1、排队论的重要性，不言而喻。但是，研究的主要目的是要干什么呢？还有主要抓住那几块的知识点去理清楚排队论呢？这是主要要讲的内容。

2、什么是排队系统，看图：

**排队的过程可表示为：**

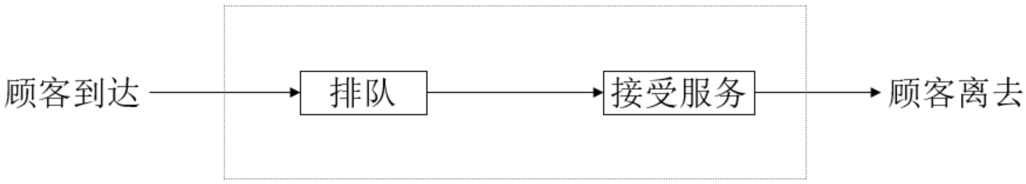


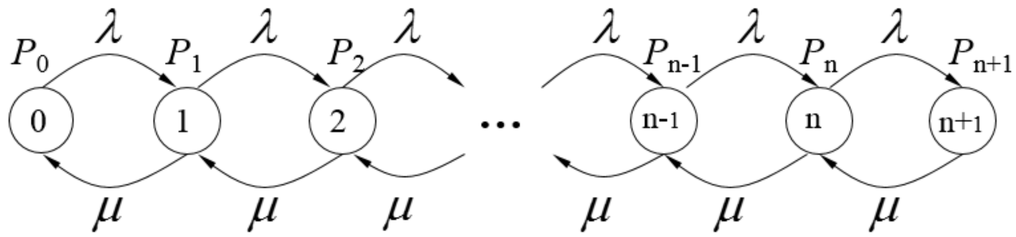

**图9-1 排队系统**

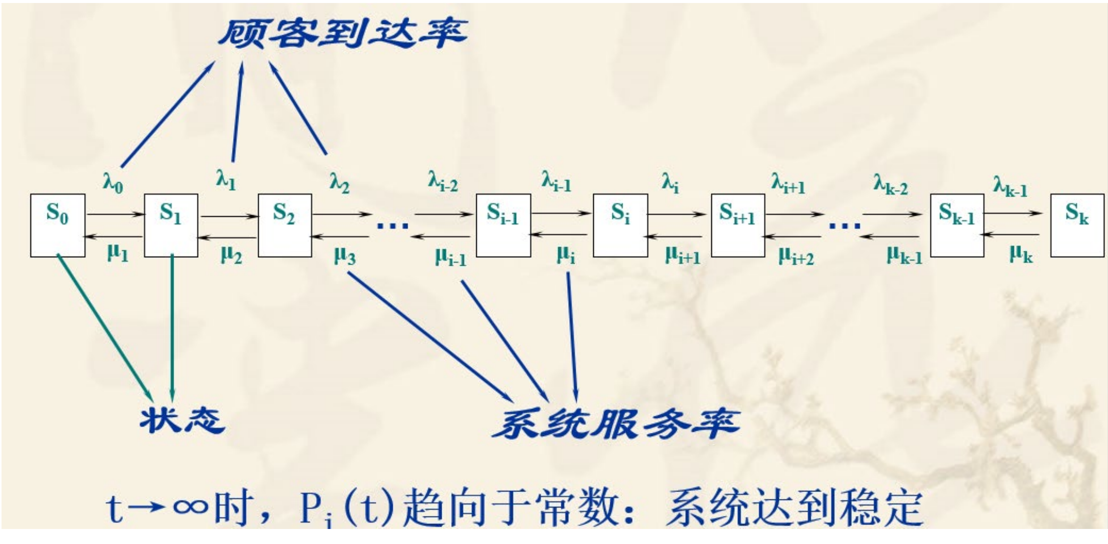
主要研究的是顾客到达的规律和服务的规律，当然这个基本已经研究透彻了，主要是 possion distribution 和负指数分布。知道了这些基本的内容后，或者说已知这些参数后，我们主要是求解哪些内容。看图：

- 要想预测在某一时刻将有多少顾客要求服务系统服务，或者预测某一顾客的服务时间将要延误多久这都是不可能的
- 对单位时间内到达系统的顾客数和服务时间这两个随机变量进行概率的描述
- 描述顾客到达和服务时间的方法，要求出单位时间内有K个顾客到达系统要求服务的概率，以及服务时间不少于某一时间长度的概率

要想知道的内容挺多的，可以根据题目好好理解一下。要求解的时候，除了以上的基本参数，还要知道一个系统平衡状态的知识，或者说“生灭系统”。

3、排队系统会在某个时候达到“稳定状态”，到了这个稳定状态后，系统中可能会没有人，或者 1 个人，或者 2 个人，或者 n 个人，不管那种状态（情况），他们都有一定的概率，分别为 $P_0$、$P_1$、$P_2$ 等，他们总的概率和肯定是 1。而且相邻两种状态能构转移的，当然只能向相邻的状态转移，看图理解：




针对 S1 状态，也就是状态只有一个人的情况，这种状态，要么会变成 S2（2 个人），要么变成 S0（0 个人）。这是在极短的时间内来确定的，因为突然一下，可能会来 2 个人的。在状态 1 的时候，来人的概率是 lambda，走人的概率是 mu，因此达到平衡的时候，这种状态的转出率（确切的说，是一种期望值，

为什么呢，前面的 P1 是概率，后面的是数值，数值*概率相加就是期望值）就是 P1*lambda+P1*mu，就是说他会变成这两种情况。同时，从这两种状态转过来的期望值是多少呢？P2*mu+P0*lanmbda。正是因为这个转入期望值和转出期望值，使得状态 S1 是稳定的。每一种状态的，都是这样理解的。那么，知道这些，有什么用呢？记住，每个概率之和是等于 1 的，因此要用到这个信息，看图：

对于$S_0$

$$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0 \longrightarrow P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

对于$S_1$

$$(\mu_1 + \lambda_1) P_1 = \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 \xrightarrow{P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0} \boxed{P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_1 \mu_2} P_0}$$

**依次类推**

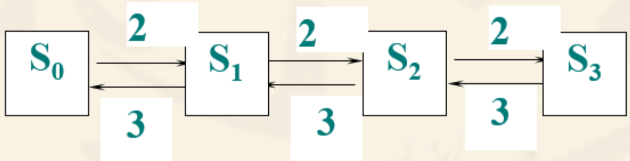
$$P_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} P_{i-1} = \frac{\lambda_{i-1} \lambda_{i-2} \Lambda\ \lambda_0}{\mu_i \mu_{i-1} \Lambda\ \mu_1} P_0$$

**且有** $\boxed{\sum_{i=0}^{k} P_i = 1}$

以上的关系，是终极关系，可以背下来（最好会推导），然后根据各种具体的情况，去推导求解，或者背一些特定的排队模型。看例子图：

某排队系统： M/M/1/$\boxed{3}$/∞/FCFS，λ=2，μ=3。求解各状态对应的概率。

➢首先，做出相应的状态转移图




对于$S_0$ $P_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0=\frac{2}{3}P_0$　　对于$S_1$ $P_2=\frac{\lambda_1}{\mu_2}P_1=\frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_1\mu_2}P_0=\frac{4}{9}P_0$

对于$S_2$ $P_3=\frac{8}{27}P_0$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{3}P_i=1 \Longrightarrow P_0+\frac{2}{3}P_0+\frac{4}{9}P_0+\frac{8}{27}P_0=1}$$

这是一个人数资源有限的的排队系统，如果针对的是人数资源无限的，那么又是一种情况，看图：

**【例9－1】**高速公路收费处设有一个收费通道，汽车到达服从泊松分布，平均到达速率为**150**辆／小时，收费时间服从负指数分布，平均收费时间为**15**秒／辆。求

**(1)**收费处空闲的概率；

**(2)**收费处忙的概率；

**(3)**系统中分别有**1**，**2**，**3**辆车的概率。

**【解】**根据题意，λ=150辆/小时，1/μ=15秒=1/240（小时/辆），即μ＝240（辆/小时）。$\rho$＝λ/μ=150/240=5/8，则有

**(1)**系统空闲的概率为：$P_0$=1－ρ=1－(5/8)=3/8=0.375

**(2)**系统忙的概率为：1-$P_0$=5/8=0.625

**(3)**系统中有1辆车的概率为：$P_1$=ρ(1－ρ)=0.625×0.375=0.234

系统中有2辆车的概率为：$P_2$= ρ$^2$(1－ρ)= 0.234×0.625=0.146

系统中有3辆车的概率为：$P_3$=ρ$^3$(1－ρ)==0.146×0.625=0.091

因此，要根据具体情况，去推导排队系统模型。

除了各种状态概率的求解，还可以得到系统的排队长度，系统长度和等待时间等。看定义

：

**1、队长——系统中的顾客数量**

$$L_S=\sum_{i=0}^{\infty}P_i\times i \longrightarrow \text{队长}$$

**2、排队长——系统中等待的顾客数量**

$$L_q=\sum_{i=1}^{\infty}P_i\times(i-\underbrace{1}_{\text{通道数}})$$

**3、逗留时间——顾客在排队系统中的总时间**

**李太勒公式**

$$L_S=W_S/(\boxed{\frac{1}{\lambda}})$$

**4、排队时间——顾客在排队系统中的等待时间**

**李太勒公式**

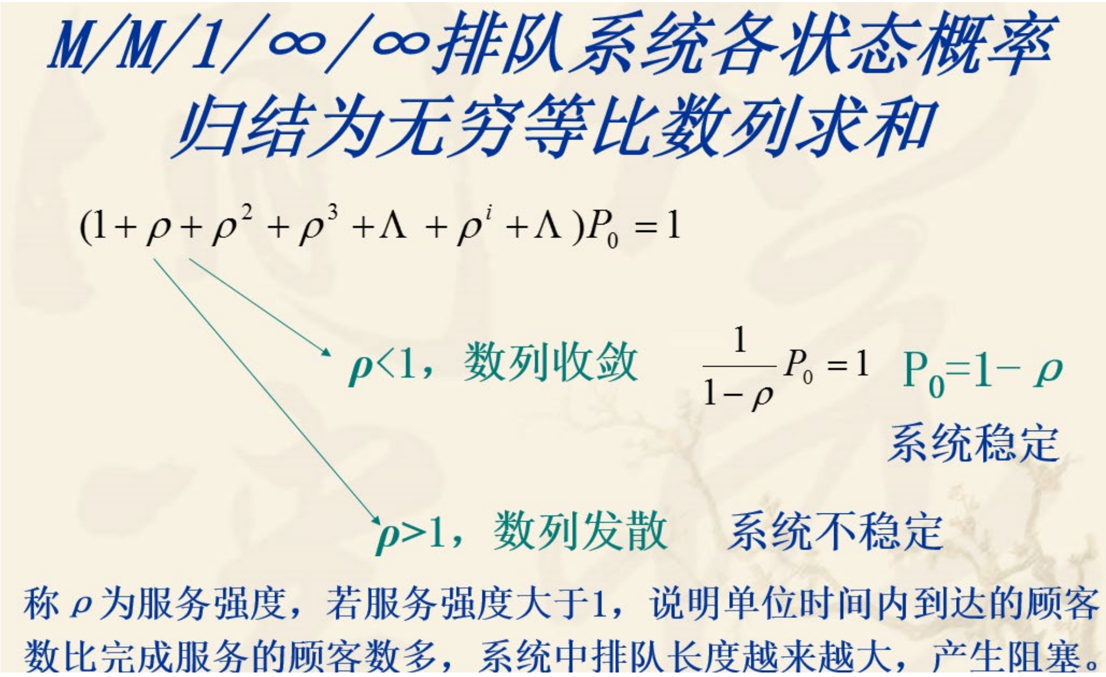
$$L_q=W_q/(\boxed{\frac{1}{\lambda}})$$

4、**M/M/1 排队系统（全无限）**

这是一个基本的排队系统，根据上面的基础理论，可以得到以下具体的公式，背一下，无妨，但是要知道推导过程。因为，

是一个 server，输入无限和容纳人无限，并且服务频率要高于到达频率，这样系统就不会瘫痪。

因此，状态的概率看图：




P0=1-lambda/mu;

剩下的概率一次类推。

排队长度看图：

其实，还是按定义求解的，只不过我不要状态为 0 的情况。

### 1、队长——系统中的顾客数量

$$L_S=\sum_{i=0}^{\infty}P_i\times i \longrightarrow \text{队长}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}i\times(1-\rho)\rho^{i}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}i\times\rho^{i}-\sum_{i=0}^{\infty}i\times\rho^{i+1}$$

$$=(\rho+2\rho^{2}+3\rho^{3}+\Lambda)-(\rho^{2}+2\rho^{3}+\Lambda)$$

$$=\rho+\rho^{2}+\rho^{3}+\Lambda$$

$$=\frac{\rho}{1-\rho}(0<\rho<1)$$

上面的是系统的排队长度，正真的排队长度应该是系统的-1 吧，但是，不是直接-1，看图：

### 2、排队长——系统中等待的顾客数量

$$L_q=\sum_{i=1}^{\infty}P_i\times(i-\underline{1})$$

通道数

$$=\sum_{i=1}^{\infty}i\times P_i-\sum_{i=1}^{\infty}P_i$$

$$=L_S-(1-P_0)$$

$$=\frac{\rho}{1-\rho}-\rho$$

$$=\frac{\rho^{2}}{1-\rho}$$

其实，还是按定义求解的，只不过我不要状态为 0 的情况。

5、**M/M/1 排队系统（容量有限）**

思路：容量有限，说明概率求和的时候，不是无穷大的求和，是求和到 n，因此不用极限知识。因此，得到概率公式：

$$(1+\rho+\rho^2+\rho^3+\Lambda+\rho^i+\Lambda\ \rho^m)P_0=1$$

*并不要求 $\rho<1$。*

$$P_0=\frac{1}{1+\rho+\rho^2+\Lambda+\rho^m}=\frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}\quad (\rho\neq 1)$$

**特别地，当 $\rho=1$ 时，$P_0=1/(m+1)$**