Полиномы Джонса

Глобальная задача:

Найти инварианты узлов, которые бы позволили различать их между собой. Привести эффективный алгоритм их вычисления.

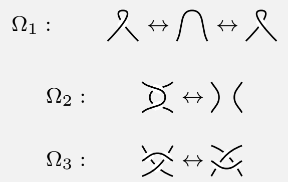
Локальная задача:

Построить инвариантный полином Джонса через скобку Кауфмана, привести алгоритм вычисления, исследовать свойства и вычислить значение на примере простых узлов.

---

1 Инварианты узлов

Th 1.1. *(Reidemeister 1927)*
Две диаграмы соответствуют изотопным зацеплениям тогда и только тогда, когда их можно получить одну из другой с помощью конечного числа плоских изотопий и преобразований трех типов:

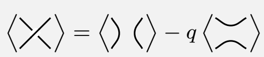


(1) (2) (3)

Теорема 1.1 показывает, что при построении инвариантов узлов достаточно проверить, что они сохраняются на преобразованиях Рейдемейстера $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$

2 Скобка Кауфмана

Def 2.1. Аксиомы скобки Кауфмана (Khovanov 2000):



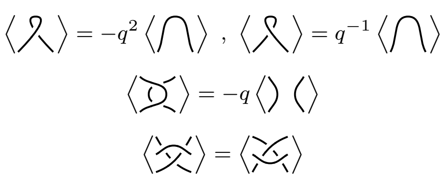
(4)

$$\langle L_1 \cup L_2 \rangle = \langle L_1 \rangle \langle L_2 \rangle \tag{5}$$

$$\langle \bigcirc \rangle = q + q^{-1} \tag{6}$$

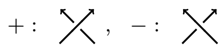
3 Полином Джонса как нормализация скобки Кауфмана

Скобка Кауфмана на ходах Рейдемейстера:



(7) (8) (9)

Попробуем сделать скобку Кауфмана инвариантной. Введём понятия положительного и отрицательного пересечения:



(10)

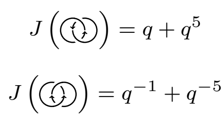
Количесво положительных и отрицательных перекрёстков в узле обозначим n_+ и n_- соответственно. Попробуем результат скобки Кауфмана домножить на моном вида $(-1)^{an_+ + bn_-} q^{cn_+ + dn_-}$, чтобы добиться инвариантности. Получаем следующий инвариантный полином:

$$J(q, L) = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \frac{\langle L \rangle}{\langle \bigcirc \rangle} \tag{11}$$

Под полиномом Джонса будем понимать именно (11) [1].

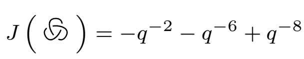
4 Примеры вычисления и свойства полинома Джонса

Пример 1: посчитаем зацепления Хопфа разной ориентации:



(12) (13)

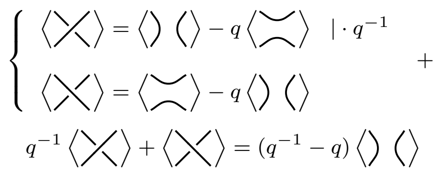
Пример 2: левый и правый трилистник:



(14)

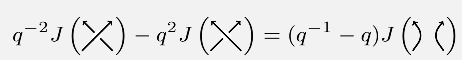
5 Определение полинома Джонса через skein-соотношение

Используя свойство (4) для противоположных перекрестков, получим:



(15) (16)

Аналогично можно наоборот из (16) получить (4), то есть свойства эквивалентны. Но (16), в отличие от (4) применимо для ориентированных узлов и с учетом нормировки (11) дает:



(17)

Сотношение (17) вместе с требованием ($J(L) = 1 \ \ \forall L \sim \bigcirc$) однозначно определяют полином Джонса. (с.46 В.В.Прасолов и А.Б.Сосинский 1997). Также (17) позволяет доказать следующее свойство:

Th 5.1. *Полином Джонса зацеплений с* ***нечетным*** *числом компонент связности содержит только* ***четные*** *степени q и наоборот.*

Список литературы

Khovanov, Mikhail (2000). «A categorification of the Jones polynomial». В: *Duke Mathematical Journal* 101.3, с. 359—426. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.math/9908171.

В.В.Прасолов и А.Б.Сосинский (1997). *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия.* МЦНМО.

[1] Хотя обычно в литературе полином Джонса $\tilde{J}$ определяют как $\tilde{J}(t, L) := J(-\sqrt{t}, L)$