Полиномы Хованова

Глобальная задача:

Найти инварианты узлов, которые бы позволили различать их между собой. Привести эффективный алгоритм их вычисления.

Локальная задача:

...

1 Пара слов о скобке Кауфмана

В предыдущий раз было предложено рассмотреть следующую конструкцию построения скобки Кауфмана:

$$\left\langle \times \right\rangle = a \cdot \left\langle)(\right\rangle + b \cdot \left\langle \asymp \right\rangle \tag{1}$$

$$\left\langle \bigcirc \right\rangle = c \tag{2}$$

$$\langle L_1 \cup L_2 \rangle = d \cdot \langle L_1 \rangle \langle L_2 \rangle \tag{3}$$

И подобрать коэффициенты a, b, c, d исходя из инваринатности относительно всех ходов Рейдемейстера.

Получаем три решения:

$$a = b = -1, \quad cd = -2 \tag{4}$$

$$a = e^{\pm \frac{i\pi}{3}}, \quad b = e^{\mp \frac{i\pi}{3}}, \quad cd = 1 \tag{5}$$

Данные полиномы оказываются слабыми: (4) различает только количество компонент зацепления, а (5) даёт одинаковые результаты для кружка, трилистника и зацепления Хопфа.

2 Переход от полинома Джонса к полиному Хованова. Гиперкуб, морфизмы

Напомним, что под отрицательным сглаживанием (или 0-сглаживанием) будем понимать первое разрешение в (1), а положительным (или 1-сглаживанием) - второе. Пользуясь этой терминологией мы построили ненормализованный полином Джонса в виде статсуммы:

$$\langle L \rangle = \sum_{\alpha} (-q)^r (q + q^{-1})^k \tag{6}$$

Основная идея дальнейших рассуждений - заменить полиномы на вектроные пространства нужной градуировки, получив тем самым уже объект гомологической алгебры.

Для дальнейших рассуждений полезно ориантироваться на Рис. 1, а также ввести следующие определения:

Def 2.1. Квантовой размерностью градуированного векторного пространства $W = \bigoplus_m W_m$ будем называть $q \dim W = \sum_m q^m \dim W_m$

Def 2.2. Будем называть $\cdot\{l\}$ операцией сдвига степени на градуированных векторных пространствах, если $W_m\{l\} = W_{m+l}$. Нам важно, что тогда $q \dim W\{l\} = q^l \cdot q \dim W$

Определение 2.1 даёт нам возможность ассоциировать с кружочком градуированное простанство $V = V_{+1} \oplus V_{-1}$:

$$\left\langle \bigcirc \right\rangle = q \dim V = q + q^{-1} \tag{7}$$

Пусть χ - множество всех перекрестков, $|\chi| = n$. Тогда вектора $\alpha \in \{0,1\}^{\chi}$ естественным образом кодируют все разрешения. При потсроении гиперкуба мы начинаем с нулевого вектора (т.е. все перекрестки сглажены отрицательно). В следующем слое находятся вектора, отличающиеся от нулевого заменой одного из нулей на единицу. Будем продолжать по аналогии и у нас получатся 2^n вершин, каждая из которых соединена с другими ровно $n-1$ ребром - именно поэтому будем называть получившуюся конструкцию гиперкубом.

Если бы в каждой вершине мы посчитали бы скобку Кауфмана и сложили результаты с учётом знаков, мы получили бы в точности (6) и опять полином Джонса. Но теперь, каждой вершине мы припишем векторное пространство $V_\alpha = V^{\otimes k}\{r\}$, где k - количество кружочков, $r = |\alpha|$ - количество положительных сглаживаний.

Теперь будем двигаться в сторону построения цепного комплекса. В качестве цепных групп возьмем $[\![L]\!]^r = \bigoplus_{\alpha : r = |\alpha|} V_\alpha$

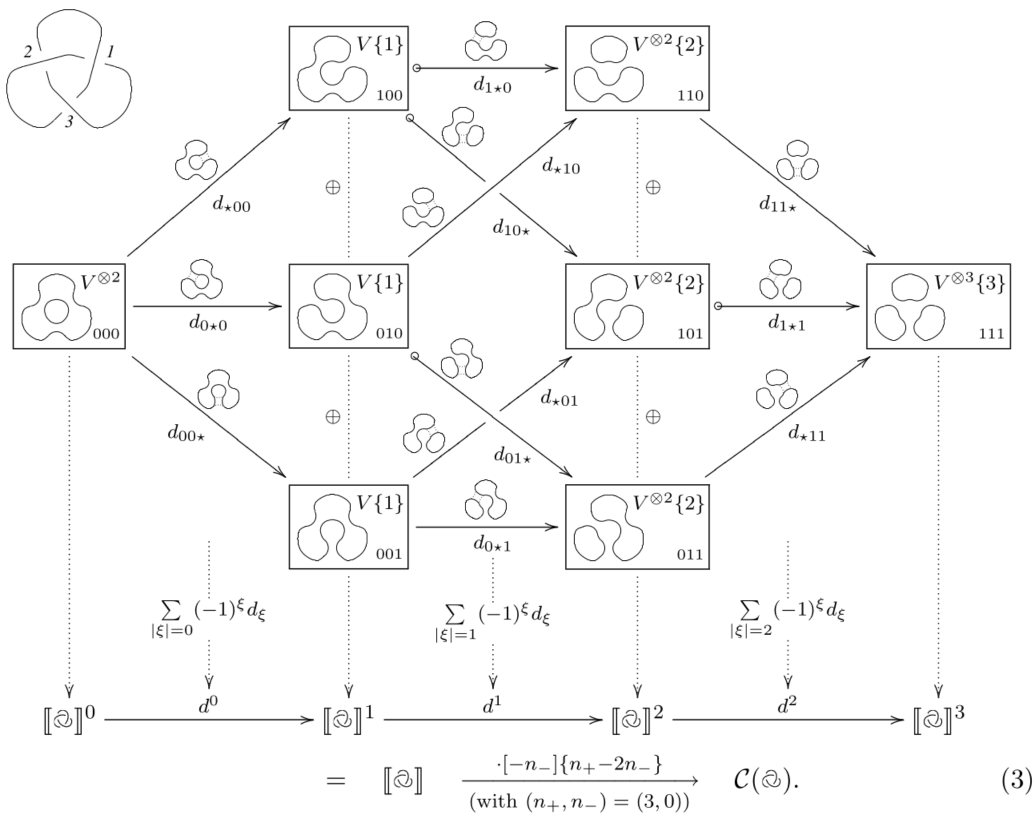

Рис. 1: Пояснение к построению полинома Хованова (**bar-natan**)