Урок 8

(1)

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}} \cdot X = \overset{\bar{b}}{\begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

1) найдем определитель матрицы

$$D_A = 1 \cdot 0 \cdot 9 + 2 \cdot 7 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 3 \cdot 0 \cdot 7 - 9 \cdot 4 \cdot 2 - 6 \cdot 8 \cdot 1 =$$
$$= 0 + 84 + 96 - 0 - 72 - 48 = 60 \neq 0 \Rightarrow 1 \text{ решение}$$

$$\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b} \quad ; \quad A^{-1} = \frac{A_*^T}{D_A}$$

2) найдем A^{-1}

2.1.) матрица миноров к A

$$M_A = \begin{pmatrix} -48 & -6 & 32 \\ -6 & -12 & -6 \\ 12 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

2.2.) матрица алгебраических дополнений

$$A_* = \begin{pmatrix} -48 & 6 & 32 \\ 6 & -12 & 6 \\ 12 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

2.3.) Транспонированная матрица алгебраических дополнений

$$A_*^T = \begin{pmatrix} -48 & 6 & 12 \\ 6 & -12 & 6 \\ 32 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

2.4) обратная матрица:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4/5 & 1/10 & 1/5 \\ 1/10 & -1/5 & 1/10 \\ 8/15 & 1/10 & -2/15 \end{pmatrix}$$

3)

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -4/5 & \frac{1}{10} & 1/5 \\ 1/10 & -1/5 & 1/10 \\ 8/15 & 1/10 & -2/15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9{,}6 + 0{,}2 + 0{,}5 \\ 1{,}2 - 0{,}4 + 0{,}1 \\ 6{,}4 + 0{,}2 - \frac{2}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8{,}9 \\ 0{,}9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Ответ: $(-8{,}9;\ 0{,}9;\ 6\,7/15)$

②

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 3x-4y=7 \\ 8x-5y+2z=12 \\ 2x-5z=7 \\ 11x+4y-7z=15 \end{cases} \qquad \overset{A}{\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 11 & 4 & -7 \end{pmatrix}} \quad \overset{b}{\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 12 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}} \quad \overset{x}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

1) Псевдорешение по методу наименьших квадратов

$\|r\|_2^2 = r^T r = (Ax-b)^T(Ax-b)$, где r – невязка (мера погрешности приближения)

Чтобы приблизить возможное решение, нужно найти минимум функции

$$\nabla \|r\|_2^2 = 2(A^TAx - A^Tb) \to \min$$

2) $A^TAx = Ab$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 & 11 \\ 2 & -4 & -5 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -5 & -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \\ 11 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 199 & -6 & -72 \\ -6 & 61 & -40 \\ -72 & -40 & 79 \end{pmatrix};$$

$$A^Tb = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 & 11 \\ 2 & -4 & -5 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -5 & -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 12 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 297 \\ -26 \\ -117 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 199 & -6 & -72 & 297 \\ -6 & 61 & -40 & -26 \\ -72 & -40 & 79 & -117 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Найдем базисное решение методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 199 & -6 & -72 & 297 \\ -6 & 61 & -40 & -26 \\ -72 & -40 & 79 & -117 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 199 & -6 & -7 & 297 \\ 0 & 64\frac{1}{3} & -46\frac{7}{12} & -26\frac{1}{4} \\ 0 & -272 & 559 & -117 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 199 & -6 & -72 & 297 \\ 0 & 64\frac{1}{3} & -46\frac{7}{12} & -26\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Найдем базисное решение

$$\begin{cases} x = \dfrac{297-6y-72z}{199} \\ y = \dfrac{-48{,}75 + 139{,}75z}{193} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y \approx -0{,}25 \\ x \approx 1{,}5 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}25 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ или в общем виде $\begin{pmatrix} \dfrac{297-6y-72z}{199} \\ \dfrac{-48{,}75+139{,}75z}{193} \\ z \end{pmatrix}$

Урок 8

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 8 \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 4 \cdot 2 \cdot 9 - 8 \cdot 6 \cdot 1 = 0$ ⇒ система вырожденная, нет решений

Псевдорешение:

1) обратная матрица:

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4/5 & 1/10 & 1/5 \\ 1/10 & -1/5 & 1/10 \\ 0{,}53 & 1/10 & -0{,}13 \end{pmatrix}$

2) $\bar{X} = A^{-1} \cdot b$

$X = \begin{pmatrix} -9{,}2 \\ 0{,}9 \\ 6{,}46 \end{pmatrix}$

ответ: $\begin{pmatrix} -9{,}2 \\ 0{,}9 \\ 6{,}46 \end{pmatrix}$

Урок 8

Задание 4

LU-разложение

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 16 & 21 \\ 4 & 28 & 73 \end{pmatrix} \Rightarrow A = LU$$

L

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}},$$

где $i > j$

U

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}$$

где $i \leq j$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{28-4\cdot 2}{12} & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 16-2\cdot 2 = 12 & 21-2\cdot 3 = 15 \\ 0 & 0 & 73-4\cdot 3 \ldots = \text{[illegible]} \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{20}{12} & 1 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 12 & 15 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$$

Урок 8

5 Найти нормальное псевдорешение

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 8x-5y+2z=12 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} A & X & B \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 8 & -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix} \end{array}$$ — недоопределенная система

$$\begin{cases} x = (z-2y+1) \\ 8(z-2y+1)-5y+2z=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z-2y+1 \\ 10z-21y=4 \end{cases}$$

$$z=2,1y+0,4$$

$$x=2,1y+0,4-2y+1=$$
$$=0,1y+1,4$$

$$X=\begin{pmatrix} 0,1y+1,4 \\ y \\ 2,1y+0,4 \end{pmatrix}$$

нужно найти минимум функции по методу наименьших квадратов

$$f(x)=(0,1y+1,4)^2+y^2+(2,1y+0,4)^2=$$

$$f(x)=6,42y^2+1,96y+2,12$$

$$f(x)\to \min, \text{ если } x_0=-\frac{1,96y}{2\cdot 6,42}+2,12=0$$

$$\frac{1,96y}{2\cdot 6,42}=-2,12;\ y\approx 13,88$$

$$z=2,1\cdot 13,88+0,4\approx 29,548$$

$$x=29,548-2\cdot 13,88+1\approx 2,788$$

Ответ: $(2,788;\ 13,88;\ 29,548)$

Задание 6.

Найти псевдорешение вырожденной системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

A X B

$\det A = 0$ (см. расчет из предыдущих заданий) $\Rightarrow$ матрица A вырожденная

$\Rightarrow$ можно найти псевдорешение. Рассчитав минимальную норму столбцов. Нужно найти невязку (максимально точное приближение решений). Запишем уравнение в виде

$A \cdot X + r = B$, где r – погрешность приближения Ax и B

Нужно найти минимум функции

$$r \approx f(x) = |A \cdot X - B| \to \min \Rightarrow$$

$|Ax - B| \to 0$. Применим метод наименьших квадратов

$$r^2 = |Ax - B|^2 \to \min$$

$$A^T A x = A^T B$$

$\Longrightarrow$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 78 & 90 \\ 78 & 93 & 48 \\ 90 & 108 & 126 \end{pmatrix}$$

$$A^Tb = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99 \\ 117 \\ 135 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 66 & 78 & 90 & 99 \\ 78 & 93 & 48 & 117 \\ 90 & 108 & 126 & 135 \end{array}\right) \xrightarrow{:3} \left(\begin{array}{ccc|c} 22 & 26 & 30 & 33 \\ 26 & 31 & 16 & 39 \\ 30 & 36 & 42 & 45 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{26}{22} & \frac{30}{22} & \frac{33}{22} \\ 1 & \frac{31}{26} & \frac{16}{26} & \frac{39}{26} \\ 10 & 12 & 14 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow{\times 10} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{26}{22} & \frac{30}{22} & \frac{33}{22} \\ 0 & \frac{341}{24} & \frac{-214}{24} & 0 \\ 0 & 4/22 & \frac{8}{22} & 0 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{26}{22} & \frac{30}{22} & \frac{33}{22} \\ 0 & 1 & 72974 & 0 \\ 0 & 1 & 32 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{26}{22} & \frac{30}{22} & \frac{33}{22} \\ 0 & 1 & 72974 & 0 \\ 0 & 0 & -72942 & 0 \end{array}\right)$$

Ответ: Псевдорешение в общем виде

$$\begin{cases} x + \frac{26}{22}y + \frac{30}{22}z = \frac{33}{22} \\ y + 72974z = 0 \\ -72942z = 0 \end{cases}$$

Нормальное псевдорешение

$$\begin{cases} x = \frac{33}{22} = \frac{3}{2} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

9.00
10.00
11.00
12.00
13.00
14.00
15.00
16.00
17.00
18.00
19.00