Полиномы Джонса

Глобальная задача:

Найти инварианты узлов, которые бы позволили различать их между собой. Привести эффективный алгоритм их вычисления.

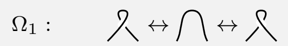
Локальная задача:

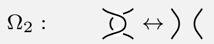
Построить инвариантный полином Джонса через скобку Кауфмана, привести алгоритм вычисления, исследовать свойства и вычислить значение на примере простых узлов.

---

1 Инварианты узлов

Th 1.1. *(Reidemeister 1927)*
Две диаграммы соответствуют изотопным зацеплениям тогда и только тогда, когда их можно получить одну из другой с помощью конечного числа плоских изотопий и преобразований трех типов:


(1)

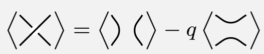

(2)


(3)

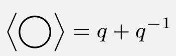
Теорема 1.1 показывает, что при построении инвариантов узлов достаточно проверить, что они сохраняются на преобразованиях Рейдемейстера $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$

2 Скобка Кауфмана

Def 2.1. Аксиомы скобки Кауфмана (Khovanov 2000):


(4)

$$\langle L_1 \cup L_2 \rangle = \langle L_1 \rangle \langle L_2 \rangle \tag{5}$$


(6)

Под отрицательным сглаживанием будем понимать первое разрешение в (4), а положительным - второе[1]. Каждый перекресток в узле мы можем сгладить одним из этих двух способов. Сгладив все n перекрёстков, мы получим диаграмму из некоторого числа p кружочков. Всего у нас 2^n таких диаграмм, которые мы будем именовать состояниями s, каждое из которых соответствует разным сглаживаниям с γ положительных сглаживаний. Тогда исходя из 2.1 получаем выражение для скобки Кауфмана в виде статсуммы:

$$\langle L \rangle = \sum_s (-q)^\gamma (q + q^{-1})^p \tag{7}$$

Для разъяснения построения (7) см. Рис.1

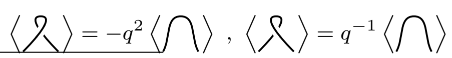
Заметим, что кружочку можно сопоставить двумерное градуированное пространство V, размерность которого будет $\dim V = q + q^{-1}$. Тогда (7) перепишется как:

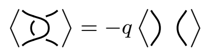
$$\langle L \rangle = \sum_s (-q)^\gamma (\dim V)^p \tag{8}$$

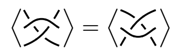
Это наблюдение будет полезно для дальнейшей работы с полиномами Хованова.

3 Полином Джонса как нормализация скобки Кауфмана

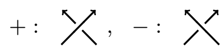
Скобка Кауфмана на ходах Рейдемейстера:


(9)


(10)


(11)

Попробуем сделать скобку Кауфмана инвариантной. Введём понятия положительного и отрицательного пересечения:


(12)

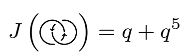
Количесво положительных и отрицательных перекрёстков в узле обозначим n_+ и n_- соответственно. Попробуем результат скобки Кауфмана домножить на моном вида $(-1)^{an_+ + bn_-} q^{cn_+ + dn_-}$, чтобы добиться инвариантности. Получаем следующий инвариантный полином:

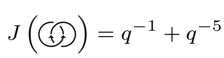
$$J(q, L) = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \frac{\langle L \rangle}{\langle \bigcirc \rangle} \tag{13}$$

Под полиномом Джонса будем понимать именно (13) [2].

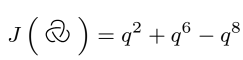
4 Примеры вычисления и свойства полинома Джонса

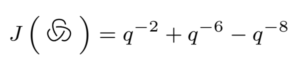
Пример 1: посчитаем зацепления Хопфа разной ориентации:


(14)


(15)

Пример 2: левый и правый трилистник:


(16)


(17)

В ответах прослеживается закономерность относительно степеней q. Этот факт оказывается общим для полинома Джонса:

Th 4.1 (О полиноме Джонса зеркального узла).

$$J(q, L) = J(q^{-1}, \bar{L}),\ \bar{L} \text{ - зеркальный узел} \tag{18}$$

Доказать 4.1 довольно просто, используя определение скобки Кауфмана в виде статсуммы.

[1] Важно отметить, что если перекресток поменяется на противоположный, то и обозначения сглаживаний поменяются местами

[2] Хотя обычно в литературе полином Джонса $\tilde{J}$ определяют как $\tilde{J}(t, L) := J(-\sqrt{t}, L)$

5 Определение полинома Джонса через skein-соотношение

Используя свойство (4) для противоположных перекрестков, получим:

$$\begin{cases} \left\langle \diagdown\!\!\!\!\diagup \right\rangle = \left\langle)\,(\right\rangle - q \left\langle \asymp \right\rangle & | \cdot q^{-1} \\ \left\langle \diagup\!\!\!\!\diagdown \right\rangle = \left\langle \asymp \right\rangle - q \left\langle)\,(\right\rangle \end{cases} + \tag{19}$$

$$q^{-1} \left\langle \diagdown\!\!\!\!\diagup \right\rangle + \left\langle \diagup\!\!\!\!\diagdown \right\rangle = (q^{-1} - q) \left\langle)\,(\right\rangle \tag{20}$$

Аналогично можно наоборот из (20) получить (4), то есть свойства эквивалентны. Но (20), в отличие от (4) применимо для ориентированных узлов и с учетом нормировки (13) дает:

$$q^{-2} J\left(\nearrow\!\!\!\!\nwarrow\right) - q^{2} J\left(\nwarrow\!\!\!\!\nearrow\right) = (q^{-1} - q) J\left(\uparrow\,\uparrow\right) \tag{21}$$

Сотношение (21) вместе с требованием $(J(L) = 1 \quad \forall L \sim \bigcirc)$ однозначно определяют полином Джонса. (с.46 В.В.Прасолов и А.Б.Сосинский 1997). Также (21) позволяет доказать следующее свойство:

Th 5.1. *Полином Джонса зацеплений с* ***нечетным*** *числом компонент связности содержит только* ***четные*** *степени q и наоборот.*

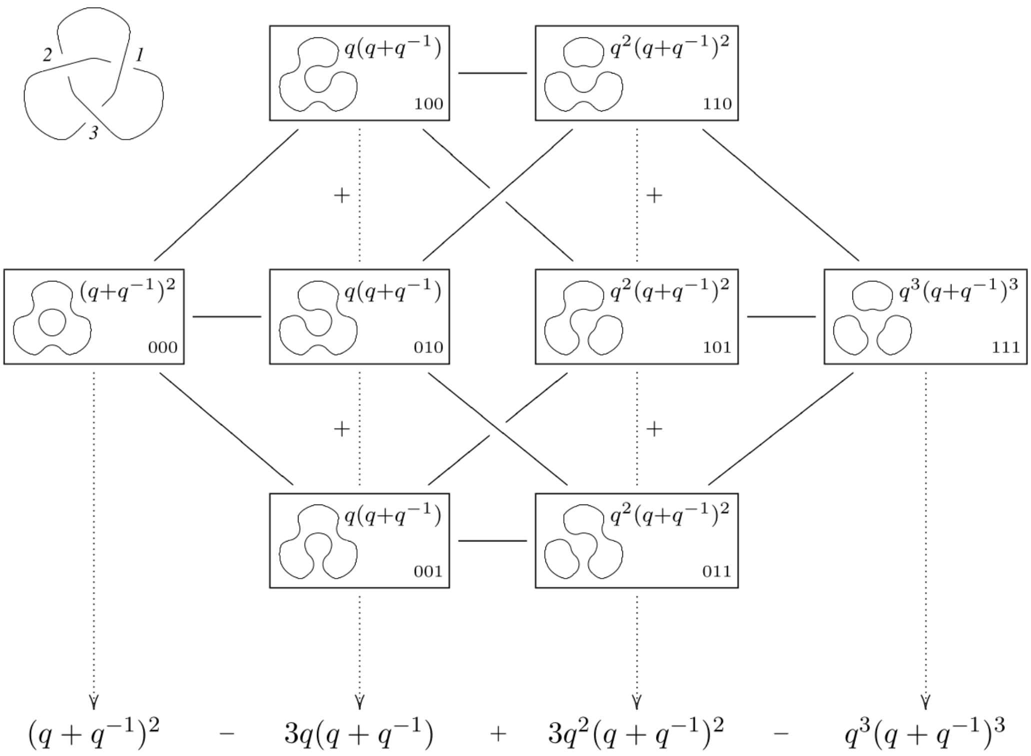


Рис. 1: Пояснение к скобке Кауфмана, как статсумме (Bar-Natan 2002)

Список литературы

Bar-Natan, Dror (2002). «On Khovanov's categorification of the Jones polynomial». В: *Algebraic & Geometric Topology* 2 (1), с. 337—370. DOI: 10.2140/agt.2002.2.337.

Khovanov, Mikhail (2000). «A categorification of the Jones polynomial». В: *Duke Mathematical Journal* 101.3, с. 359—426. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.math/9908171.

В.В.Прасолов и А.Б.Сосинский (1997). *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия.* МЦНМО.