

Полиномы Джонса

Глобальная задача:

Найти инварианты узлов, которые бы позволили различать их между собой. Привести эффективный алгоритм их вычисления.

Мотивация

...

1 Инварианты узлов

Th 1.1. (Reidemeister 1927)

Две диаграммы соответствуют изотопным зацеплениям тогда и только тогда, когда их можно получить одну из другой с помощью конечного числа плоских изотопий и преобразований трех типов:

$$\Omega_1: \text{ (crossing) } \leftrightarrow \text{ (cup) } \leftrightarrow \text{ (cap) } \quad (1)$$

$$\Omega_2: \text{ (positive crossing) } \leftrightarrow \text{ (negative crossing) } \quad (2)$$

$$\Omega_3: \text{ (positive crossing) } \leftrightarrow \text{ (negative crossing) } \quad (3)$$

2 Скобка Кауфмана

Def 2.1. Аксиомы скобки Кауфмана (Khovanov 2000):

- $\langle \text{ (crossing) } \rangle = \langle \text{ (cup) } \rangle \langle \text{ (cap) } \rangle - q \langle \text{ (cup) } \rangle \langle \text{ (cap) } \rangle$
- $\langle L_1 \cup L_2 \rangle = \langle L_1 \rangle \langle L_2 \rangle$
- $\langle \text{ (circle) } \rangle = q + q^{-1}$

3 Полином Джонса как нормализация скобки Кауфмана

Скобка Кауфмана на ходах Рейдемейстера:

$$\langle \text{ (crossing) } \rangle = -q^2 \langle \text{ (cup) } \rangle, \quad \langle \text{ (crossing) } \rangle = q^{-1} \langle \text{ (cup) } \rangle \quad (4)$$

Список литературы

Khovanov, Mikhail (2000). «A categorification of the Jones polynomial». В: *Duke Mathematical Journal* 101.3, с. 359—426. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/9908171>.

Локальная задача:

Построить инвариантный полином Джонса через скобку Кауфмана, привести алгоритм вычисления, исследовать свойства и вычислить значение на примере простых узлов.

$$\langle \text{ (crossing) } \rangle = -q \langle \text{ (cup) } \rangle \langle \text{ (cap) } \rangle \quad (5)$$

$$\langle \text{ (positive crossing) } \rangle = \langle \text{ (negative crossing) } \rangle \quad (6)$$

Попробуем сделать скобку Кауфмана инвариантной. Введём понятия положительного и отрицательного пересечения:

$$+ : \text{ (positive crossing) }, \quad - : \text{ (negative crossing) } \quad (7)$$

Количество положительных и отрицательных перекрёстков в узле обозначим n_+ и n_- соответственно. Попробуем результат скобки Кауфмана домножить на моном вида $(-1)^{an_+ + bn_-} q^{cn_+ + dn_-}$, чтобы добиться инвариантности. Получаем следующий инвариантный полином:

$$J(q, L) = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \frac{\langle L \rangle}{\langle \text{ (circle) } \rangle} \quad (8)$$

Под полиномом Джонса будем понимать именно (8).

4 Примеры вычисления и свойства полинома Джонса

Пример 1: посчитаем зацепления Хопфа разной ориентации:

$$J \left(\text{ (Hopf link) } \right) = q + q^5 \quad (9)$$

$$J \left(\text{ (Hopf link) } \right) = q^{-1} + q^{-5} \quad (10)$$

Пример 2: левый и правый трилистник:

$$J \left(\text{ (trefoil) } \right) = -q^{-2} - q^{-6} + q^{-8} \quad (11)$$