Полиномы Хованова-Рожанского

Московский Физико-Технический Институт

Лаборатория Математической и Теоретической Физики

Авторы:	**Научные руководители:**
Артем Новохатний	Елена Ланина
Екатерина Цыганкова	Радомир Степанов
Эльдар Мифтахов	

12 октября 2025 г.

Содержание

1 Полиномы Джонса

1.1 Вопросы

- Можно ли из скобки Кауффмана получить полином Кауффмана?
- Какие допаксиомы нужны, чтобы определить полином Джонса через скейн-соотношение на перекрестки?
- Добавить другие степени в левой части скейн-соотношения. Будет ли это ещё инвариантом?
- Джонс нормируется на аннот. Как нормировать Хованових?

2 $\mathcal{R}$-матрицы

$$\mathcal{R} : V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1, \quad \mathbb{P} - \text{обычный оператор перестановки} \tag{1}$$

Условие перестановочности (инвариантности):

$$\forall g \in \mathfrak{g} \qquad \Delta g \mathcal{R} = \mathcal{R}\mathbb{P}\Delta g \mathbb{P}^{-1} \tag{2}$$

Уравнения Янга-Бакстера:

$$(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I}) = (\mathbb{I} \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \mathcal{R}) \tag{3}$$

Th 2.1. *Если выполняется условие перестановочности, то выполняются и уравнения Янга-Бакстера*

Доказательство:
Разложим Δg:

$$\Delta g = \sum g_{(1)} \otimes g_{(2)} \tag{4}$$

Тензорный куб определяется следующим образом (тут сразу показано также условие коассоциативности):

$$\Delta^{\circ 2} g = (\Delta \otimes \mathbb{I})\Delta g = (\mathbb{I} \otimes \Delta)\Delta g \tag{5}$$

Используем (4) и введём следующее обозначение:

$$\Delta^{\circ 2} g = (\Delta \otimes \mathbb{I})\Delta g = \sum \Delta(g_{(1)}) \otimes g_{(2)} = \sum g_{(1,1)} \otimes g_{(1,2)} \otimes g_{(2)} \tag{6}$$

Теперь посмотрим на следующее:

$$((\Delta \otimes \mathbb{I})\Delta g) \circ (\mathcal{R} \otimes \mathbb{I}) = \sum \Delta(g_{(1)})\mathcal{R} \otimes g_{(2)} = (\mathcal{R} \otimes \mathbb{I}) \sum \mathbb{P}\Delta(g_{(1)})\mathbb{P}^{-1} \otimes g_{(2)} \tag{7}$$

Посмотрим внимательнее на $\mathbb{P}\Delta(g_{(1)})\mathbb{P}^{-1}$:

$$\mathbb{P}\Delta(g_{(1)})\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}(g_{(1,1)} \otimes g_{(1,2)})\mathbb{P}^{-1} = g_{(1,2)} \otimes g_{(1,1)} \tag{8}$$

Возвращаясь к (7), получаем:

$$((\Delta \otimes \mathbb{I})\Delta g) \circ (\mathcal{R} \otimes \mathbb{I}) = (\mathcal{R} \otimes \mathbb{I}) \sum g_{(1,2)} \otimes g_{(1,1)} \otimes g_{(2)} \tag{9}$$

Проделывая аналогичные рассуждения получаем:

$$((\Delta \otimes \mathbb{I})\Delta g) \circ (\mathcal{R} \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I}) = (\mathcal{R} \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I}) \sum g_{(2)} \otimes g_{(1,2)} \otimes g_{(1,1)} \tag{10}$$

Аналогично получаем:

$$((\mathbb{I} \otimes \Delta)\Delta g) \circ (\mathbb{I} \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \mathcal{R}) = (\mathbb{I} \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \mathcal{R}) \sum g_{(2,2)} \otimes g_{(2,1)} \otimes g_{(1)} \tag{11}$$

Введём обозначения:

$$A = (\mathcal{R} \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I}) \tag{12}$$

$$B = (\mathbb{I} \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \mathcal{R}) \tag{13}$$

В силу коассоциативности:

$$\sum g_{(1,1)} \otimes g_{(1,2)} \otimes g_{(2)} = \sum g_{(1)} \otimes g_{(2,1)} \otimes g_{(2,2)} = \Delta^{\circ 2} g \tag{14}$$

Значит (10) и (11) переписываются так:

$$\Delta^{\circ 2} g \circ A = A \circ \Delta^{\circ 2} g \tag{15}$$

$$\Delta^{\circ 2} g \circ B = B \circ \Delta^{\circ 2} g \tag{16}$$

Получается операторы A и B коммутируют со всеми элементами тензорного куба. Осталось разобрать случаи, когда тензорный куб является неприводимым представлением, и когда - приводимым.

Если тензорный куб неприводим, то по лемме Шура операторы A и B могут отличатся только домножением на константу:

$$A = \lambda B \tag{17}$$

Воспользуемся тем, что $\mathcal{R}^{ii}_{ii} = q$:

$$A(v_+ \otimes v_+ \otimes v_+) = q^3(v_+ \otimes v_+ \otimes v_+) \tag{18}$$

$$B(v_+ \otimes v_+ \otimes v_+) = q^3(v_+ \otimes v_+ \otimes v_+) \tag{19}$$

Значит $\lambda = 1$ и теорема доказана.

Если же тензорный куб приводим, то (17) запишется для каждой неприводимой компоненты со своим λ_i. (надо бы как-то показать, что эти лямбды - единички)