

Полиномы Джонса

Глобальная задача:

Найти инварианты узлов, которые бы позволили различать их между собой. Привести эффективный алгоритм их вычисления.

Локальная задача:

Построить инвариантный полином Джонса через скобку Кауфмана, привести алгоритм вычисления, исследовать свойства и вычислить значение на примере простых узлов.

1 Инварианты узлов

Th 1.1. (Reidemeister 1927)

Две диаграммы соответствуют изотопным зацеплениям тогда и только тогда, когда их можно получить одну из другой с помощью конечного числа плоских изотопий и преобразований трех типов:

$$\Omega_1: \quad \text{↗↘} \leftrightarrow \text{↖↙} \leftrightarrow \text{↗↘} \quad (1)$$

$$\Omega_2: \quad \text{↗↘} \leftrightarrow \langle \rangle \quad (2)$$

$$\Omega_3: \quad \text{↗↘} \leftrightarrow \text{↘↗} \quad (3)$$

Теорема 1.1 показывает, что при построении инвариантов узлов достаточно проверить, что они сохраняются на преобразованиях Рейдемейстера $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$

2 Скобка Кауфмана

Def 2.1. Аксиомы скобки Кауфмана (Khovanov 2000):

$$\langle \text{↗↘} \rangle = \langle \rangle \langle \rangle - q \langle \text{↘↗} \rangle \quad (4)$$

$$\langle L_1 \cup L_2 \rangle = \langle L_1 \rangle \langle L_2 \rangle \quad (5)$$

$$\langle \bigcirc \rangle = q + q^{-1} \quad (6)$$

Под отрицательным сглаживанием будем понимать первое разрешение в (4), а положительным - второе¹. Каждый перекресток в узле мы можем сгладить одним из этих двух способов. Сгладив все n перекрёстков, мы получим диаграмму из некоторого числа p кружочков. Всего у нас 2^n таких диаграмм, которые мы будем именовать состояниями s , каждое из которых соответствует разным сглаживаниям с γ положительных сглаживаний. Тогда исходя из 2.1 получаем выражение для скобки Кауфмана в виде статсуммы:

$$\langle L \rangle = \sum_s (-q)^\gamma (q + q^{-1})^p \quad (7)$$

Для разъяснения построения (7) см. Рис.1

Заметим, что кружочку можно сопоставить двумерное градуированное пространство V , размерность которого будет $\dim V = q + q^{-1}$. Тогда (7) переписится как:

$$\langle L \rangle = \sum_s (-q)^\gamma (\dim V)^p \quad (8)$$

Это наблюдение будет полезно для дальнейшей работы с полиномами Хованова.

3 Полином Джонса как нормализация скобки Кауфмана

Скобка Кауфмана на ходах Рейдемейстера:

$$\langle \text{↗↘} \rangle = -q^2 \langle \text{↖↙} \rangle, \quad \langle \text{↗↘} \rangle = q^{-1} \langle \text{↘↗} \rangle \quad (9)$$

¹ Важно отметить, что если перекресток поменяется на противоположный, то и обозначения сглаживаний поменяются местами

² Хотя обычно в литературе полином Джонса \bar{J} определяют как $\bar{J}(t, L) := J(-\sqrt{t}, L)$

$$\langle \text{↗↘} \rangle = -q \langle \rangle \langle \rangle \quad (10)$$

$$\langle \text{↗↘} \rangle = \langle \text{↘↗} \rangle \quad (11)$$

Попробуем сделать скобку Кауфмана инвариантной. Введём понятия положительного и отрицательного пересечения:

$$+ : \text{↗↘}, \quad - : \text{↘↗} \quad (12)$$

Количество положительных и отрицательных перекрёстков в узле обозначим n_+ и n_- соответственно. Попробуем результат скобки Кауфмана домножить на моном вида $(-1)^{an_+ + bn_-} q^{cn_+ + dn_-}$, чтобы добиться инвариантности. Получаем следующий инвариантный полином:

$$J(q, L) = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \frac{\langle L \rangle}{\langle \bigcirc \rangle} \quad (13)$$

Под полиномом Джонса будем понимать именно (13)².

4 Примеры вычисления и свойства полинома Джонса

Пример 1: посчитаем зацепления Хопфа разной ориентации:

$$J(\text{⌚}) = q + q^5 \quad (14)$$

$$J(\text{⌚}) = q^{-1} + q^{-5} \quad (15)$$

Пример 2: левый и правый трилистник:

$$J(\text{⌚}) = q^2 + q^6 - q^8 \quad (16)$$

$$J(\text{⌚}) = q^{-2} + q^{-6} - q^{-8} \quad (17)$$

В ответах прослеживается закономерность относительно степеней q . Этот факт оказывается общим для полинома Джонса:

Th 4.1 (О полиноме Джонса зеркального узла).

$$J(q, L) = J(q^{-1}, \bar{L}), \quad \bar{L} - \text{зеркальный узел} \quad (18)$$

Доказать 4.1 довольно просто, используя определение скобки Кауфмана в виде статсуммы.

5 Определение полинома Джонса через skein-соотношение

Используя свойство (4) для противоположных перекрестков, получим:

$$\begin{cases} \langle \text{X} \rangle = \langle \text{ } \rangle - q \langle \text{ } \rangle \cdot q^{-1} \\ \langle \text{X} \rangle = \langle \text{ } \rangle - q \langle \text{ } \rangle \end{cases} \quad (19)$$

$$q^{-1} \langle \text{X} \rangle + \langle \text{X} \rangle = (q^{-1} - q) \langle \text{ } \rangle \quad (20)$$

Аналогично можно наоборот из (20) получить (4), то есть свойства эквивалентны. Но (20), в отличие от (4) применимо для ориентированных узлов и с учетом нормировки (13) дает:

$$q^{-2} J \left(\text{X} \right) - q^2 J \left(\text{X} \right) = (q^{-1} - q) J \left(\text{ } \right) \quad (21)$$

Сотношение (21) вместе с требованием $(J(L) = 1 \quad \forall L \sim \bigcirc)$ однозначно определяют полином Джонса. (с.46 В.В.Прасолов и А.Б.Сосинский 1997). Также (21) позволяет доказать следующее свойство:

Th 5.1. Полином Джонса зацеплений с **нечетным** числом компонент связности содержит только **четные** степени q и наоборот.

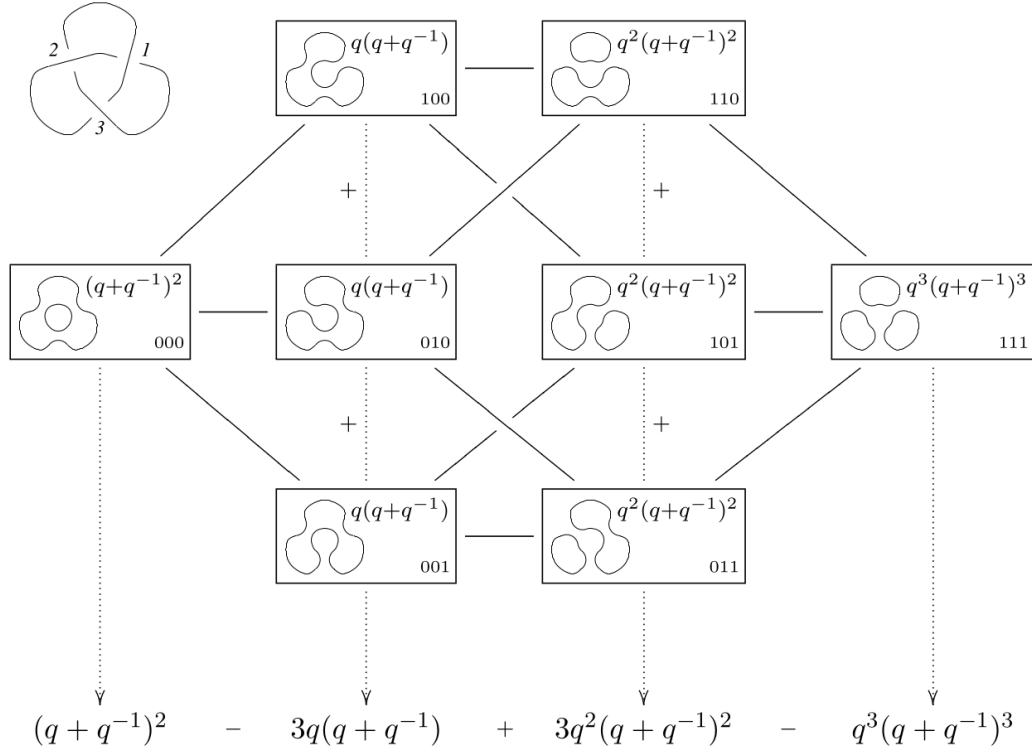


Рис. 1: Пояснение к скобке Кауфмана, как статсумме (Bar-Natan 2002)

Список литературы

- Bar-Natan, Dror (2002). «On Khovanov's categorification of the Jones polynomial». В: *Algebraic & Geometric Topology* 2 (1), с. 337–370. doi: 10.2140/agt.2002.2.337.
- Khovanov, Mikhail (2000). «A categorification of the Jones polynomial». В: *Duke Mathematical Journal* 101.3, с. 359–426. doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/9908171>.
- В.В.Прасолов и А.Б.Сосинский (1997). *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия*. МЦНМО.