1、对偶很重要，但是很难懂，为什么搞不定？因为练习做的太少了，通过练习理解。

2、看模型，记住基础的模型，看图：

Primal Problem

Maximize $\quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$

subject to

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad$ for $i = 1, 2, \ldots, m$

and

$x_j \ge 0, \quad$ for $j = 1, 2, \ldots, n.$

Dual Problem

Minimize $\quad W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$

subject to

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad$ for $j = 1, 2, \ldots, n$

and

$y_i \ge 0, \quad$ for $i = 1, 2, \ldots, m.$

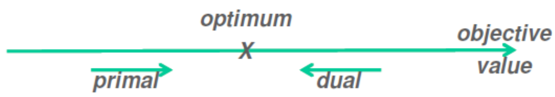
上面的模型采用是变量的形式，我们这里用矩阵和向量的形式表示，向量 vector 一般是 column vector，看下面的定义：

- Every LP problem has an associated dual LP problem
  - Constraint ↔ variable
  - Original is called the primal problem

primal $\quad \begin{array}{c} \min \ \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b} \quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{array}$

$\begin{array}{c} \max \ \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \mathbf{A}^T\mathbf{y} \ge \mathbf{c} \quad \mathbf{y} \ge \mathbf{0} \end{array} \quad$ ***dual***

- Weak duality theorem
  - Objective value of dual at any feasible solution ≥ objective value of primal at any feasible solution



- Strong duality theorem
  - If LP has an optimal solution, objective value of dual is the same as the primal

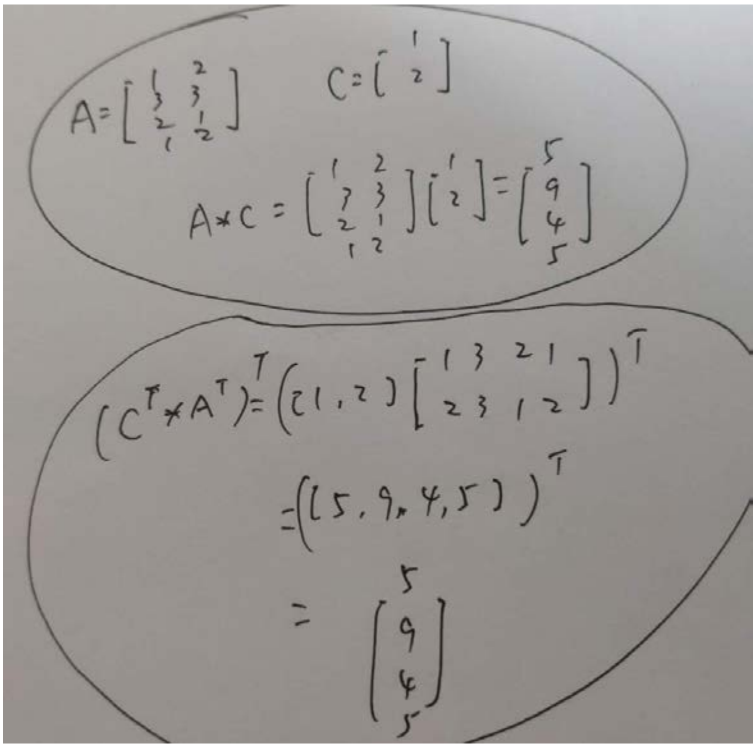
原模型 PP，对偶模型 DP。发现，如果是标准型的话，转置一下就可以得到对偶模型。

3、看到了别人的另外一种解释，从空间的角度理解，还是不错的。PP 问题是针对 n 维空间的点，DP 问题变成 m 维

空间的点，其实 PP 空间通过了矩阵 A 的映射变换，转换到了 DP 空间。如果 A 矩阵是 square matrix，那么就是同一个空间，如果不是的话，那么就是不同空间的转换。看原话：

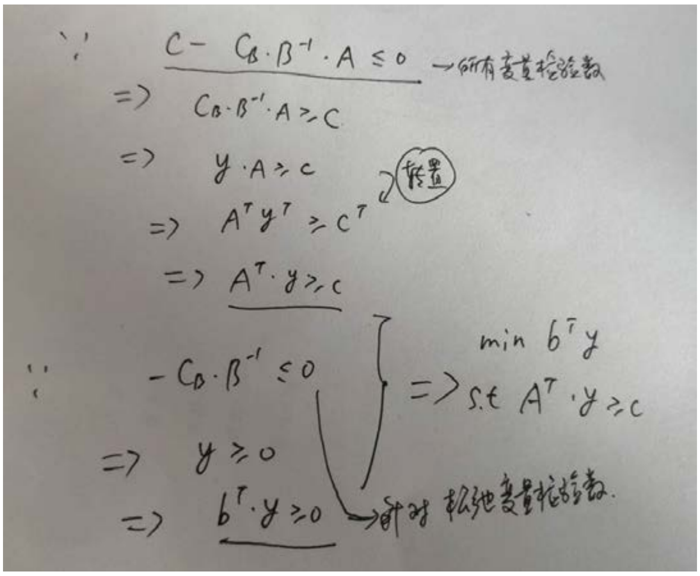
> 从线性代数角度可以看待对偶问题。
>
> 有一个 $x \in \mathbb{R}^n$，经过线性变换 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$，得到 $Ax \in \mathbb{R}^m$。$\mathbb{R}^n$ 就可以被认为是主空间（primal domain），$\mathbb{R}^m$ 则可以被认为是对偶空间（dual domain）。
> 用两个空间都能考虑原来的优化问题。所谓的 duality 就是指在对偶空间的一些性质。

4、矩阵的运算就是一种线性变换，可以看成是一种函数的映射，既然是函数，那么就不能交换，所以矩阵的相乘一般都是左乘，不可能是右乘，向量一般是 column vector，所以矩阵的运算肯定是左乘。那如果碰到了矩阵的右乘，怎么看？就相当于 row vector * matrix，这怎么处理？转置处理，$c^T * A = (A^T * c)^T$，就这样。看个例子：

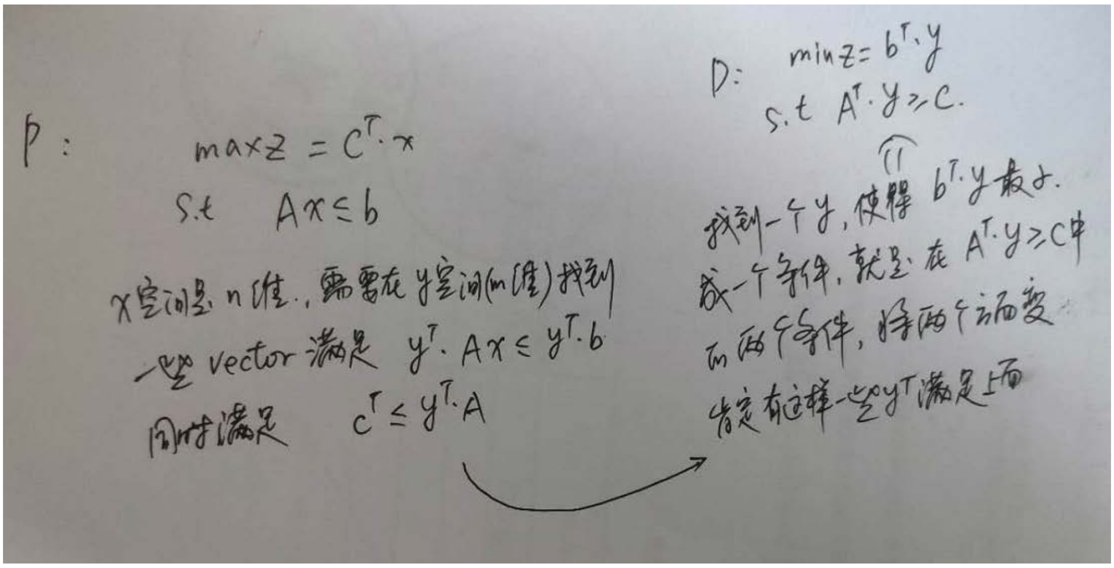


5、对偶模型的推导。主要有两种方式，一种是经济学

的，一种是矩阵推导。这里主要看一下矩阵推导的方式，如下图：



上面的方式有点懂，但是还是有点半桶水。还有一种方式，如图：



小结：注意矩阵 A 的转置，还有 x,y,c,b 向量的关系，x 和 c 是同一个维度，是 n 维，y 和 b 是同一个维度，是 m 维度。

6、看对偶问题，不能单独去理解，一定要将原问题一起

来看，其中牵涉到很多概念，比如 dual price（shadow price），reduced cost 等等，看图：

Variable	Value	Reduced Cost
X1	4.000000	0.000000
X2	2.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	14.00000	1.000000
2	0.000000	1.500000
3	0.000000	0.1250000
4	4.000000	0.000000

reduced cost 表示的是 本模型 的变量的检验数概念（在 lingo 中），其值的意义分情况。可以看出，基变量对应的值是 0，非基变量对应的值是根据模型来判断的（在 Lingo 中都是正实数表示），如果是 max 模型，其值相反数才是检验数，因为 max 模型的检验数都是小于 0；如果是 min 模型，那么其值就是检验数，根据英文意思表示减少的成本，如果用了非基变量的检验数，发现是正数，结果增大了，因此不用这些基变量。

dual price（shadow price）表示的是对偶模型的价格，可以发现，图中是针对约束来说的，而约束对应对偶模型的变量，因此这个 dual price 应该类似于 reduced cost，那个是对应本模型的变量，而这个是对应对偶模型的变量。看图的解释：

指对偶价格,列出最优单纯形表中判别数所在行的松弛变量的系数，表示当对应约束有微小变动时，目标函数的变化率，输出结果中对应每一个约束有一个对偶价格。若其数值为X，表示对应约束中不等式右端项若增加一个单位，目标函数将增加X个单位（max 型问题）。

当REDUCE COST 或DUAL PRICE 的值为0。表示当微小扰动不影响目标函数。有时，通过分析DUAL PRICE，也可对产生不可行问题的原因有所了解。

匿名用户
2012-11-17

“DUAL PRICE” （对偶价格）表示当对应约束有微小变动时, 目标函数的变化率。输出结果中对应于每一个约束有一个对偶价格。 若其数值为p， 表示对应约束中不等式右端项若增加1 个单位，目标函数将增加p个单位（max型问题）。显然，如果在最优解处约束正好取等号（也就是 “紧约束”， 也称为有效约束或起作用约束），对偶价格值才可能不是0。

对于非紧约束，DUAL PRICE 的值为0, 表示对应约束中不等式右端项的微小扰动不影响目标函数。有时, 通过分析DUAL PRICE, 也可对产生不可行问题的原因有所了解。

小结：reduced cost 表示原问题的变量检验数，就是对偶问题的解，dual price 表示对偶问题的目标函数的变化率，就是对偶变量的解。其中，对偶性有个性质是 P 问题的检验数的相反数对应 D 问题的解。

4、通过几个例子来说明上面的概念：首先，PP 是标准的 max，DP 是 min，通过 lingo 求解 PP，根据结果看相关概念，后反过来求解 DP，看相关概念。例子如下：

TABLE 6.1 Primal and dual problems for the Wyndor Glass Co. example

Primal Problem in Algebraic Form

$$\begin{aligned}\text{Maximize}\quad & Z = 3x_1 + 5x_2,\\ \text{subject to}\quad & \\ & x_1 \le 4\\ & 2x_2 \le 12\\ & 3x_1 + 2x_2 \le 18\\ \text{and}\quad & x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0.\end{aligned}$$

Dual Problem in Algebraic Form

$$\begin{aligned}\text{Minimize}\quad & W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3,\\ \text{subject to}\quad & \\ & y_1 + 3y_3 \ge 3\\ & 2y_2 + 2y_3 \ge 5\\ \text{and}\quad & \\ & y_1 \ge 0,\quad y_2 \ge 0,\quad y_3 \ge 0.\end{aligned}$$

Primal Problem in Matrix Form

$$\text{Maximize}\quad Z = [3,\ 5]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dual Problem in Matrix Form

$$\text{Minimize}\quad W = [y_1, y_2, y_3]\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

subject to

$$[y_1,\ y_2,\ y_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \ge [3,\ 5]$$

and

$$[y_1,\ y_2,\ y_3] \ge [0,\ 0,\ 0].$$

5、求解结果分析：

Variable	Value	Reduced Cost
X1	2.000000	0.000000
X2	6.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	36.00000	1.000000
2	2.000000	0.000000
3	0.000000	1.500000
4	0.000000	1.000000

Variable	Value	Reduced Cost
Y1	0.000000	2.000000
Y2	1.500000	0.000000
Y3	1.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	36.00000	-1.000000
2	0.000000	-2.000000
3	0.000000	-6.000000

看上去好像不是啊，有点晕。

继续分析：这个例子主问题 P 是 2 个变量，3 个约束，m=3，n=2；对偶问题 D 是 3 个变量，2 个约束。跟踪求解计算的每一个步骤，得到相关的对偶性质，特别是“检验数和对偶变量”之间的关系，进行进一步的探索。

6、首先计算 P，2 个原始变量，3 个松弛变量，得到一下信息：

（1）solution=[0,0,4,12,18],ranmda =[3,5,0,0,0]

（2）solution=[0,6,4,0,6], ranmda =[3,0,0,-2.5,0]

（3）solution=[2,6,2,0,0], ranmda =[0,0,0,-1.5,-1.0]

分析：solution 对应的前面 2 个是原始变量，后面的是松弛变量，对偶变量（检验数）在 lingo 里面分成 2 个部分，前面 2 个是针对目标函数（利润），所以叫做 reduced cost（降低的成本），后面 3 个是针对资源的，所以也叫做 shadow price（dual price）。根据“变量的检验数相反数就是对偶变量”，那么我们可以直接从检验数中得到 D 的答案，比如 D 的最优解是：

solution=[1.5,1.0,0,0,0],ranmda = [0,0,2,6,2]

第一个基本解（不可行的）的情况是：

solution=[0,0,0,-3,-5],ranmda = [4,12,18,0,0]

将 P 的截图再放上来对一对:

Variable	Value	Reduced Cost
X1	2.000000	0.000000
X2	6.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	36.00000	1.000000
2	2.000000	0.000000
3	0.000000	1.500000
4	0.000000	1.000000

现在将 P 改变一下，直接变成标准型，再次计算，截图保存：

Variable	Value	Reduced Cost
X1	2.000000	0.000000
X2	6.000000	0.000000
X3	2.000000	0.000000
X4	0.000000	1.500000
X5	0.000000	1.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	36.00000	1.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	1.500000
4	0.000000	1.000000

7、计算 D 问题，用的是对偶单纯形法，如下所示：

D 模型是 3 个变量，2 个约束，总共有 5 个变量。基变量是看约束的个数，所以是 2 个基变量，3 个非基变量（其中 2 个松弛变量）。因此有 3 个 reduced cost，对应的是 P 模型的 3 个约束，

（1）solution=[0,0,0,-3,-5],reduced cost =[4,12,18,0,0]

（2）solution=[0,2.5,0,-3,0],reduced cost =[4,0,6,0,6]

（3）solution=[0,1.5,1.0,0,0],reduced cost =[2,0,0,2,6]

8、小结一下：基变量，非基变量和松弛变量的关系。这个困扰我挺久的，因为模型可能不是很标准，有非常标准的，非常不标准的，找一个一般标准的去理解一下，就是上面的模型，P 模型（变量+松弛）=P（2+3），D 模型=D（3+2），因此在看对偶模型的时候，一定要看这个变量的和松弛的关系。但是，如果不是一般的模型，怎么解决，找例子理解一下。其实，看对偶的相关性质，只看原始变量和松弛变量就可以了，求解检验数的时候，一定要关注一下基变量（一般是约束个数）和非基变量。多做几个例

子，或者多看别人的例子，应该会好点。

9、例子讲解：

$$\max z = 6x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 2 \\ x_1 + 4x_3 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

求解过程：原始变量是 3 个，松弛变量是 2 个，因此对偶的原始变量是 3 个，松弛变量是 2 个。

（1）solution = [0,0,0,2,4],ranmda = [6,-2,1,0,0]

（1 进 4 处）

（2）solution = [1,0,0,0,3],ranmda = [0,1,-5,-3,0]

（2 进 5 处）

（3）solution = [4,6,0,0,0],ranmda = [0,0,-11,-2,-2]

因为，检验数 ranmda 都是负数，所以达到最优。

尝试求解一下 D：

（1）solution = [0,0,-6,2,-1],ranmda = [2,4,0,0,0]

（2）solution = [3,0,0,-1,5],ranmda = [0,3,1,0,0]

（3）solution = [2,2,0,0,11],ranmda = [0,0,4,6,0]

注：求最小值的时候，D 的检验数就是对偶问题 P 的解（位置要对应好）

10、对偶的性质 5：互补松弛定理。怎么理解：P 的约束对应资源，对应对偶变量的 shadow price。当一种资源有松

弛型，或者说资源的松弛变量不为 0 的时候，那么这种资源那就没有 shadow price，D 的对应变量就是 0。反过来，如果资源的松弛变量为 0，那么 D 的对应资源变量就肯定不是 0，肯定有影子价格。