Полиномы Джонса

Глобальная задача:

Найти инварианты узлов, которые бы позволили различать их между собой. Привести эффективный алгоритм их вычисления.

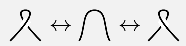
Локальная задача:

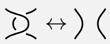
Построить инвариантный полином Джонса через скобку Кауфмана, привести алгоритм вычисления, исследовать свойства и вычислить значение на примере простых узлов.

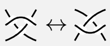
---

1 Инварианты узлов

Th 1.1. *(Reidemeister 1927)*
Две диаграммы соответствуют изотопным зацеплениям тогда и только тогда, когда их можно получить одну из другой с помощью конечного числа плоских изотопий и преобразований трех типов:

Ω_1 :  (1)

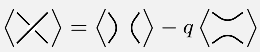
Ω_2 :  (2)

Ω_3 :  (3)

Теорема 1.1 показывает, что при построении инвариантов узлов достаточно проверить, что они сохраняются на преобразованиях Рейдемейстера $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$

2 Скобка Кауфмана

Def 2.1. Аксиомы скобки Кауфмана (**khovanov**):

 (4)

$$\langle L_1 \cup L_2 \rangle = \langle L_1 \rangle \langle L_2 \rangle \tag{5}$$

$$\langle \bigcirc \rangle = q + q^{-1} \tag{6}$$

Под отрицательным сглаживанием будем понимать первое разрешение в (4), а положительным - второе[1]. Каждый перекресток в узле мы можем сгладить одним из этих двух способов. Сгладив все n перекрёстков, мы получим диаграмму из некоторого числа p кружочков. Всего у нас 2^n таких диаграмм, которые мы будем именовать состояниями s, каждое из которых соответствует разным сглаживаниям с γ положительных сглаживаний. Тогда исходя из 2.1 получаем выражение для скобки Кауфмана в виде статсуммы:

$$\langle L \rangle = \sum_s (-q)^\gamma (q + q^{-1})^p \tag{7}$$

Для разъяснения построения (7) см. Рис.1

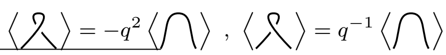
Заметим, что кружочку можно сопоставить двумерное градуированное пространство V, размерность которого будет $\dim V = q + q^{-1}$. Тогда (7) перепишется как:

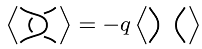
$$\langle L \rangle = \sum_s (-q)^\gamma (\dim V)^p \tag{8}$$

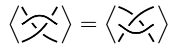
Это наблюдение будет полезно для дальнейшей работы с полиномами Хованова.

3 Полином Джонса как нормализация скобки Кауфмана

Скобка Кауфмана на ходах Рейдемейстера:

 (9)

 (10)

 (11)

Попробуем сделать скобку Кауфмана инвариантной. Введём понятия положительного и отрицательного пересечения:

$+$:  , $-$:  (12)

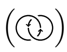
Количесво положительных и отрицательных перекрёстков в узле обозначим n_+ и n_- соответственно. Попробуем результат скобки Кауфмана домножить на моном вида $(-1)^{an_+ + bn_-} q^{cn_+ + dn_-}$, чтобы добиться инвариантности. Получаем следующий инвариантный полином:

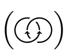
$$J(q, L) = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \frac{\langle L \rangle}{\langle \bigcirc \rangle} \tag{13}$$

Под полиномом Джонса будем понимать именно (13) [2].

4 Примеры вычисления и свойства полинома Джонса

Пример 1: посчитаем зацепления Хопфа разной ориентации:

$J\Big($  $\Big) = q + q^5$ (14)

$J\Big($  $\Big) = q^{-1} + q^{-5}$ (15)

Пример 2: левый и правый трилистник:

$J\Big($  $\Big) = q^2 + q^6 - q^8$ (16)

$J\Big($  $\Big) = q^{-2} + q^{-6} - q^{-8}$ (17)

В ответах прослеживается закономерность относительно степеней q. Этот факт оказывается общим для полинома Джонса:

Th 4.1 (О полиноме Джонса зеркального узла).

$$J(q, L) = J(q^{-1}, \bar{L}),\ \bar{L} \text{ - зеркальный узел} \tag{18}$$

Доказать 4.1 довольно просто, используя определение скобки Кауфмана в виде статсуммы.

[1] Важно отметить, что если перекресток поменяется на противоположный, то и обозначения сглаживаний поменяются местами

[2] Хотя обычно в литературе полином Джонса $\tilde{J}$ определяют как $\tilde{J}(t, L) := J(-\sqrt{t}, L)$

5 Определение полинома Джонса через skein-соотношение

Используя свойство (4) для противоположных перекрестков, получим:

$$\begin{cases} \langle \times \rangle = \langle)(\rangle - q \langle \asymp \rangle & | \cdot q^{-1} \\ \langle \times \rangle = \langle \asymp \rangle - q \langle)(\rangle \end{cases} + \qquad (19)$$

$$q^{-1} \langle \times \rangle + \langle \times \rangle = (q^{-1} - q) \langle)(\rangle \qquad (20)$$

Аналогично можно наоборот из (20) получить (4), то есть свойства эквивалентны. Но (20), в отличие от (4) применимо для ориентированных узлов и с учетом нормировки (13) дает:

$$q^{-2} J\left(\times\right) - q^2 J\left(\times\right) = (q^{-1} - q) J\left()(\right) \qquad (21)$$

Сотношение (21) вместе с требованием ($J(L) = 1 \ \forall L \sim \bigcirc$) однозначно определяют полином Джонса. (с.46 **prasolov-sossinsky**). Также (21) позволяет доказать следующее свойство:

Th 5.1. *Полином Джонса зацеплений с* ***нечетным*** *числом компонент связности содержит только* ***четные*** *степени q и наоборот.*

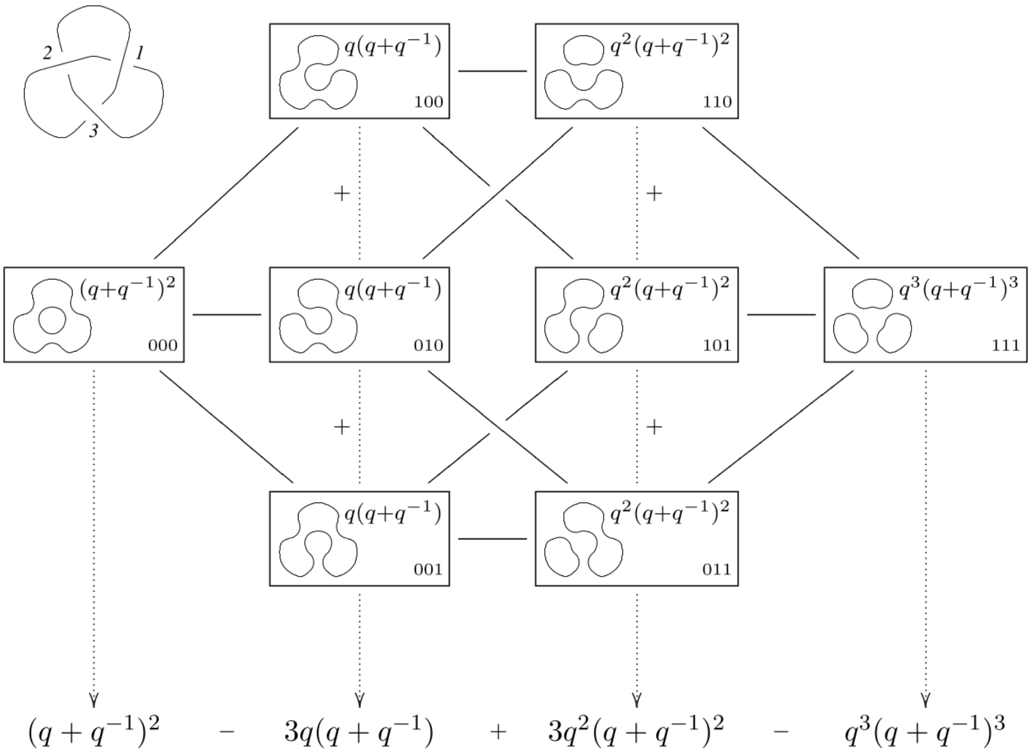


Рис. 1: Пояснение к скобке Кауфмана, как статсумме (**bar-natan**)