

1、排队论的内容可以单独出一本书。因此，运筹学的主要内容是能够看懂基本的排队论模型，还有就是要懂得基本的概率论方面的东西，因为是随机理论。

2、排队论的系统主要关注输入和输出，输入就是到达的人数，输出是服务的能力。都会满足一些概率分布，因此要理解这些概率分布，首先就是泊松分布。

3、背景：有些事情，你是不能确定时间点发生什么事，或者那个时间点会不会发生这件事，这就叫不确定性。但是，有些事情是可以基本确定的，比如一个时间段，会发生什么事情。因此，概率统计的意义就在这里体现出来了。

参考：<http://www.ruanyifeng.com/blog/2015/06/poisson-distribution.html>

日常生活中，大量事件是有固定频率的。

- 某医院平均每小时出生3个婴儿
- 某公司平均每10分钟接到1个电话
- 某超市平均每天销售4包xx牌奶粉
- 某网站平均每分钟有2次访问

它们的特点就是，我们可以预估这些事件的总数，但是没法知道具体的发生时间。已知平均每小时出生3个婴儿，请问下一个小时，会出生几个？



有可能一下子出生6个，也有可能一个都不出生。这是我们没法知道的。

4、有种概率模型，就是可以知道在某个时间段（其实就是特定的时间段，就是数据来源的时间段，比如数据来源是一个小时，那么就是一个小时），发生事件的概率，看图：

泊松分布就是描述某段时间内，事件具体的发生概率。

$$P(N(t) = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

上面就是泊松分布的公式。等号的左边，P 表示概率，N表示某种函数关系，t 表示时间，n 表示数量，1小时内出生3个婴儿的概率，就表示为  $P(N(1) = 3)$ 。等号的右边， $\lambda$  表示事件的频率。

注意：**t 是时间段，不是时间点**（应该还是时间段），N 代表发生了几次。有的题目是会默认省略掉这个时间段的。

5、那么 poisson distribution 这个模型，主要是用来求时间发生概率的，分概率和累计概率两种，看例子：

**例：如果某地居民脑血管疾病的患病率为150/10万，那么调查该地1000名居民中有2人患脑血管疾病的概率有多大？**

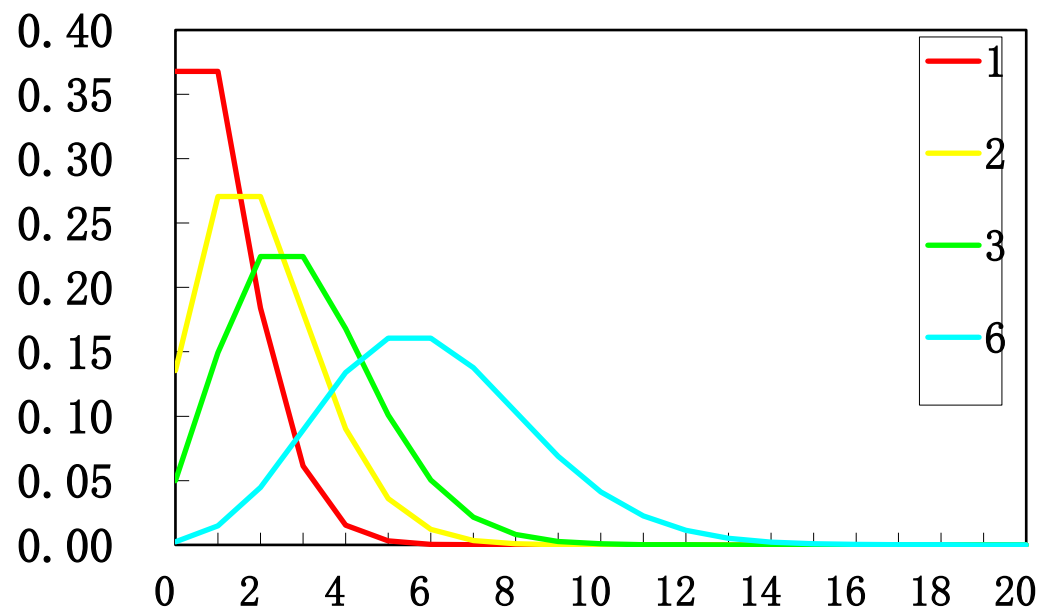
题目意思可以推断一下，时间段应该是一生，因此这个一生中的时间段内，这个地区的发病个数是多少呢？然后，用模型去求解这个个数的概率。这个个数就是 2，就是去求解 2 的概率，那么 lambda 是多少呢？可以求解， $\lambda = 1000 \times 150 / 100,000 = 1.5$ ，然后可以猜测到，这个概率应该比较大的，因为靠近期望值，看图：

$$\lambda = n\pi = 1000 \times 0.0015 = 1.5$$

$$P(X=2) = e^{-1.5} \frac{1.5^2}{2!} = 0.251$$

调查该地**1000**名居民中有**2**人患脑血管疾病的概率为  
**25.1%**

6、分布的性质分析。首先，看一下 poisson 分布的图形，看图：



## Poisson分布的图形

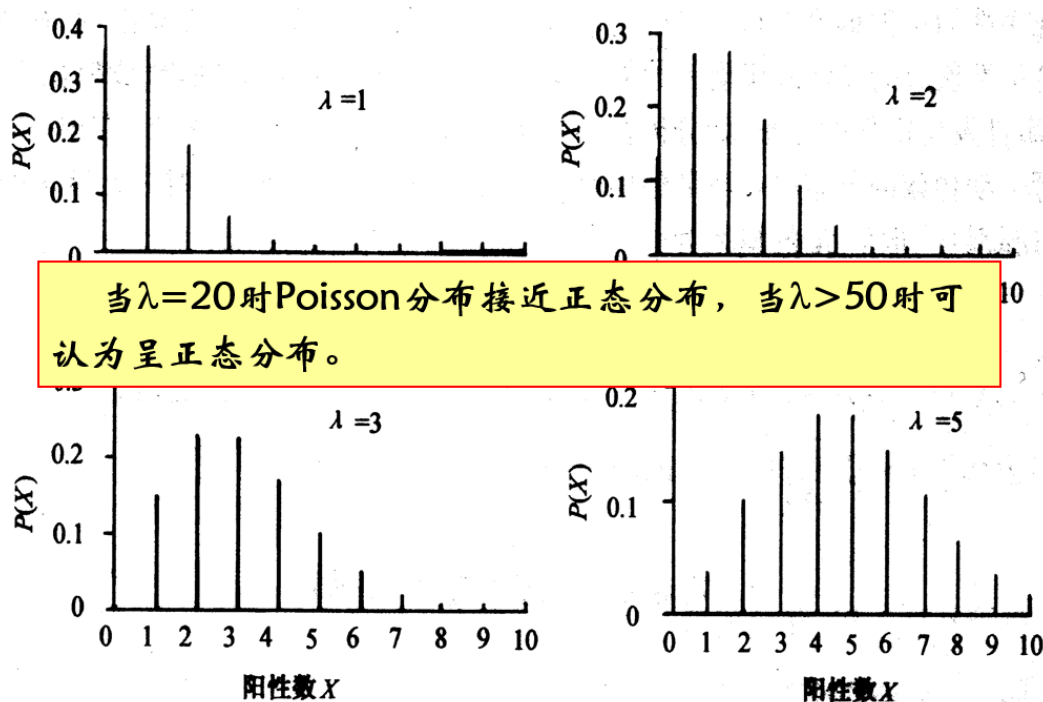


图 6-3 不同  $\lambda$  取值时的 Poisson 分布

根据以上 2 个图形，可以知道，单位时间到达的人数（时间发生的次数）越大，就说明越接近“正态分布”。记住，任何以后总分布的期望值，代表最有可能发生的。比如，上图中，1 代表发生的次数为 1 的可能性最大，5 代表单位时间发生的次数为 5 的可能性最大。那么，为什么  $\lambda$  越大，就变成了“正态分布”呢？因为，本来 poisson distribution 是个在单位时间内稀有事件的分布（主要看这个单位时间是分钟还是小时或者天）， $\lambda$  变大了，是不是大概率时间了，呵呵。看定义：

三、有泊松定理知，泊松分布可以作为描绘大量试验中稀有事件出现的频率的概率分布的数学模型。

我们把在每次试验中出现概率很小的事件称作**稀有事件**.

如地震、火山爆发、特大洪水、意外事故等等



由泊松定理， $n$ 重贝努里试验中**稀有事件**出现的次数近似地服从泊松分布.

7、如何判断一个事件（过程）是泊松分布呢？经验嘛，已经有些事件被认为是泊松分布了，比如服务的角度事件，看图：

某电话交换台在一段时间内收到的电话呼叫数；  
一个售货员接待的顾客数；  
公共汽车站在一段时间内来到的乘客数等等  
都近似服从泊松分布。

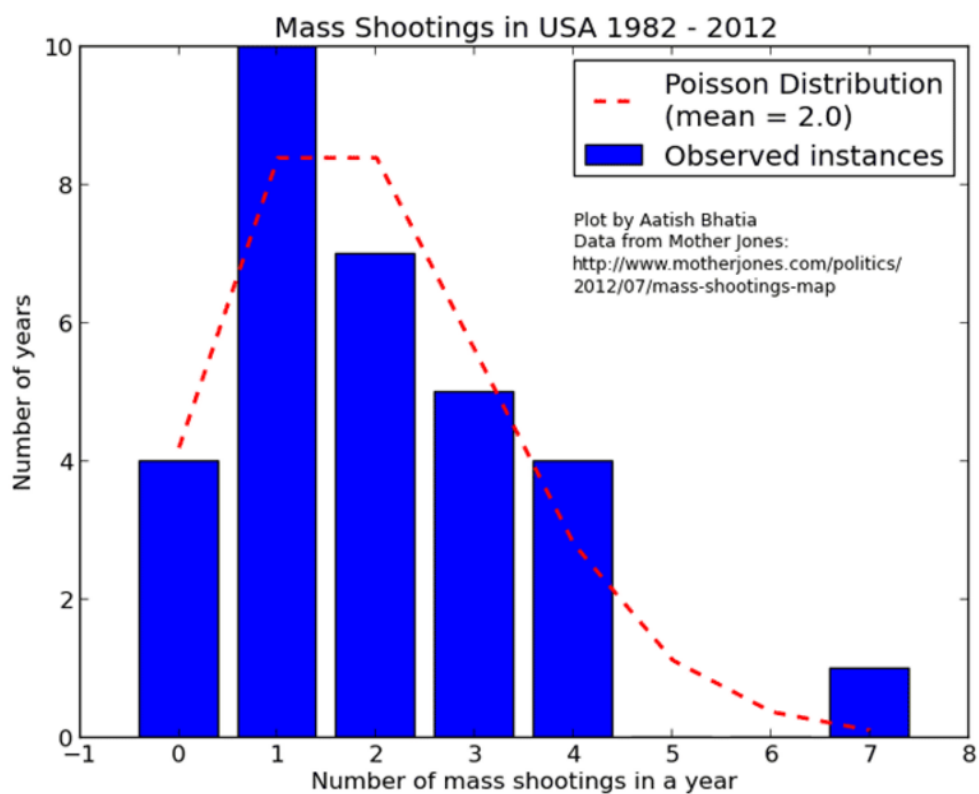
那要从数据的角度来看，怎么判断呢？那就是用数据说话，然后看看是不是相近，看图：

一年中发生枪击案的数量	观察值
0	4
1	10
2	7
3	5
4	4
5	0
6	0
7	1

这个是枪击案，稀有事件，算一算期望值，得到 2，就是说，如果是泊松分布，那么  $\lambda$  就是 2。也就是说一年发生这个时间的最优可能的数量是 2，或者说发生 2 次的可能性最大。接着，我们看看通过模型来看看对比，看图：

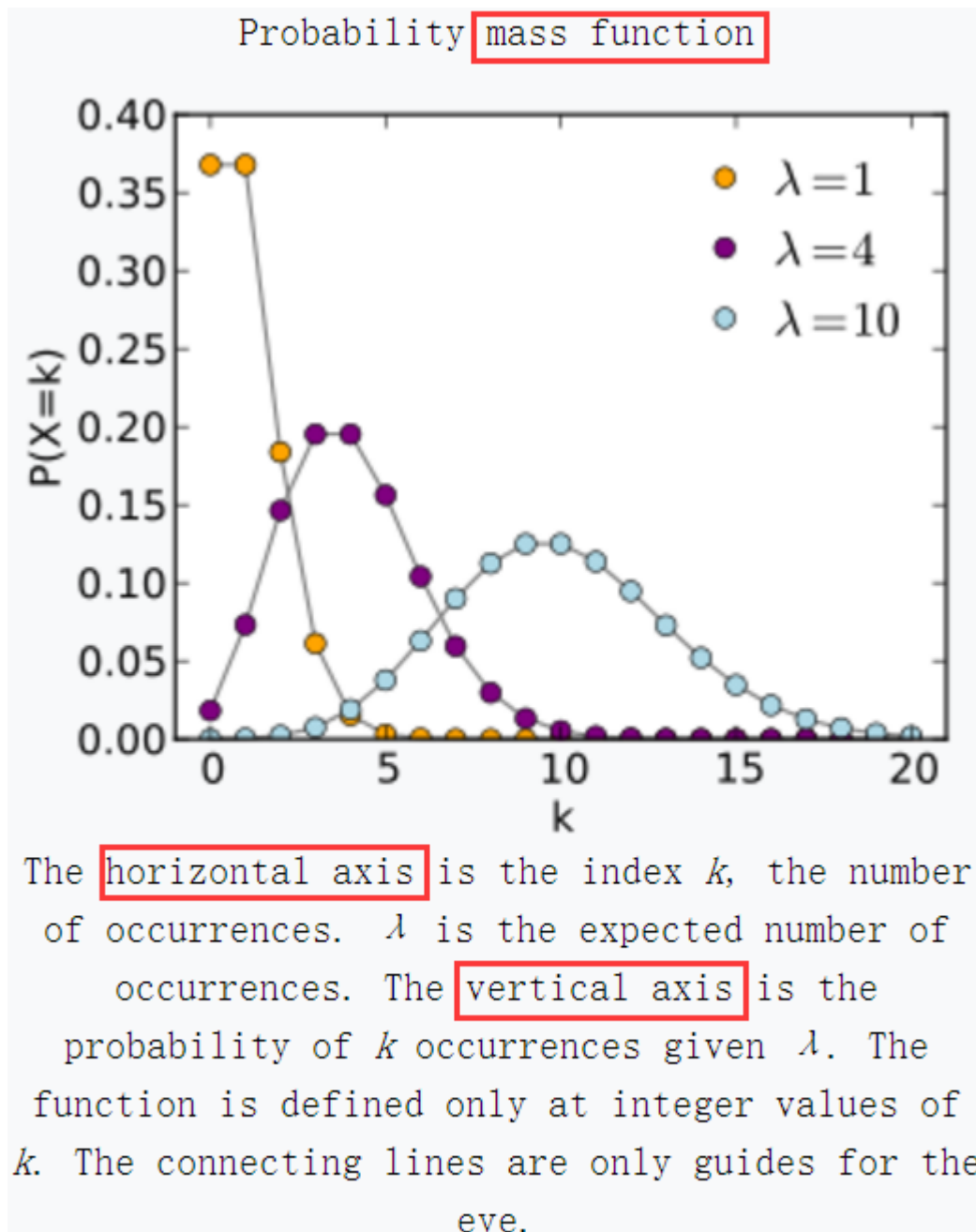


一年中发生枪击案的数量	观察值	泊松分布期望值
0	4	4.2
1	10	8.39
2	7	8.39
3	5	5.59
4	4	2.8
5	0	1.12
6	0	0.37
7	1	0.11



通过模型，我们可以看到，这个图形挺像 poisson distribution 的。问题来了，仔细看一下图，横坐标和纵坐

标，分别代表的意义，一个是频率，一个是次数。和正规的 poisson distribution 好像不一样。看图：



其实，差不多一样，horizon axis 是一样的意义，vertical axis 一个是数量表示，一个是概率表示，确切的应该是概率。从上图中，可以看到出了 lambda 等于 1 以外的图形，都和正态分布挺像的。