Полиномы Джонса

Глобальная задача:

Найти инварианты узлов, которые бы позволили различать их между собой. Привести эффективный алгоритм их вычисления.

Локальная задача:

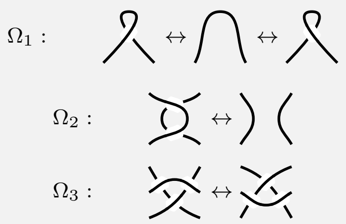
Построить инвариантный полином Джонса через скобку Кауфмана, привести алгоритм вычисления, исследовать свойства и вычислить значение на примере простых узлов.

Мотивация

...

1 Инварианты узлов

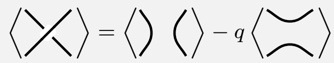
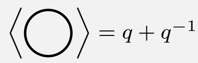
Th 1.1. *(Reidemeister 1927)*
Две диаграмы соответствуют изотопным зацеплениям тогда и только тогда, когда их можно получить одну из другой с помощью конечного числа плоских изотопий и преобразований трех типов:



(1) (2) (3)

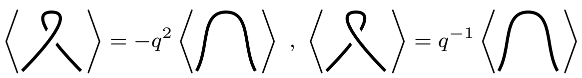
2 Скобка Кауфмана

Def 2.1. Аксиомы скобки Кауфмана (Khovanov 2000):

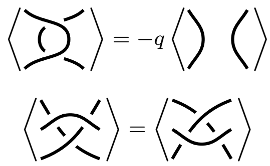
1. 
2. $\langle L_1 \cup L_2 \rangle = \langle L_1 \rangle \langle L_2 \rangle$
3. 

3 Полином Джонса как нормализация скобки Кауфмана

Скобка Кауфмана на ходах Рейдемейстера:

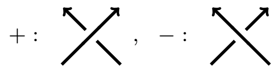


(4)



(5) (6)

Попробуем сделать скобку Кауфмана инвариантной. Введём понятия положительного и отрицательного пересечения:



(7)

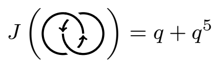
Количесво положительных и отрицательных перекрёстков в узле обозначим n_+ и n_- соответственно. Попробуем результат скобки Кауфмана домножить на моном вида $(-1)^{an_+ + bn_-} q^{cn_+ + dn_-}$, чтобы добиться инвариантности. Получаем следующий инвариантный полином:

$$J(q, L) = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \frac{\langle L \rangle}{\langle \bigcirc \rangle} \tag{8}$$

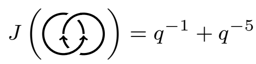
Под полиномом Джонса будем понимать именно (8).

4 Примеры вычисления и свойства полинома Джонса

Пример 1: посчитаем зацепления Хопфа разной ориентации:

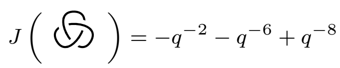


(9)



(10)

Пример 2: левый и правый трилистник:



(11)

Список литературы

Khovanov, Mikhail (2000). «A categorification of the Jones polynomial». В: *Duke Mathematical Journal* 101.3, с. 359—426. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.math/9908171.