P2 28/06/23

Álgebra Linear I - prof. Thales F. V. Paiva

SEGUNDA AVALIAÇÃO - P2

Nome: RAUL SANCHES NINCAO

Informações importantes:

- *A avaliação é individual e sem consulta a qualquer material.*
- *Apresente as soluções da forma mais clara possível, com escrita legível e organizada.*
- *Respostas sem justificativa serão desconsideradas.*
- *Lembre-se de que você será avaliado por aquilo que escreveu, não por aquilo que pensou.*

EXERCÍCIOS

Classifique as afirmações abaixo em Verdadeira ou Falsa, justificando cada resposta.

$a.$(V) Se $T : U \to V$ é uma transformação linear, então $T(0) = 0$.

$b.$(V) Seja $T : V \to W$ uma transformação linear injetora. Se a dimensão de V é finita, então a dimensão de W é, necessariamente, finita também.

$c.$(F) Seja $F : U \to V$ uma transformação linear. Se $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ é uma base de U, então $F(B) = \{F(u_1), \cdots, F(u_n)\}$ é uma base de V.

$d.$(V) Se $G : U \to V$ é uma transformação linear bijetora, então é a sua inversa $G^{-1} : V \to U$ está definida e é linear.

$e.$(V) Considere $T : U \to V$ uma transformação linear. Se T for injetora, então existe um subespaço U' de V que é isomorfo a U.

$f.$(V) Seja $\Gamma : X \to Y$ uma transformação entre espaços vetoriais de qualquer dimensão. Então existe um isomorfismo entre os espaços $Im(\Gamma)$ e $X/\ker\Gamma$.

$g.$(V) Seja $T : U \to U$ uma transformação linear, B e C duas bases de U. Então é verdade que as matrizes $[T]_B$ e $[T]_C$ são sempre semelhantes.

$h.$(V) A matriz da transformação linear $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, definida por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+c \\ \underline{b-c} & d \end{pmatrix},$$

com relação a base canônica, é igual a

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$i.$(V) Se U e V são espaços vetoriais reais e $\mathcal{L}(U,V)$ denota o espaço de todas as transformações lineares de U em V, então $\mathcal{L}(U,V)$ é um espaço vetorial e, além disso, $dim\mathcal{L}(U,V) = dimU \cdot dimV$.

$j.$(F) Um funcional linear é uma transformação linear da forma $T : U \to \mathbb{R}$, em que V é um espaço vetorial real. A afirmação *todo funcional linear é não injetivo* é falsa.

P2 - RAUL SANCHES NINCAO

A/ O FATO DE T SER TRANSFORMAÇÃO LINEAR E O FATO DE O SER VETOR NULO DE U LEVA

$$\text{I} \quad T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0)$$

$$\text{II} \quad T(0) = T(0 \cdot u) = 0 \cdot T(u) = 0$$

ASSIM CHEGAMOS A AMBOS OS LADOS COM VALOR NULO

B/ DIMENSÃO DO NÚCLEO E DA IMAGEM DE T É IGUAL A DIMENSÃO DO DOMÍNIO V

$$\dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

C/ POIS NEM ESSES VETORES SERÃO L.I.
PODE OCORRER QUE ALGUNS VETORES SEJAM COMBINAÇÕES LINEARES DOS OUTROS, O QUE INVALIDARIA A L.I.
EX: CONSIDERANDO $F(u) = 0$ PARA TODO u EM U, IMAGEM DE QUALQUER BASE DE U SERIA O VETOR NULO, QUE NÃO É UMA BASE DE V EXCETO QUANDO V É O ESPAÇO TRIVIAL

D/ A BIJETIVIDADE DE G GARANTE QUE A INVERSA EXISTA E SEJA LINEAR.

P2

E/ PELA TRANFORMAÇÃO LINEAR SER INJETORA ENTÃO EXISTE O ISOFORMISMO ENTRE U e A Im(T). EXISTINDO ASSIM UM SUBESPAÇO U!

F/ O TEOREMA DO NÚCLEO e DA IMAGEM ESTABELECIDA que $Im(T) \cong \frac{\mathcal{U}}{Ker(T)}$ EXISTINDO ASSIM O ISOFORMISMO.

G/ ISSO OCORRE PQ AS MATRIZES SEMELHANTES REPRESENTAM A MESMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR em BASES DIFERENTES.

H/ $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

GERANDO $[T]_{\text{can}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

I/ O ESPAÇO DE TODAS AS TRANSFORMAÇÕES LINEARES DE U em V, DENOTA por $\mathcal{L}(U,V)$ é um ESPAÇO VETORIAL.

A DIM DE $\mathcal{L}(U,V)$ É DADA POR

$$\operatorname{Dim} \mathcal{L}(U;V) = \dim(U) \cdot \dim(V).$$

J/ Existem FUNCIONAIS LINEARES INJETIVOS.

Ex: CONSIDERE UM ESPAÇO VETORIAL U em um

I) Um funcional linear $T: U \to \mathbb{R}$ def. por $T(u) = 0$, $\forall$ u em U. Esse funcional linear é injetor, pois o único vetor mapeado para 0 é o vetor nulo de U.