

Полиномы Хованова-Рожанского

Московский Физико-Технический Институт
Лаборатория Математической и Теоретической Физики

Авторы:

Артем Новохатний
Екатерина Цыганкова
Эльдар Мифтахов

Научные руководители:

Елена Ланина
Радомир Степанов

12 октября 2025 г.

Содержание

1	Полиномы Джонса	1
1.1	Вопросы	1
2	\mathcal{R} -матрицы	1

1 Полиномы Джонса

1.1 Вопросы

- Можно ли из скобки Кауффмана получить полином Кауффмана?
- Какие допаксиомы нужны, чтобы определить полином Джонса через скейн-соотношение на перекрестки?
- Добавить другие степени в левой части скейн-соотношения. Будет ли это ещё инвариантом?
- Джонс нормируется на аннот. Как нормировать Ховановых?

2 \mathcal{R} -матрицы

$$\mathcal{R} : V_1 \otimes V_2 \rightarrow V_2 \otimes V_1, \quad \mathbb{P} - \text{обычный оператор перестановки} \quad (1)$$

Условие перестановочности (инвариантности):

$$\forall g \in \mathfrak{g} \quad \Delta g \mathcal{R} = \mathcal{R} \mathbb{P} \Delta g \mathbb{P}^{-1} \quad (2)$$

Уравнения Янга-Бакстера:

$$(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I}) = (\mathbb{I} \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \mathcal{R}) \quad (3)$$

Th 2.1. Если выполняется условие перестановочности, то выполняются и уравнения Янга-Бакстера

Доказательство:
Разложим Δg :

$$\Delta g = \sum g_{(1)} \otimes g_{(2)} \quad (4)$$

Тензорный куб определяется следующим образом (тут сразу показано также условие коассоциативности):

$$\Delta^{\circ 2} g = (\Delta \otimes \mathbb{I})\Delta g = (\mathbb{I} \otimes \Delta)\Delta g \quad (5)$$

Используем (4) и введём следующее обозначение:

$$\Delta^{\circ 2} g = (\Delta \otimes \mathbb{I})\Delta g = \sum \Delta(g_{(1)}) \otimes g_{(2)} = \sum g_{(1,1)} \otimes g_{(1,2)} \otimes g_{(2)} \quad (6)$$

Теперь посмотрим на следующее:

$$((\Delta \otimes \mathbb{I})\Delta g) \circ (\mathcal{R} \otimes \mathbb{I}) = \sum \Delta(g_{(1)})\mathcal{R} \otimes g_{(2)} = (\mathcal{R} \otimes \mathbb{I}) \sum \mathbb{P}\Delta(g_{(1)})\mathbb{P}^{-1} \otimes g_{(2)} \quad (7)$$

Посмотрим внимательнее на $\mathbb{P}\Delta(g_{(1)})\mathbb{P}^{-1}$:

$$\mathbb{P}\Delta(g_{(1)})\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}(g_{(1,1)} \otimes g_{(1,2)})\mathbb{P}^{-1} = g_{(1,2)} \otimes g_{(1,1)} \quad (8)$$

Возвращаясь к (7), получаем:

$$((\Delta \otimes \mathbb{I})\Delta g) \circ (\mathcal{R} \otimes \mathbb{I}) = (\mathcal{R} \otimes \mathbb{I}) \sum g_{(1,2)} \otimes g_{(1,1)} \otimes g_{(2)} \quad (9)$$

Проделявая аналогичные рассуждения получаем:

$$((\Delta \otimes \mathbb{I})\Delta g) \circ (\mathcal{R} \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I}) = (\mathcal{R} \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I}) \sum g_{(2)} \otimes g_{(1,2)} \otimes g_{(1,1)} \quad (10)$$

Аналогично получаем:

$$((\mathbb{I} \otimes \Delta)\Delta g) \circ (\mathbb{I} \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \mathcal{R}) = (\mathbb{I} \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \mathcal{R}) \sum g_{(2,2)} \otimes g_{(2,1)} \otimes g_{(1)} \quad (11)$$

Введём обозначения:

$$A = (\mathcal{R} \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I}) \quad (12)$$

$$B = (\mathbb{I} \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \mathcal{R}) \quad (13)$$

В силу коассоциативности:

$$\sum g_{(1,1)} \otimes g_{(1,2)} \otimes g_{(2)} = \sum g_{(1)} \otimes g_{(2,1)} \otimes g_{(2,2)} = \Delta^{\circ 2} g \quad (14)$$

Значит (10) и (11) переписываются так:

$$\Delta^{\circ 2} g \circ A = A \circ \Delta^{\circ 2} g \quad (15)$$

$$\Delta^{\circ 2} g \circ B = B \circ \Delta^{\circ 2} g \quad (16)$$

Получаются операторы A и B коммутируют со всеми элементами тензорного куба. Осталось разобрать случаи, когда тензорный куб является неприводимым представлением, и когда - приводимым.

Если тензорный куб неприводим, то по лемме Шура операторы A и B могут отличаться только домножением на константу:

$$A = \lambda B \quad (17)$$

Воспользуемся тем, что $\mathcal{R}_{ii}^{ii} = q$:

$$A(v_+ \otimes v_+ \otimes v_+) = q^3(v_+ \otimes v_+ \otimes v_+) \quad (18)$$

$$B(v_+ \otimes v_+ \otimes v_+) = q^3(v_+ \otimes v_+ \otimes v_+) \quad (19)$$

Значит $\lambda = 1$ и теорема доказана.

Если же тензорный куб приводим, то (17) запишется для каждой неприводимой компоненты со своим λ_i . (надо бы как-то показать, что эти лямбды - единички)