

# Полиномы Джонса

## Глобальная задача:

Найти инварианты узлов, которые бы позволили различать их между собой. Привести эффективный алгоритм их вычисления.

## 1 Инварианты узлов

**Th 1.1.** (Reidemeister 1927)

Две диаграммы соответствуют изотопным зацеплениям тогда и только тогда, когда их можно получить одну из другой с помощью конечного числа плоских изотопий и преобразований трех типов:

$$\Omega_1: \quad \text{↗↘} \leftrightarrow \text{↖↙} \leftrightarrow \text{↗↘} \quad (1)$$

$$\Omega_2: \quad \text{↗↘} \leftrightarrow \text{↖↙} \quad (2)$$

$$\Omega_3: \quad \text{↗↘} \leftrightarrow \text{↖↙} \quad (3)$$

Теорема 1.1 показывает, что при построении инвариантов узлов достаточно проверить, что они сохраняются на преобразованиях Рейдемейстера  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$

## 2 Скобка Кауфмана

**Def 2.1.** Аксиомы скобки Кауфмана (Khovanov 2000):

$$\langle \text{↗↘} \rangle = \langle \text{↖↙} \rangle - q \langle \text{↗↘} \rangle \quad (4)$$

$$\langle L_1 \cup L_2 \rangle = \langle L_1 \rangle \langle L_2 \rangle \quad (5)$$

$$\langle \bigcirc \rangle = q + q^{-1} \quad (6)$$

## 3 Полином Джонса как нормализация скобки Кауфмана

Скобка Кауфмана на ходах Рейдемейстера:

$$\langle \text{↗↘} \rangle = -q^2 \langle \text{↖↙} \rangle, \quad \langle \text{↖↙} \rangle = q^{-1} \langle \text{↗↘} \rangle \quad (7)$$

$$\langle \text{↗↘} \rangle = -q \langle \text{↖↙} \rangle \quad (8)$$

$$\langle \text{↗↘} \rangle = \langle \text{↖↙} \rangle \quad (9)$$

Попробуем сделать скобку Кауфмана инвариантной. Введём понятия положительного и отрицательного пересечения:

$$+: \text{↗↘}, \quad -: \text{↖↙} \quad (10)$$

Количество положительных и отрицательных перекрёстков в узле обозначим  $n_+$  и  $n_-$  соответственно. Попробуем результат скобки Кауфмана домножить на моном вида

## Локальная задача:

Построить инвариантный полином Джонса через скобку Кауфмана, привести алгоритм вычисления, исследовать свойства и вычислить значение на примере простых узлов.

$(-1)^{an_+ + bn_-} q^{cn_+ + dn_-}$ , чтобы добиться инвариантности. Получаем следующий инвариантный полином:

$$J(q, L) = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \frac{\langle L \rangle}{\langle \bigcirc \rangle} \quad (11)$$

Под полиномом Джонса будем понимать именно (11)<sup>1</sup>.

## 4 Примеры вычисления и свойства полинома Джонса

**Пример 1:** посчитаем зацепления Хопфа разной ориентации:

$$J(\text{↗↘}) = q + q^5 \quad (12)$$

$$J(\text{↖↙}) = q^{-1} + q^{-5} \quad (13)$$

**Пример 2:** левый и правый трилистник:

$$J(\text{↗↘↗}) = -q^{-2} - q^{-6} + q^{-8} \quad (14)$$

## 5 Определение полинома Джонса через skein-соотношение

Используя свойство (4) для противоположных перекрёстков, получим:

$$\begin{cases} \langle \text{↗↘} \rangle = \langle \text{↖↙} \rangle - q \langle \text{↗↘} \rangle \\ \langle \text{↖↙} \rangle = \langle \text{↗↘} \rangle - q \langle \text{↖↙} \rangle \end{cases} \quad (15)$$

$$q^{-1} \langle \text{↗↘} \rangle + \langle \text{↖↙} \rangle = (q^{-1} - q) \langle \text{↖↙} \rangle \quad (16)$$

Аналогично можно наоборот из (16) получить (4), то есть свойства эквивалентны. Но (16), в отличие от (4) применимо для ориентированных узлов и с учетом нормировки (11) дает:

$$q^{-2} J(\text{↗↘}) - q^2 J(\text{↖↙}) = (q^{-1} - q) J(\text{↗↘}) \quad (17)$$

Сотношение (17) вместе с требованием  $(J(L) = 1 \quad \forall L \sim \bigcirc)$  однозначно определяют полином Джонса. (с.46 В.В.Прасолов и А.Б.Сосинский 1997). Также (17) позволяет доказать следующее свойство:

**Th 5.1.** Полином Джонса зацеплений с **нечетным** числом компонент связности содержит только **четные** степени  $q$  и наоборот.

## Список литературы

Khovanov, Mikhail (2000). «A categorification of the Jones polynomial». В: *Duke Mathematical Journal* 101.3, с. 359—426. doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/9908171>.  
В.В.Прасолов и А.Б.Сосинский (1997). *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия*. МЦНМО.

<sup>1</sup> Хотя обычно в литературе полином Джонса  $\bar{J}$  определяют как  $\bar{J}(t, L) := J(-\sqrt{t}, L)$