问题：求解下面的模型。

Beckmann数学规划模型

$$\min : Z(X) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(w)dw$$

$$s.t. : \sum_k f_k^{rs} = q_{rs}$$

$$f_k^{rs} \geq 0,$$

其中，$x_a = \sum_{r,s}\sum_k f_k^{rs} \cdot \delta_{a,k}^{rs} \qquad \forall a$

思路：上面的模型是非线性模型，目标函数非线性，约束是线性的，可以用 frank-wolfe 算法求解，将目标函数用多项式去拟合（逼近）非线性目标函数，将模型变成线性的模型，这样就可以用线性规划的方法求解。现在问题是多项式拟合的时候，需要在某个可行解去拟合，因此首先必须知道一个初始的可行解 X0，用这个可行解当做迭代的第一个解 X1，用这个解去逼近多项式，求解线性规划模型，得到这个模型下的最优解 Y1，这两个解都是原模型的可行解，但是 Y1 比 X1 更优一点，意思就是下降的，所以 Y1-X1 这是一个下降方向，在这个方向上面，肯定有一个最优解 X2=X1+lambda(Y1-X1)，这个最优解就是目前的一个下降最快的解 X2。接着，用这个 X2 变成 X1，再去逼近多项式，然后。。。。。。

现在的问题总共有三个：

第一个问题：这个初始的可行解 X0 怎求解？可不可以随便一个可行解就可以了，还是一定要全有全无的分配一次得到一个可行解呢？后面会两种都试一遍。

第二个问题：就是函数逼近的求解，也就是泰勒一次展开，需要用到梯度的定义，怎么一步一步的推到出来的，只有理解了推导过程，才能进行编程，看下图：

$$f(x) \approx f(x_k) + \nabla f(x_k)^{\mathrm{T}}(x - x_k). \qquad (9.4.2)$$

当前迭代点

$$\Big\downarrow (9.4.1)$$

$$\begin{cases} \min & f(x_k) + \nabla f(x_k)^{\mathrm{T}}(x - x_k); \\ \text{s.t.} & x \in S. \end{cases} \qquad (9.4.3)$$

$$\Big\downarrow (9.4.3)$$

$$\begin{cases} \min & \boxed{\nabla f(x_k)^{\mathrm{T}} x}; \\ \text{s.t.} & x \in S. \end{cases} \qquad (9.4.4)$$

目标函数是一个变上限定积分，其求导公式如下图：

通常称积分式 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为变上限的积分

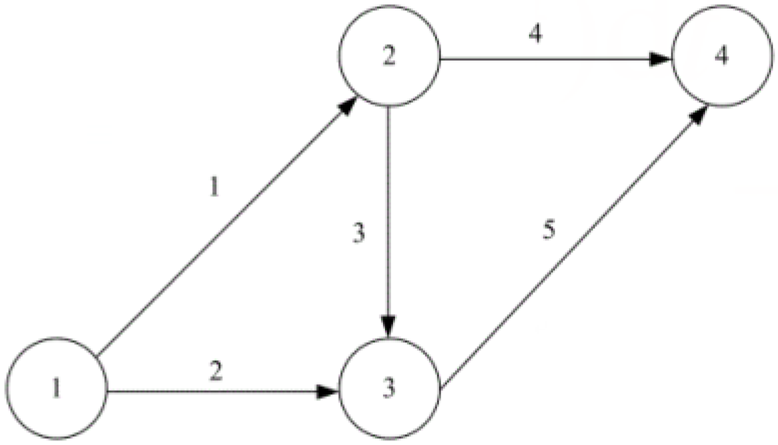
$$\frac{\partial \int_0^y f(x)\,dx}{\partial y} = y' \cdot f(y)$$

或者看下图：

$$\frac{d}{dx}F(x)=\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]'=f(x).$$

现在需要将 FX 具体化，这样好理解一下，看下图：

例



总流量为100,走行函数为：

$$c_1(x_1) = 4 + 0.6\left(\frac{x_1(t)}{40}\right) \quad c_2(x_2) = 6 + 0.9\left(\frac{x_2(t)}{40}\right)$$

$$c_3(x_3) = 2 + 0.3\left(\frac{x_3(t)}{60}\right) \quad c_4(x_4) = 5 + 0.75\left(\frac{x_4(t)}{40}\right)$$

$$c_5(x_5) = 3 + 0.45\left(\frac{x_5(t)}{40}\right)$$

我们这里的函数应该是这样的，看图：

$$Z1(X) = \int_0^{x1} 4*[1+(x/200)^4]dx + \int_0^{x2} 6*[1+(x/250)^4]dx + \int_0^{x3} 5*[1+(x/150)^4]dx$$

以上是原始非线性目标函数，根据书上的泰勒的一阶展开公式和变上限积分求导公式，得到线性的展开公式：

（1）泰勒通用展开公式：

$Z2(X) = \nabla f(X^1)X$，这个意思是是在某点 X^1 进行展开，步骤是先求出梯度，然后将某点 X 带入，因此，求你求出梯度

（2）变上限积分求导公式：

$$\frac{\partial\int_0^y f(x)dx}{\partial y}=y^{'}f(y)$$

因此，原始目标函数的梯度展开，应该是如下：

$$Z2(X)=\nabla f(X^1)X \Rightarrow Z2(X)=[\frac{\partial Z1}{\partial x1},\frac{\partial Z1}{\partial x2},\frac{\partial Z1}{\partial x3}]^T(x1,x2,x3)$$

$$\frac{\partial Z1}{\partial x1}=\frac{\int_0^{x1}4*[1+(x/200)^4]dx+\int_0^{x2}6*[1+(x/250)^4]dx+\int_0^{x3}5*[1+(x/150)^4]dx}{\partial x1}=4*[1+(x/200)^4]$$

$$\frac{\partial Z1}{\partial x2}=\frac{\int_0^{x1}4*[1+(x/200)^4]dx+\int_0^{x2}6*[1+(x/250)^4]dx+\int_0^{x3}5*[1+(x/150)^4]dx}{\partial x2}=6*[1+(x/250)^4]$$

$$\frac{\partial Z1}{\partial x3}=\frac{\int_0^{x1}4*[1+(x/200)^4]dx+\int_0^{x2}6*[1+(x/250)^4]dx+\int_0^{x3}5*[1+(x/150)^4]dx}{\partial x3}=5*[1+(x/150)^4]$$

$$Z2(X)=4*[1+(x/200)^4]x1+6*[1+(x/250)^4]x2+5*[1+(x/150)^4]x3$$

以上化简出来的是线性规划的目标函数，其中$x1$， $x2$和$x3$是 od pair 分配后得到的流量，如果要想目标值最小，那么 od pair 只要每次分配的时候，找最短路径分配就可以了，也就是找阻抗小的路径分配。因为，阻抗已经是已知的，上式中的x是已经变量。

第三个问题：怎么理解步长的求解。其实，就是将 X2=X1+Lamda(Y1-X1)带入到原始目标函数里面去，使原始目标函数 Z1 最小。

$$Z1(X)=\int_0^{x1+\lambda(\mathrm{y1\text{-}x1})}4*[1+(x1+\lambda(\mathrm{y1\text{-}x1})/200)^4]dx+$$
$$\int_0^{x2+\lambda(\mathrm{y2\text{-}x2})}6*[1+(x2+\lambda(\mathrm{y2\text{-}x2})/250)^4]dx+$$
$$\int_0^{x3+\lambda(\mathrm{y3\text{-}x3})}5*[1+(x3+\lambda(\mathrm{y3\text{-}x3})/150)^4]dx$$

将 Z1 对 lambda 求导，根据$\frac{\partial\int_0^y f(x)dx}{\partial y}=y^{'}f(y)$公式，得知，其实就是每条 link 的求导相加，如下：

$$\frac{\partial Z1(X)}{\partial\lambda}=\frac{\int_0^{x1+\lambda(y1-x1)}4*[1+(x1+\lambda(y1-x1)/200)^4]dx}{\partial\lambda}+$$

$$\frac{\int_0^{x2+\lambda(y2-x2)}6*[1+(x2+\lambda(y2-x2)/250)^4]dx}{\partial\lambda}+$$

$$\frac{\int_0^{x3+\lambda(y3-x3)}5*[1+(x3+\lambda(y3-x3)/150)^4]dx}{\partial\lambda}$$

$$=\frac{\partial(x1+\lambda(y1-x1))}{\partial\lambda}\times4*[1+(x1+\lambda(y1-x1)/200)^4]+$$

$$\frac{\partial(x2+\lambda(y2-x2))}{\partial\lambda}\times6*[1+(x2+\lambda(y2-x2)/250)^4]+$$

$$\frac{\partial(x3+\lambda(y3-x3))}{\partial\lambda}\times5*[1+(x3+\lambda(y3-x3)/150)^4]$$

$$=(y1-x1)*4*[1+(x1+\lambda(y1-x1)/200)^4]+$$

$$(y2-x2)*6*[1+(x2+\lambda(y2-x2)/250)^4]+$$

$$(y3-x3)*5*[1+(x3+\lambda(y3-x3)/150)^4]$$

然后，就是求导后==0，这个是最基本的知识点，梯度为 0 的地方有极值。因此，就是求解下列方程：

$$(y1-x1)*4*[1+(x1+\lambda(y1-x1)/200)^4]+(y2-x2)*6*[1+(x2+\lambda(y2-x2)/250)^4]+(y3-x3)*5*[1+(x3+\lambda(y3-x3)/150)^4]=0$$

在 matlab 里面用 solve 求解，得到[0,1]区间的 lambda，如果不在这个区间，那么直接取值 lamda 为 1，然后继续迭代。