Zadanie domowe 1

Nina Mądra 268444

Probablistyczna aproksymacja całki

Generowanie n punktów z prostokąta $[a, b] \times [0, M]$

In [1]:
```
import random

def generatePoints(n, a, b, M):
    points = []
    for i in range (n):
        points.append((random.uniform(a, b), random.uniform(0, M)))
    return points
```

Zliczanie punktów, które leżą pod wykresem funkcji

In [2]:
```
def countBelow (function, points):
    count = 0
    for point in points:
        if(point[1] <= function(point[0])):
            count = count +1
    return count
```

Aproksymowanie całki

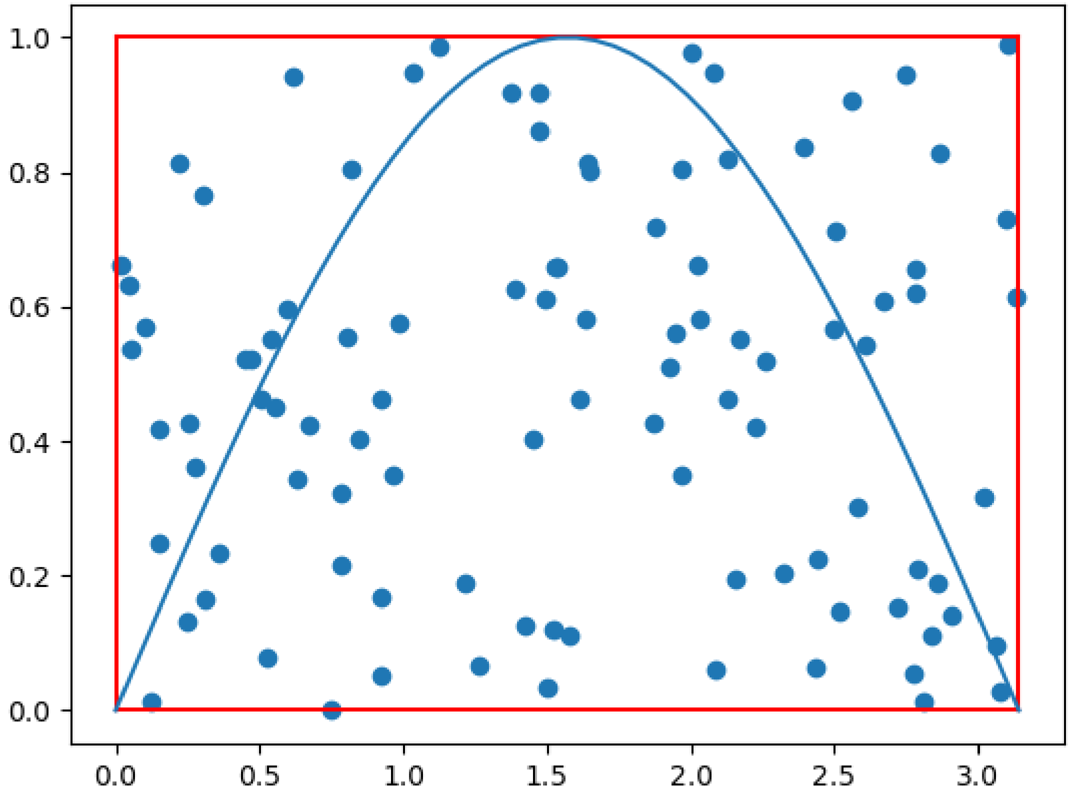
In [3]:
```
def integralApproximation(n, a, b, M, C):
    return C/n*(b - a)* M
```

Testowanie funkcji generowania, zliczania punktów i aproksymowania

In [4]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from pandas import DataFrame
import math

n = 100
a = 0
b = math.pi
M = 1
points = generatePoints(n,a,b,M)

df = DataFrame (points,index = np.arange(1,101),columns=["x","y"])
display (df.T)

x = np.linspace(0,b)
y = np.linspace(0,M)
plt.scatter(*zip(*points))
plt.plot(x,0*x+0, color = 'red')
plt.plot(x,0*x+M, color = 'red')
plt.plot(0*y+a,y, color = 'red')
plt.plot(0*y+b,y, color = 'red')
plt.plot(x,np.sin(x))
plt.show()
```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0.845503	0.633243	1.870130	0.244854	0.965640	2.171618	2.321002	2.395741	1.579867	2.906741
y	0.403138	0.343749	0.427148	0.132056	0.349934	0.552173	0.204360	0.837952	0.111392	0.141862

2 rows × 100 columns



Wizualizacja wylosowanych punktów z prostokąta $[0, \pi] \times [0, 1]$ oraz funkcji $\sin(x)$ na przedziale $[0, \pi]$.

In [5]:
```
C = countBelow(np.sin,points)
print("Liczba punktów pod wykresem funkcji:",C)
```

```
Liczba punktów pod wykresem funkcji: 66
```

In [6]:
```
integral = integralApproximation(n,a,b,M,C)
print("Probabilistyczna aproksymacja całki:",integral)
```

```
Probabilistyczna aproksymacja całki: 2.0734511513692637
```

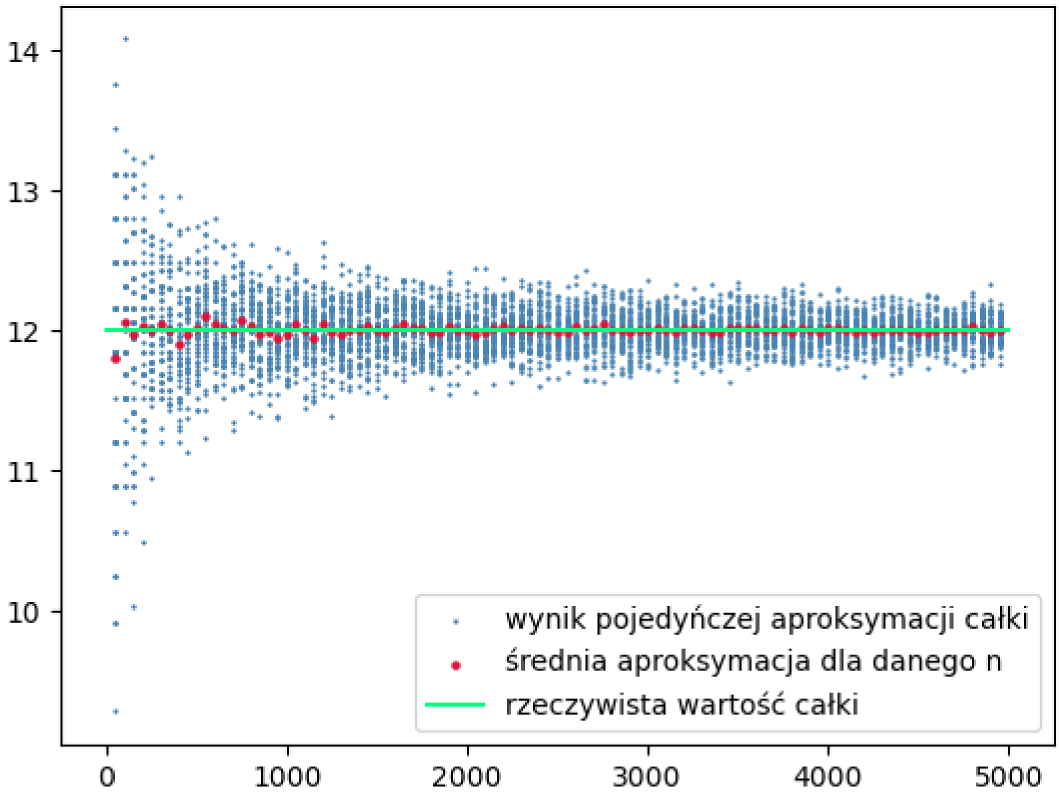
$\int_0^\pi sin(x)dx = 2$

Obliczanie wartości całek

In [7]:
```
def integral(a,b,M,function):
    label ='wynik pojedyńczej aproksymacji całki'
    label2 ='średnia aproksymacja dla danego n'
    avgIntegral = 0
    for n in range (50,5000,50):
        avgIntegral = 0
        integrals = []
        for k in range (50):
            tempIntegral = integralApproximation(n,a,b,M,countBelow(function,gener
            integrals.append((n,tempIntegral))
            avgIntegral += tempIntegral
        avgIntegral /= 50
        plt.scatter(*zip(*integrals), s=0.5, c = 'steelblue', label=label)
        label = "_nolegend_"
        plt.scatter(n,avgIntegral, s=5, c = 'crimson', label=label2)
        label2 = "_nolegend_"
    return avgIntegral
```

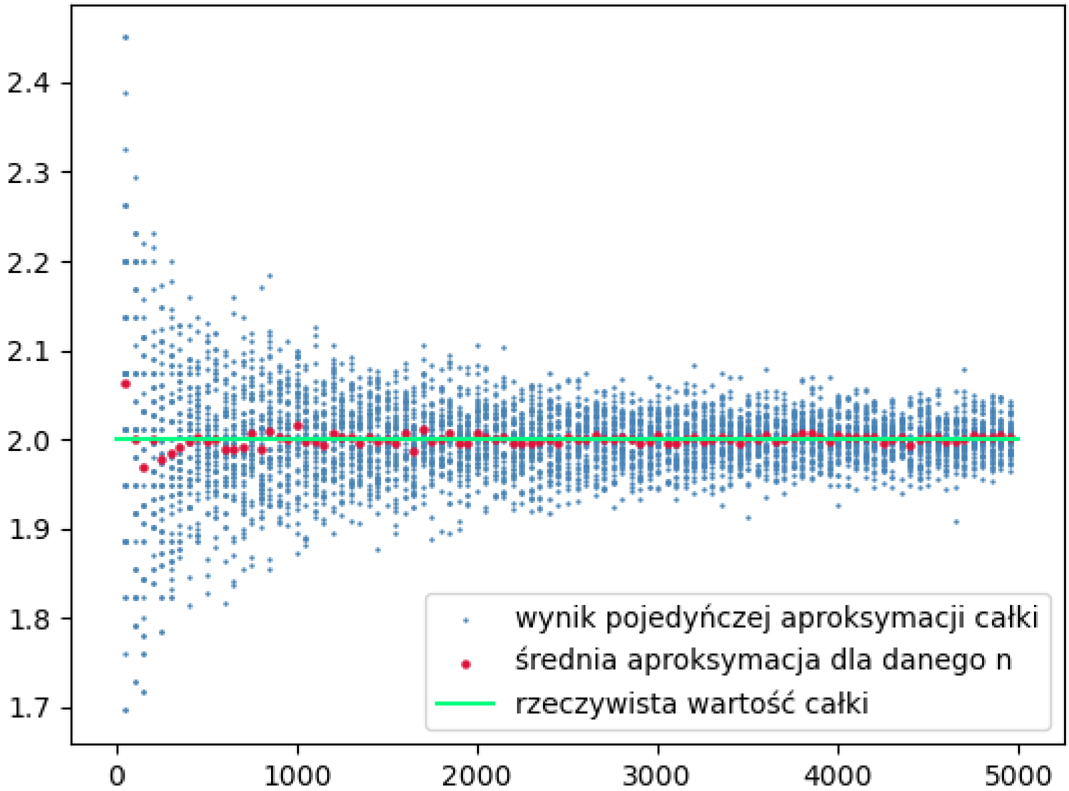
Wyniki eksperymentu dla całki $\int_0^8 \sqrt[3]{x}dx = 12$

In [8]:
```
x = np.linspace(0,5000)
integral(0,8,2,np.cbrt)
plt.plot(x,0*x+12, color = 'springgreen', label='rzeczywista wartość całki')
plt.legend(loc='lower right')
plt.show()
```



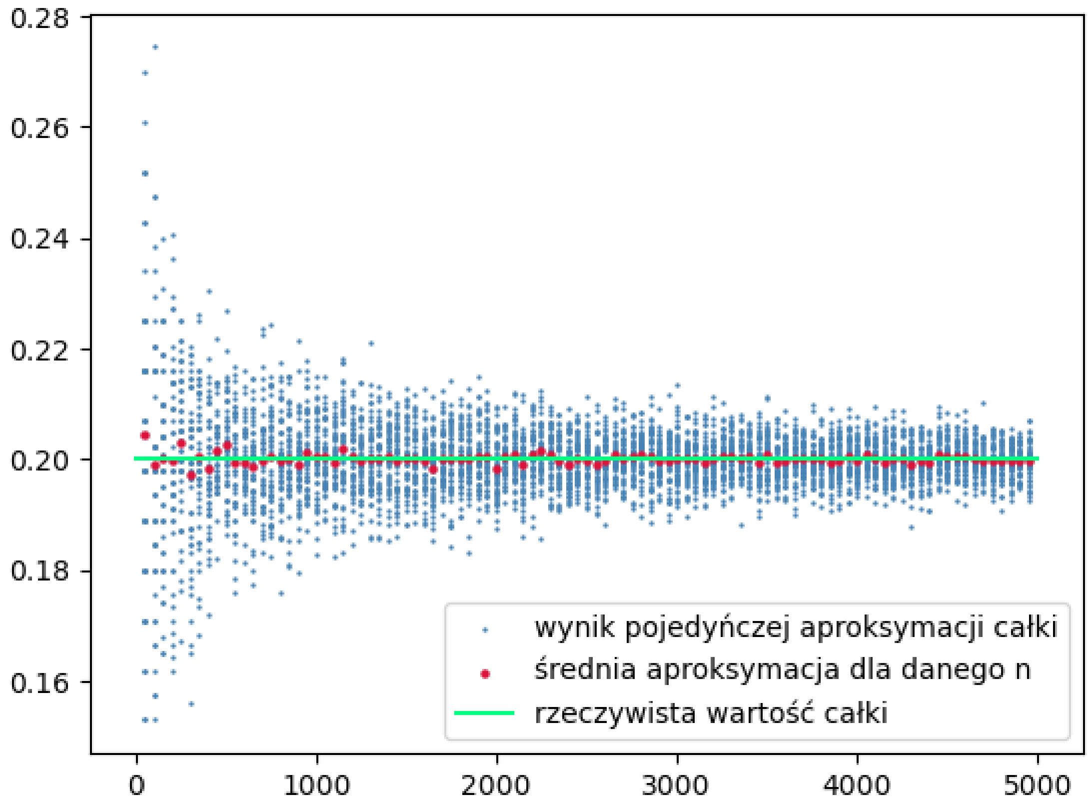
Wyniki eksperymentu dla całki $\int_0^\pi sin(x)dx = 2$

In [9]:
```
x = np.linspace(0,5000)
integral(0,math.pi,1,np.sin)
plt.plot(x,0*x+2, color = 'springgreen', label='rzeczywista wartość całki')
plt.legend(loc='lower right')
plt.show()
```



Wyniki eksperymentu dla całki $\int_0^1 4x(1-x)^3dx = \frac{1}{5}$

In [10]:
```
def f(x):
    return 4*x*(1-x)**3

integral(0,1,0.45,f)
plt.plot(x,0*x+0.2, color = 'springgreen', label='rzeczywista wartość całki')
plt.legend(loc='lower right')
plt.show()
```



Wnioski

Aproksymacja jest tym dokładniejsza, im więcej punktów wylosujemy.

Wyznaczanie aproksymacji liczby π

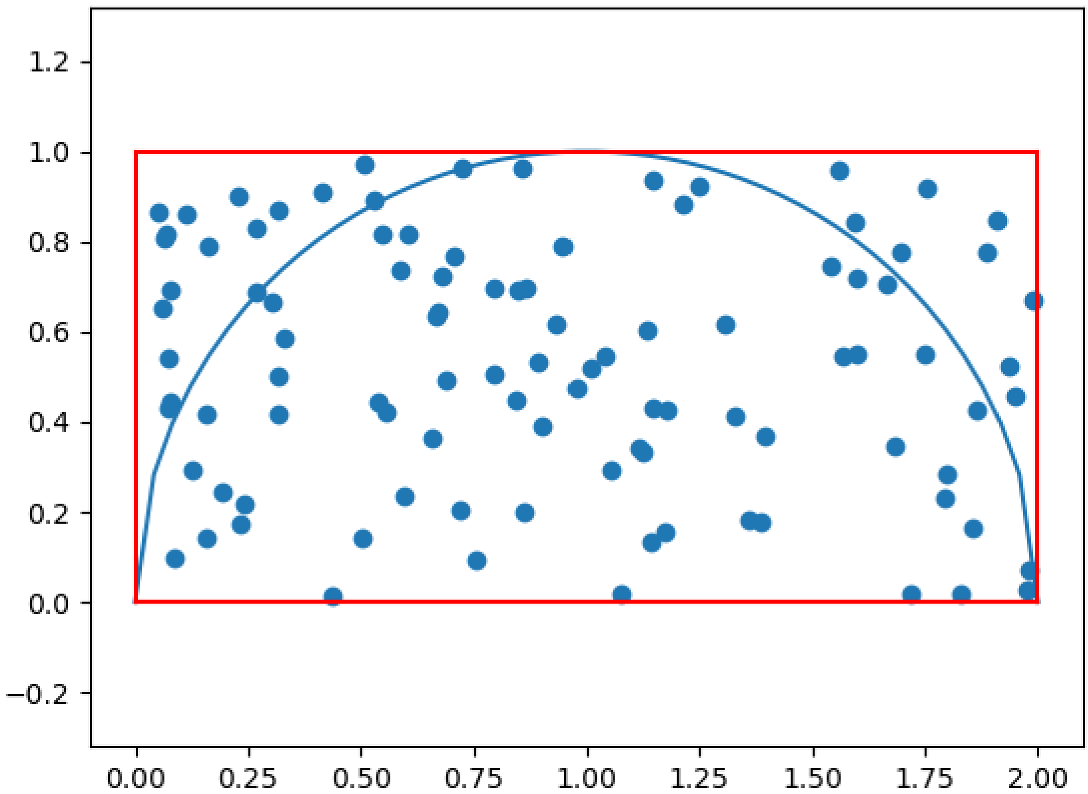
Rozważamy półkole* (koło o środku w punkcie $(1,0)$ i promieniu 1 ograniczone prostą $y=0$. Wiadomo, że pole rozważanego półkola, oznaczane przez P wynosi: $P=\frac{1}{2}\pi r^2$, gdzie $r=1$. Mamy zatem: $\pi=2P$.

* Rozważam półkole zamiast koła, aby wykorzystać napisaną funkcję countBelow zliczającą punkty poniżej funkcji $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{>0}$

Pole półkola wyznaczamy jako całkę pod krzywą $y=\sqrt{(1-(x-1)^2)}$ na przedziale $[0,2]$.

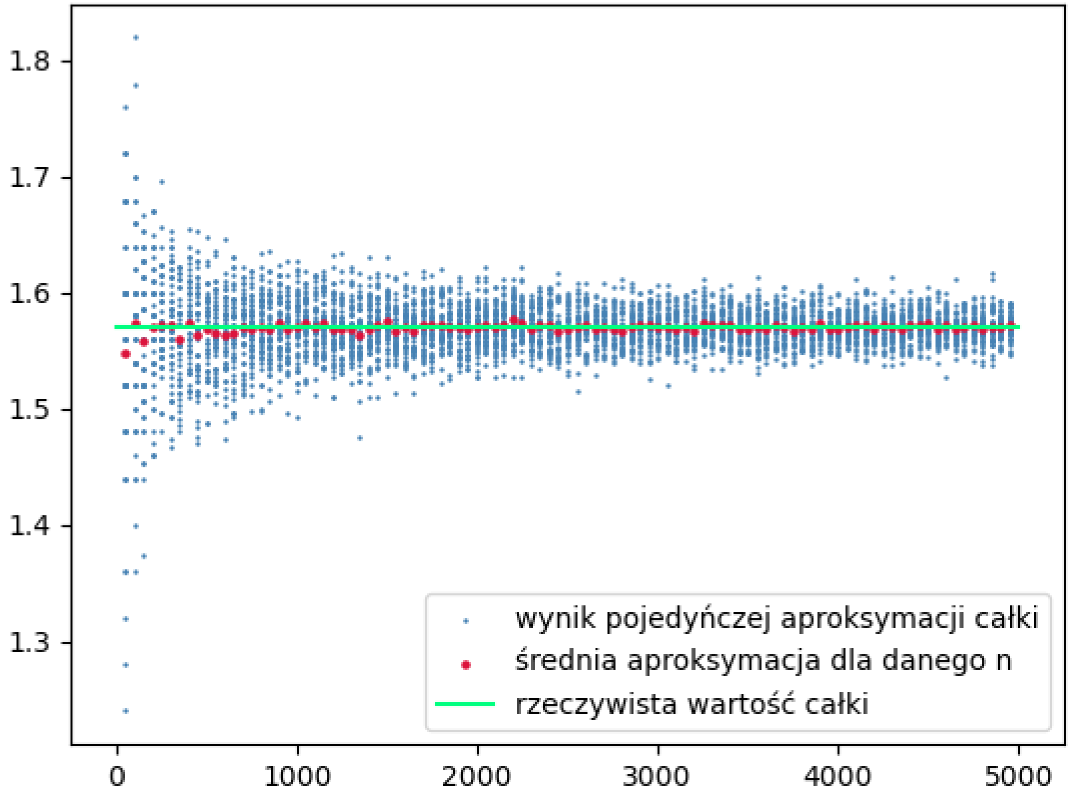
In [11]:
```
def f(x):
    return np.sqrt(1-(x-1)**2)
```

In [12]:
```
#TESTOWANIE + WIZUALIZACJA
n = 100
a = 0
b = 2
M = 1
points = generatePoints(n,a,b,M)
x = np.linspace(a,b)
plt.plot(x,f(x))
plt.scatter(*zip(*points))
plt.plot(x,0*x+0, color = 'red')
plt.plot(x,0*x+M, color = 'red')
plt.plot(0*y+a,y, color = 'red')
plt.plot(0*y+b,y, color = 'red')
plt.axis('equal')
plt.show()
```



Wizualizacja wylosowanych punktów z prostokąta $[0, 2] \times [0, 1]$ oraz funkcji $y = \sqrt(1 - (x - 1)^2)$ wyznaczającej półkole na przedziale $[0, 2]$.

In [13]:
```
x = np.linspace(0,5000)
pi = integral(0,2,1,f)
plt.plot(x,0*x+math.pi/2, color = 'springgreen', label='rzeczywista wartość całki'
plt.legend(loc='lower right')
plt.show()
print("Aproksymacja pola =",pi)
pi *= 2
print("Aproksymacja liczby pi =",pi)
```




```
Aproksymacja pola = 1.5721292929292932
Aproksymacja liczby pi = 3.1442585858585863
```