G) \geq \dfrac{n^2}{n^2 - 2m}$;

$$\gamma(G1) \geq \frac{25}{25-12} = \frac{25}{13}$$

$$\gamma(G2) \geq \frac{8^2}{8^2 - 2x8} = \frac{4}{3}$$

- $\gamma(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$, avec α(G) est le nombre de stabilité de G. Le cardinal du plus grand sous ensemble de sommets stable de G.

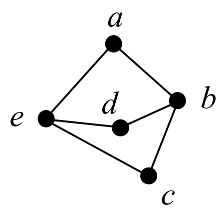
$$\gamma(G1) \leq 5 + 1 - 3 = 3$$

$\gamma(G2) \leq 8+1-4=5$

– $\gamma(G) \leq d_{\max}+1$; avec d_{max} est le degré maximal des sommets de G

$\gamma(G1) \leq 3+1=4$

$\gamma(G2) \leq 3+1=4$



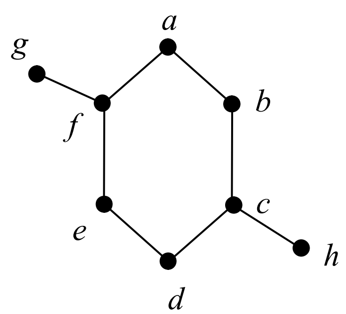
En suivant l'algorithme proposé dans le texte de l'exercice, voici le tableau de coloration pour le graphe ci-contre :

sommets	*b*	*E*	*a*	*c*	*d*
degrés	3	3	2	2	2
n° couleur	1	1	2	2	2

On attribue au premier sommet *b* la couleur n°1 ; puis on regarde si on peut attribuer la couleur n°1 au deuxième sommet *e* : comme les sommets *b* et *e* ne sont pas reliés, on peut prendre la même couleur. On regarde si on peut attribuer au troisième sommet *a* la couleur n°1 : c'est non puisque *a* et *b* sont reliés entre eux. On attribue donc une autre couleur n°2 au sommet *a*. Et on se pose les mêmes questions pour les sommets *c* et *d* : on voit qu'on ne peut les colorier avec la couleur n°1 mais que l'on peut les colorier avec la n°2.
L'algorithme proposé donne donc deux couleurs pour le graphe ; on ne peut pas en avoir moins : deux est donc le nombre chromatique de ce graphe.

On applique le même algorithme à cet autre graphe :

sommets	*c*	*f*	*a*	*b*	*d*	*e*	*g*	*h*
degrés	3	3	2	2	2	2	1	1
n° couleur	1	1	2	3	2	3	2	2



L'algorithme donne un nombre de couleurs de 3 alors qu'on peut se rendre compte rapidement que deux suffisent :

couleur 1 pour les sommets *c*, *a*, *g* et *e* ;

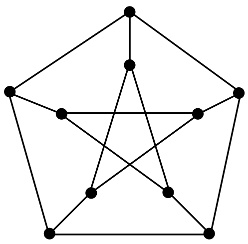
couleur 2 pour les sommets *b*, *f*, *d* et *h*.

L'algorithme proposé dans cet exercice donne UNE coloration de n'importe quel graphe mais ne donne pas le nombre chromatique du graphe ; en fait, il n'existe pas d'algorithme permettant de trouver le nombre chromatique d'un graphe quelconque.

Exercice 2 (colocation d'un graphe de Petersen)

On cherche à colorier le graphe ci-dessous en utilisant des entiers positifs de façon telle que deux sommets voisins ont des couleurs dont la différence, en valeur absolue, est au moins égale à trois.

- Proposez une coloration de ce graphe. Quel est le plus grand entier utilisé ?
- Peut-on faire mieux ?
- Maintenant, on souhaite que, de plus, deux sommets à distance deux aient des couleurs dont la différence, en valeur absolue, est au moins égale à deux. Quelle est la meilleure coloration possible de ce graphe ?



Corrigé :

Voici deux colorations du graphe de Petersen. La première utilise 7 comme plus grand entier, la deuxième 19…

Dans le premier cas, on peut vérifier que pour colorier ainsi un cycle à 5 sommets, la meilleure solution est 1-4-1-4-7. Ainsi, il n'est pas possible de n'utiliser que des entiers inférieurs à 7.

Dans le deuxième cas, remarquons que deux sommets quelconques sont à distance au plus 2 (on dit que le graphe est de diamètre 2). Toutes les couleurs doivent donc être distinctes et « espacées » de 2. La meilleure solution utilise ainsi les entiers impairs 1, 3, 5,…,19.