1、在已经 OD 的情况下，知道路网的情况下，OD 会根据自己的喜好选择某些路径，完成自己的 OD，而这些 OD 的不同路径的选择，就会造成路网 net 的路段上的流量不同，这个就是路网的交通分配。

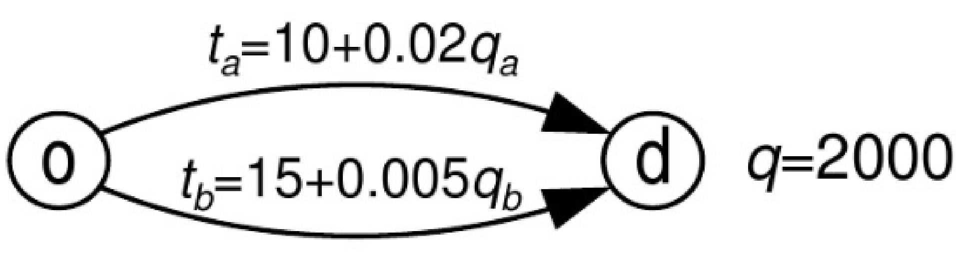
2、那 OD 怎么分配到这个路网上去的，或者说 OD 是怎么选择不同的路径完成任务的，这个其实是有不确定性因素的，或者说随机的。但是，作为研究者来说，我们会用一个模型去说明某种情况，某种模型去拟合现实的某种情况。

3、有一种模型，就是 beckmann 数学模型，它是要说明哪种情况呢？它不是要说明现实说的哪种情况，而是要说明一种理想的情况。这种情况，就是 Wardrop 提出的网络平衡状态。简单说，是这么回事：每个 OD 都清楚路网的情况，都时时刻刻的知道路网上的流量，然后，OD 会选择一条最短（怎么评价这个最短，可以是时间最短，或者最舒服等等）路径，完成这个 OD 的分配；如果按照这种方式分配后，网络系统会达到一种平衡，达到平衡后，再有 OD 对要进行分配的时候，它选的任意一条路径，效果都是一样的，或者说行驶时间都是相等的。以上所说的就是 Wardrop 提出的网络平衡的第一原理，网络平衡的第一原理。

4、总结上一条的说明。我们看到了 Wardrop 根据网络分配的问题，提出了一个假设的情况，假设分配后的一种情况，这种情况理论上是存在的。这个就是网络分配的一个问题，然后 beckmann 根据这种情况，用一个数学模型，进行了等价说明。最后，就剩下哪个高手进行求解。这就完成了“问题”—“模型”—“算法”的整个过程。算法，是哪个算法，就是 Frank—Wolfe 算法，下次再讲。

5、现在再来整理一下所谓的 Wardrop 的这个网络平衡的问题。Wardrop 当时提出了两个原理，我们现在解决问题的模型和算法都是针对第一原来来说的，是出于用户的角度考虑的。但是，Wardrop 这个家伙还提出了第二原理，意思是：系统达到了平衡后，拥挤的网络上交通流的分配应该按照平均或者总的出行成本最小为依据来分配。说实话，我没有看懂这个第二原理，而且，我一开始以为第一原理和第二原理是统一的，后来，才发现，是两回事。因为书上有这么一句话，“一般来说，这两个原理下的平衡结果不会是一样的”。才发现，原来不是一样的。为什么，仔细想一下，也对。因为第一原理是用户角度，第二原理是网络设计管理者角度，二者是博弈的，不可能会统一。

6、通过案例，整理一下 wardrop 中的两个原理问题。首先，为什么 Wardrop 提出的问题，没有好的求解方法呢？看过程，如果问题简单一下，就 2 点，中间出现了 2 个路径，我们可以用代数的方法求解，两者相等就 OK 了。看图说话：



看上图，这就要求，ta=tb，可以求出 qa 和 qb。（看第一原理的语句：***当网络达到平衡状态时，每个 OD 对的各条被使用的径路具有相等而且最小的行驶时间；没有被使用的径路的***

*行驶时间大于或等于最小行驶时间。*平衡以后，行驶时间相等，就是阻抗是相等的。至于是最小行驶时间，可以由第二句话解释，第二句一开始真的不好理解，主要是直观上不好理解）但是，问题是复杂的，有多个 OD，多个路径，这样求解起来就十分复杂，而且用来描述这个问题，不好描述。这个时候，Beckmann 不知道怎么凑到了一个模型，然后取名为自己的模型。那这个模型是什么呢？看图说话：

Beckmann数学规划模型

$$\min : Z(X) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(w)dw$$

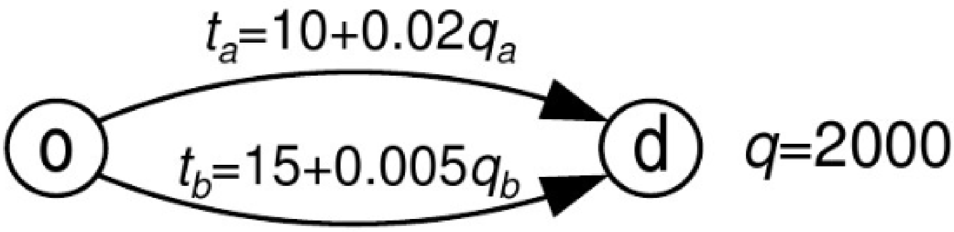
$$s.t. : \sum_k f_k^{rs} = q_{rs}$$

$$f_k^{rs} \geq 0,$$

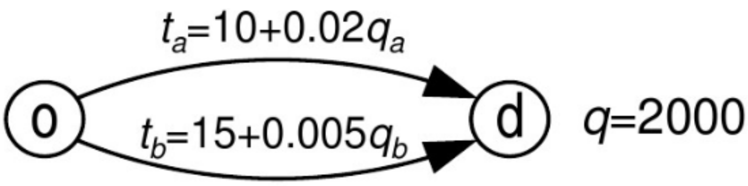
其中，$$x_a = \sum_{r,s} \sum_k f_k^{rs} \cdot \delta_{a,k}^{rs} \qquad \forall a$$

解释一下上图：网络中总共有 a 条路段，路网达到平衡后，每条路段上的阻抗 t_a 和流量 x_a 的积分之和应该最小（*后面才发现这个积分的意义是：在达到网络平衡后的那个路段流量 x_a 不是一次得到的，这个流量是从 0 慢慢的增加到 x_a，而每次得到一个流量后，就会有一个阻抗，因此积分的意义是阻抗的累加*），这样求出来的效果和路网达到平衡后，每个 OD 对之间的路径时间阻抗都相等的效果是一样的。后者求解（代数方法求解）表达不是特别方便，用前者表达起来方便，求解用的是 W—F，方不方便就不知道了。

7、继续案例分析。看图：



这个模型，我们先用一般的数学解析求解，过程如下图：



$$\begin{cases} 10+0.02q_a=15+0.005q_b \\ q_a+q_b=2000 \\ q_a, q_b \geq 0 \end{cases}$$

$$q_b = 0.8q\text{-}200$$

$$q_a = 600,\ q_b = 1400;\ t_a = t_b = 22$$

分析一下：两条路径的时间是相等的。

接下来，看 UE 理论下的 Beckmann 模型求解，看图说话：

Beckmann模型求解，阻抗函数带入模型

$$\min: Z(X)=\int_0^{x1}(10+0.02w)dw+\int_0^{x2}(15+0.005w)dw$$

根据平衡和守恒条件:

$$\begin{cases} 10+0.02x_1=15+0.005x_2 \\ x_1+x_2 = 2000 \end{cases}$$

求解得:

$$\begin{cases} x_1=600 \\ x_2=1400 \end{cases}$$

平衡分配结果:

两条路径的所花费时间: $t_1=t_2=22$

我去，上面的图不是 beckmann 模型正常的求解，下面用我的图来代替：

$$\frac{10x_1 + 0.01x_1^2 + 15x_2 + \frac{0.005}{2}x_2^2}{}$$

$$10x_1 + 0.01x_1^2 + 15(2000 - x_1) + \frac{0.005}{2}(2000 - x_1)^2$$

$$= 10x_1 + 0.01x_1^2 + \underline{30000} - 15x_1 + \cancel{0.005 \times 1000 - \frac{0.005}{2}}$$

$$\frac{0.005}{2}\left((2000)^2 + x_1^2 - 4000x_1\right)$$

$$\frac{5\times10^3}{2} \quad 4\times10^6$$

$$\begin{array}{r} 0.0125 \\ \times\ 2 \\ \hline 0.0250 \end{array}$$

$$= \underline{10x_1 + 0.01x_1^2 + 30,000 - 15x_1} + \underline{\left(10\times10^3 + \frac{0.005}{2}x_1^2 - 10x_1\right)}$$

$$\underline{\min} = 0.0125x_1^2 - 15x_1 + 40,000$$

$$\Downarrow$$

$$0.025x_1 - 15 = 0$$

$$x_1 = 15/0.025 = 15000/25$$

$$= \frac{3000}{5} = 600$$

总结分析一下：用 Beckmann 模型求解的时候，可以发现，积分是时间阻抗和流量的乘积，不是直接的两者乘积，是积分形式的乘积（前面说过了，其实就是阻抗的积分）。为什么这么说，我们看看第二原理的求解结果是什么？看图说话：

系统最优原理其目标函数是网络中所有用户总阻抗最小，约束条件与用户均衡模型相同

$$\min: \tilde{Z}(X) = \sum_a x_a t_a(x_a)$$

$$s.t.: \sum_k f_k^{rs} = q_{rs}, \qquad \forall r, s$$

$$f_k^{rs} \geq 0, \qquad \forall r, s, k$$

说实话，从模型上看，是不一样，但是这个总阻抗最小，怎么理解啊？*我以为就是路段的 t 函数直接相加。可是不是啊，是阻抗和流量的乘积，再相加。*再回头看看 beckmann 模型求解的时候，那个也是目标最小，是路段上的流量和阻抗的积分和最小（积分的意义上面已经解释过了），是不一样的。继续第二原理的求解，看图说话:

将阻抗函数带入数学模型

$$\min:\tilde{Z}(X)=x_1(10+0.02x_1)+x_2(15+0.005x_2)$$

$$\min Z = x_1(10+0.02x_1)+x_2(15+0.005x_2)$$
$$=10x_1+0.02x_1^2+15x_2+0.005x_2^2$$
$$=10x_1+0.02x_1^2+15(2000-x_1)+0.005(2000-x_1)^2$$
$$=10x_1+0.02x_1^2+30{,}000-15x_1+0.005[(2000)^2-4000x_1+x_1^2]$$
$$=10x_1+0.02x_1^2+30{,}000-15x_1+20{,}000-20x_1+0.005x_1^2$$
$$=0.025x_1^2-25x_1+50{,}000$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\partial Z}{\partial x_1}\Rightarrow 0.025\times 2\,x_1-25=0$$
$$\Downarrow$$
$$0.05x_1=25$$
$$x_1=25/0.05=\frac{2500}{5}=500$$

通过结果，我们可以看到，一个是 600，一个是 500，果然还是不一样的。

8、以上我们看到了“问题—模型”的一个过程，并且解释（一半）了第一原理和第二原理的简单求解过程（虽然不是很懂）。这部分内容，我们决定讲解一下 W—F 的这个算法，是如何求解 Beckmann 的这个模型。其中，会牵涉到非线性规划的一些知识点。

9、F-W 算法，还是要看例子，才能懂的透彻一点。当然结合配流的案例一起的话，就可以更好的解释这个算法了。首先算法的思路在其他的地方已经解释过了，可以参考其他的地方。那么如何将两者结合考虑，我们理清楚一下思路。

（1）首先，目标函数的定义，看理论图：

[例] 用 F-W 算法求解带下面的带线性约束的非线性规划问题。要求取初始点 $\boldsymbol{x}^{(1)}=(0,0)^T$，终止误差 $\varepsilon=10^{-6}$。

$$\min f(\boldsymbol{x})=2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1-6x_2$$

$$x_1+x_2-2\le 0$$

$$x_1+5x_2-5\le 0$$

$$-x_1\le 0$$

$$-x_2\le 0$$

上图是理论图，就是用 F-W 求解最优化问题。那么道路网配流的最优化，怎么理解，变量是什么？看图：

Beckmann数学规划模型

$$\min: Z(X)=\sum_a\int_0^{x_a}t_a(w)dw$$

$$s.t.: \sum_k f_k^{rs}=q_{rs}$$

$$f_k^{rs}\ge 0,$$

$$其中，\quad x_a=\sum_{r,s}\sum_k f_k^{rs}\cdot\delta_{a,k}^{rs}\qquad \forall a$$

上图的模型太抽象了，理论研究的是 X 变量，你这里的变量是毛啊？是路段的流量，有好多路网，因此有好多变量，其实就是有 a 条路段，流量是 X_a。

（2）求解，第一个初始解。

[例] 用 F-W 算法求解带下面的带线性约束的非线性规划问题。要求取初始点 $\boxed{\boldsymbol{x}^{(1)}=(0,0)^T}$，终止误差 $\varepsilon=10^{-6}$。

$$\min f(\boldsymbol{x})=2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1-6x_2$$

$$x_1+x_2-2\le 0$$

$$x_1+5x_2-5\le 0$$

$$-x_1\le 0$$

$$-x_2\le 0$$

上图的初始解直接给出来了，就是 X1（0,0）。那么路网配流的初始解呢？可以用零流吗？不用，还是用第一次的配流，就是按最短路径的方式配流得到的整个路网的流量，这个时候肯定有的路段没有流量，有的路网有流量，这个时候就是 X1（flow1）。

```
                Im(i,j) = 10000;
            end
        end
end

% Following is while loop
W=Im; % assign the Im to Weight
% X1 = zeros(num); % initailize the flow matrix to zero
Dif = 10000; % Dif denotes the difference of the k+1 to k
X1 = AllorNothing(W,Q); % get flow matrix of first step
count = 0;
%trace = ones(10000,1);% shit ， there is a trace function in matlab,so change a name
plot_count = ones(10000,1);
while Dif>=0.0005  % 3 should be repleced by 0.5
    %for loop ,recaculate the weight matrix by Wk+1=Wk(1+0.5*(X/Ca)^4)
    C= zeros(num);
    for i=1:num
        for j=1:num
            if Cap(i,j)~=0
                C(i,j)=X1(i,j)/Cap(i,j);
            end
        end
    end
```

如上图所示，根据路网的阻抗和 OD，得到第一次的路网的流量 X1。

（3）怎么得到得到方向解 Y。

解：第一轮迭代

因为 $\nabla f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}4x_1-2x_2-4\\4x_2-2x_1-6\end{pmatrix}$

故 $\nabla f(\boldsymbol{x}^{(1)})=\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$。按(3)式作近似线性规划

$$\min \nabla f(\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{x}=-4x_1-6x_2$$

$$x_1+x_2-2\le 0$$
$$x_1+5x_2-5\le 0$$
$$-x_1\le 0$$
$$-x_2\le 0$$

如上图所示，根据当前点 X1 和近似线性函数，找到可行域中的线性最优解（Y1）。然后，根据这两个解，得到方向 D（P），看图：

可求得它的最优解 $\boldsymbol{y}^{(1)}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}^T$，由于 $\left|\nabla f(\boldsymbol{x}^{(1)})^T(\boldsymbol{y}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(1)})\right|>\varepsilon$，继续迭代，构造 $\boldsymbol{x}^{(1)}=(0,0)^T$ 点处可行下降方向 $\boldsymbol{p}^{(1)}=\boldsymbol{y}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(1)}$。从点 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 出发沿 $\boldsymbol{p}^{(1)}$ 进行有效一维搜索，即求解

$$\min_{0\le\lambda\le1} f(\boldsymbol{x}^{(1)}+\lambda\boldsymbol{p}^{(1)})=\frac{19}{8}t^2-\frac{19}{2}t$$

得最优解 $\lambda_1=1$。于是，下一个迭代点为

$$\boldsymbol{x}^{(2)}=\boldsymbol{x}^{(1)}+\lambda_1\boldsymbol{p}^{(1)}=(0\quad 0)^T+1\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}^T$$

注：梯度下降法的方向直接就是当前点的梯度反方向。

再来看看，配流方面的计算过程，怎么得到方向的。看图说话：

```
W=Im; % assign the Im to Weight
% X1 = zeros(num); % initailize the flow matrix to zero
Dif = 10000; % Dif denotes the difference of the k+1 to k
X1 = AllorNothing(W,Q); % get flow matrix of first step
count = 0;
%trace = ones(10000,1);% shit , there is a trace function in matlab,so change a na
plot_count = ones(10000,1);
while Dif>=0.0005  % 3 should be repleced by 0.5
    %for loop ,recaculate the weight matrix by Wk+1=Wk(1+0.5*(X/Ca)^4)
    C= zeros(num);
    for i=1:num
        for j=1:num
            if Cap(i,j)~=0
                C(i,j)=X1(i,j)/Cap(i,j);
            end
        end
    end
    % get the Weight used to caculate temporary matrxi of second matrix
%     temp = 0.15*C.^4;
    temp = 0.15*C;
    W2 = Im+temp.*Im;
    Y1 = AllorNothing(W2,Q); % get flow matrix of temporary second step
%     R = ramada(X1,Y1,Cap); % get the parameter ramada
    La1 = Lambda(X1,Y1,Cap,Im);
    La = double(La1);
    X2 = X1+La*(Y1-X1);
%    caculate sum of difference of matrice
     temp1 = (X2-X1).^2;
```

依据上图，我们知道，得到了 X1，我们可以根据路网流量，得到在此路网流量下的阻抗，在这个阻抗下面，我们可以得一个新的最优解（根据全有全无的方式得到的路网流量）。现在不解的是，这个新的最优解求出来的方式和理论上的求解不是一致啊。（理论上是用梯度去近似一个线性的目标函数，然后得到最优解）。看图说话，解释为什么求解在这个当前流量下的路网下，求解线性规划的最优解，其实是求解最短路径的分配。

如前所述，F-W 算法主要由两个部分组成，一是在每次迭代中确定搜索方向，二是确定搜索步长。而确定搜索方向相当于求解一个满足相应约束条件的线性规划问题，这在理论上当然很容易求解，但是对于大规模的网络来说，求解这个线性规划问题的计算量就很大，并且在每次迭代中都要求解这样的一个问题。通过下面的分析可以看到，将 F-W 算法应用到交通网络中，由于问题的特殊结构，线性规划问题将被寻找最短路径所代替，从而大大缩短了算法的计算时间。

根据上图的解释，我们可以得知，路网的配流问题中，求解线性最优，就是“全有去无的配流”。但是问题是，我怎么看不到这线性规划的目标函数，在哪里？看图

因为 $\nabla f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} \cdots \\ 4x_2-2x_1-6 \end{pmatrix}$

故 $\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(1)}\right)=\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$。按(3)式作$\boxed{\text{近似线性规划}}$

$$\min \nabla f(\boldsymbol{x}^{0})^{T}\boldsymbol{x}=-4x_1-6x_2$$

$$x_1+x_2-2\le 0$$

$$x_1+5x_2-5\le 0$$

这个是理论上的线性目标函数，我可以通过求梯度得到，但是路网配流问题上的线性目标函数，怎么看？（以后再补上）

既然得到了 Y1，就可以得到方向 Director。

（4）通过方向，找到下一个迭代点（下一个当前点）。这个怎么理解，其实就是根据一开始的当前解，我们可以找到一个下降方向，在这个方向中（Y1-X1），有一个解，是使可行域中是目标值最小的解（为什么不直接是 Y1，这个让我很困惑）。*回答：Y1 是在线性目标函数下求解得到的，不是真正非线性目标函数得到的。算法是通过线性函数，求得一个解，通过这个解确定方向后，在这个方向上进行一维搜索得到真正的最优解（纯属自我解释，不知对错）*

可求得它的最优解 $\boldsymbol{y}^{(1)}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}^{T}$。由于 $\left|\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(1)}\right)^{T}\left(\boldsymbol{y}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(1)}\right)\right|>\varepsilon$，继续迭代，构造 $\boldsymbol{x}^{(1)}=(0,0)^{T}$ 点处可行下降方向 $\boldsymbol{p}^{(1)}=\boldsymbol{y}^{(1)}-\boldsymbol{x}^{(1)}$。从点 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 出发沿 $\boldsymbol{p}^{(1)}$ 进行$\boxed{\text{有效一维搜索}}$，即求解

$$\min_{\boxed{0\le\lambda\le1}} f\left(\boldsymbol{x}^{(1)}+\lambda\boldsymbol{p}^{(1)}\right)=\boxed{\frac{19}{8}t^{2}-\frac{19}{2}t}$$

得最优解$\boxed{\lambda_1=1}$。于是，下一个迭代点为

$$\boldsymbol{x}^{(2)}=\boldsymbol{x}^{(1)}+\lambda_1\boldsymbol{p}^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}^{T}+1\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}^{T}$$

根据上图，我们可以发现通过设置步长 lambda，可以求得使目标函数最小的步长。提示，这个步长的范围是 0~1（区别梯度下降法的步长）。问题来了，上图没有给出怎么求得这个步长的算法。看一看，网络配流的求步长的过程。

UE配流模型的求解算法

迭代步长由下面的一维极值问题决定：

$$\text{(P3.3)}\quad \min Z\left[\boldsymbol{f}^n + a(\boldsymbol{y}^n - \boldsymbol{f}^n)\right] \tag{3-23}$$

$$\text{s.t.}\quad 0 \le \alpha \le 1 \tag{3-24}$$

对于一维极值问题（P3.3），许多方法都可以求解，其中比较有效的也许是二分法，因为目标函数（3-23）对 α 的导数很容易计算，即：

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} Z\left[\boldsymbol{f}^n + \alpha(\boldsymbol{y}^n - \boldsymbol{f}^n)\right] = \sum_a (y_a^n - f_a^n) c_a \left[f_a^n + \alpha(y_a^n - f_a^n)\right] = 0$$

此方法在一般的高等数学或运筹学书中都可以查到。

这样，用“全有全无”配流法可以得到下一步的迭代方向 $\boldsymbol{y}^n - \boldsymbol{f}^n$，求解一维极值问题可以得到迭代步长 α，因此，下一步的迭代点 $\boldsymbol{f}^{n+1}$ 便可以由下式得出：

$$f_a^{n+1} = f_a^n + \alpha(y_a^n - f_a^n) \tag{3-25}$$

从上图可以看出，就是各个路段的一些计算累加（但是我怎么觉的，求解阻抗的时候，用的是 BPR 函数，如果系数取值不同，可能得到的结果是不一样的），然后求根。看代码

```
num = length(X);
syms ramda ;
temp1 = ramda * (Y-X);
temp2 = X+ temp1;

temp3 = temp2./C;
% temp3 = temp3.^4;

temp4 = 0.15* temp3;
temp5 = ones(num)+temp4;

temp6 = Y-X;
temp7 = temp6.*T;
temp8 = temp7.*temp5;
% sum of matrix except the diagonal line
summation = 0;
for i=1:num
    for j=1:num
        if i~=j
            summation = summation + temp8(i,j);
        end
    end
end

Z = solve(summation,ramda);
La=vpa(Z);
```

可以看到，各个路段的累加，然后用 solve 函数可以直接求解出来步长（*但是书上说的是用二分法，这个很是不解*）。

（5）换当前点，进行迭代。

10、求解非线性优化的时候，matlab 有自带的函数，为什么还要自己编写呢？