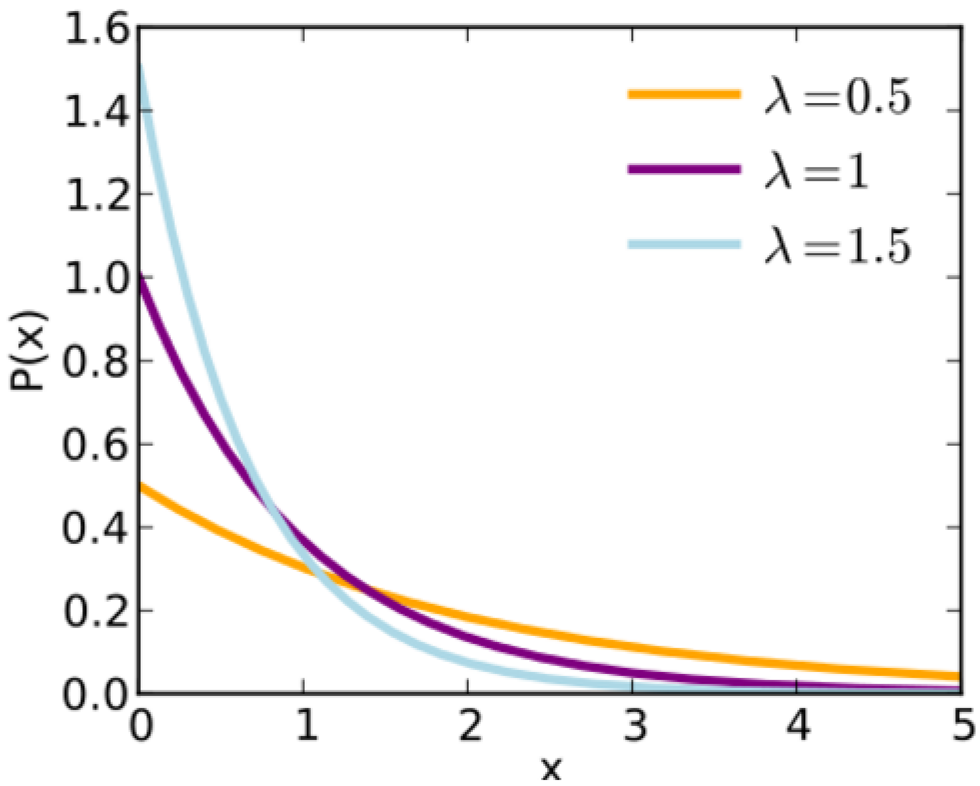
1、排队论中服务经常是负指数分布，那么我们就来认识一下什么是指数分布。

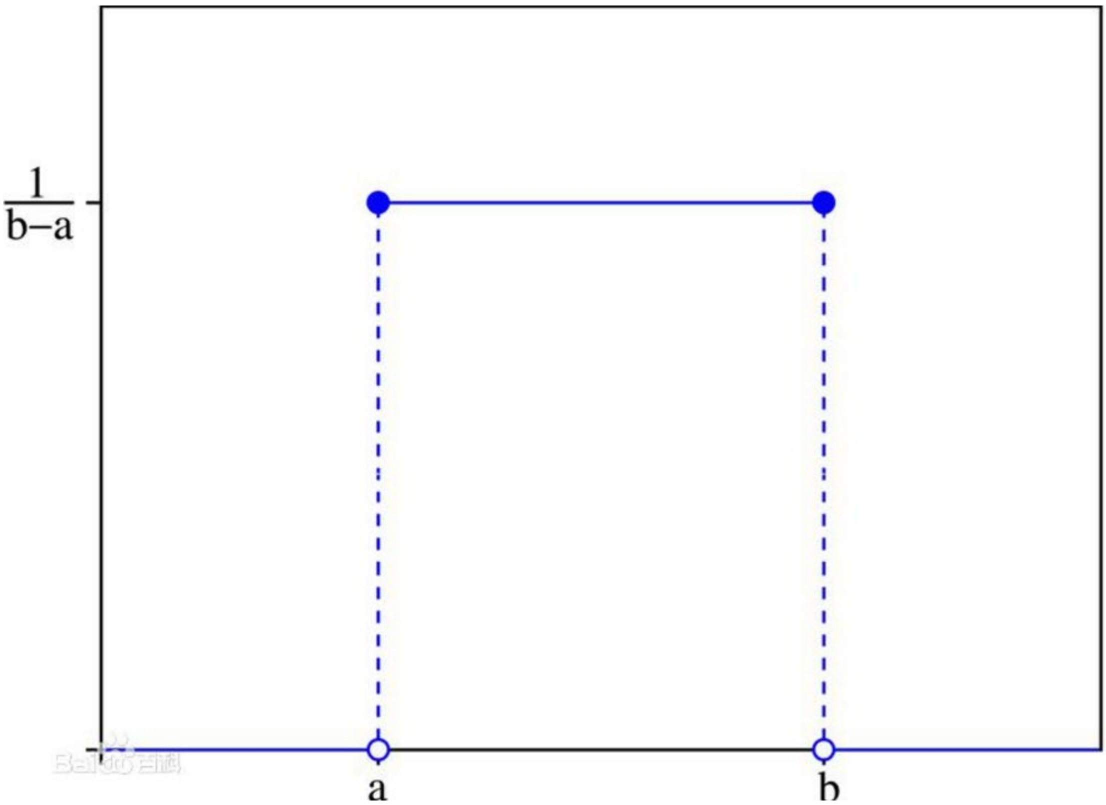
2、先看看指数分布的图形，看图：

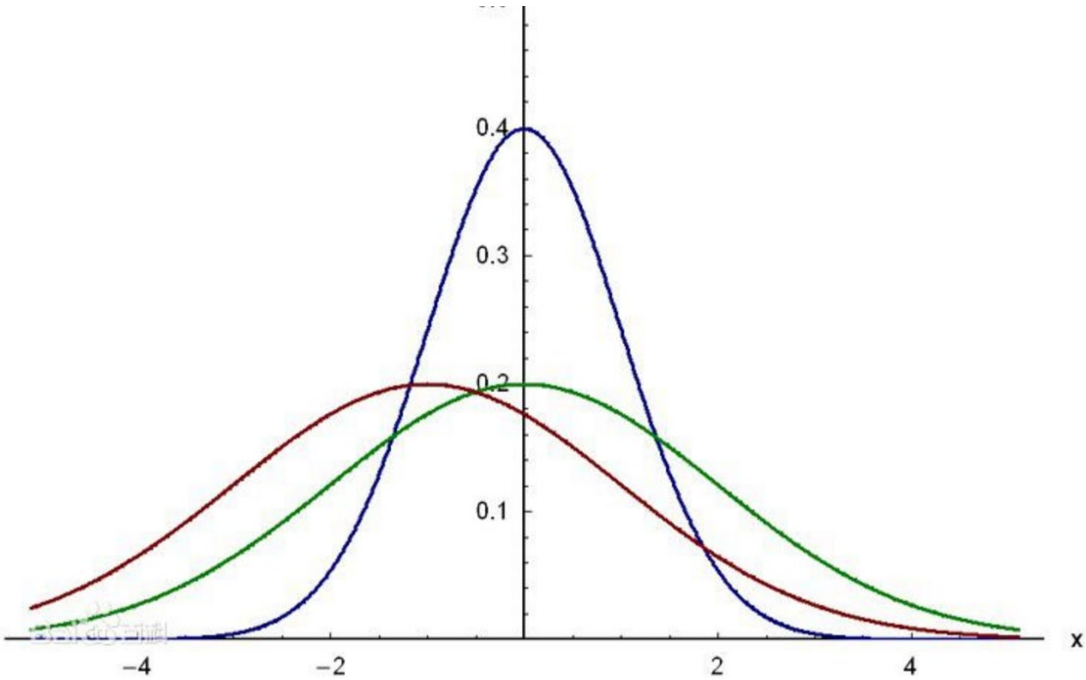
Probability density function



居然没有横纵坐标的说明。纵坐标肯定是概率，横坐标表示的是什么呢？

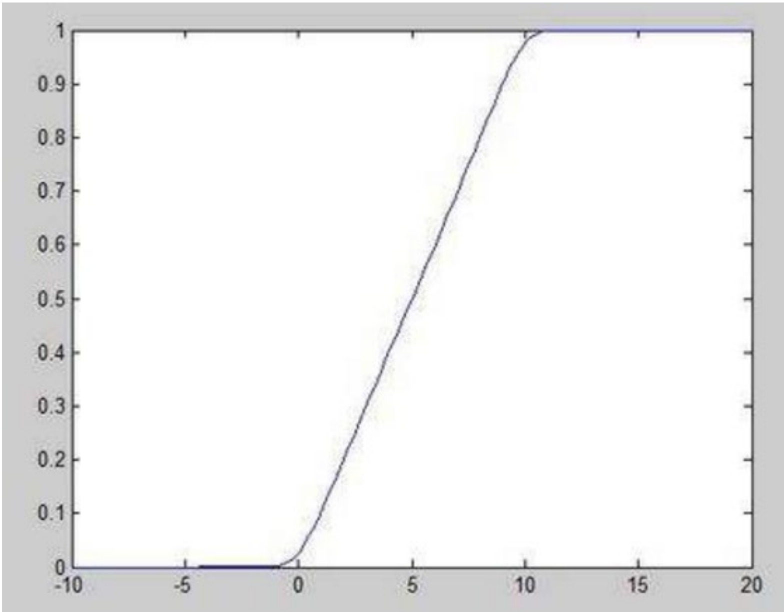
3、回顾一下概率密度函数和分布函数（累计概率函数）。其实原来学习的时候，并没有怎么去理解，现在要分析一下了。首先，概率密度函数（Probability density function，PDF）是为了形象的表示某个事件发生的可能性而已。看几个典型的函数，看图：

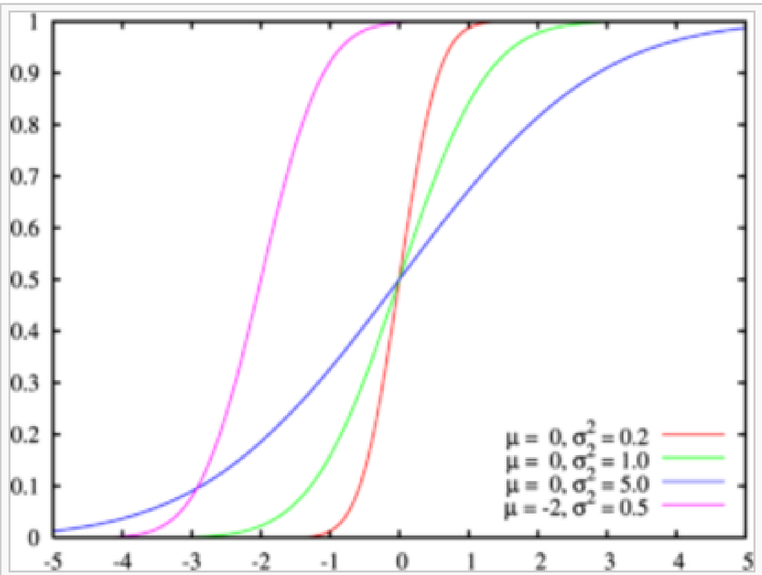




第一个是均与分布的概率密度函数，表示出现[a b]中的任意一点的可能性是一样大的，而第二个的正态分布的概率密度函数，表示出现在“期望值”的可能性最大。这种例子还有很多，有了这个图形，我们就可以根据对应表（查表或者公

式？），去查询任意一个事件发生的概率了（有点问题）。当然，除了想知道任何一个事件（比如考试 82 分）发生的概率。有的时候，我们还想知道一个区间的事件（比如考试 80-90 分的人数）发生概率，那就是累积分布函数（Cumulative distribution function，CDF）。同样的道理，知道了这个图形（函数），我们就可以知道任意区间发生的概率。看图：

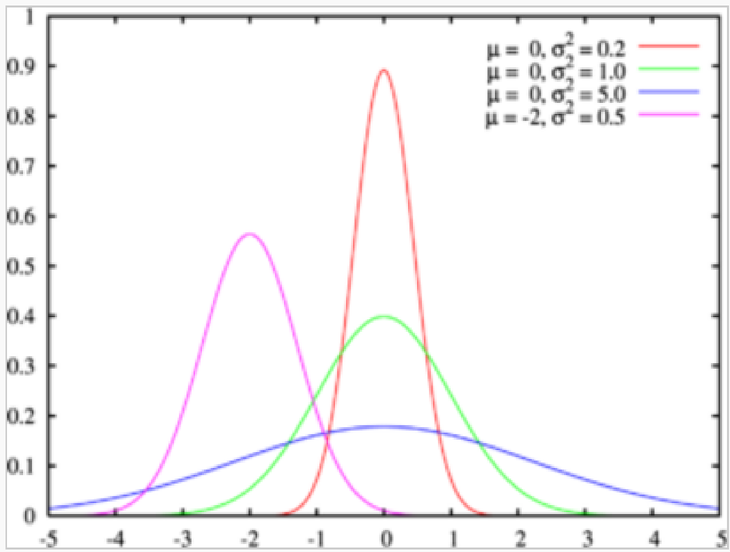




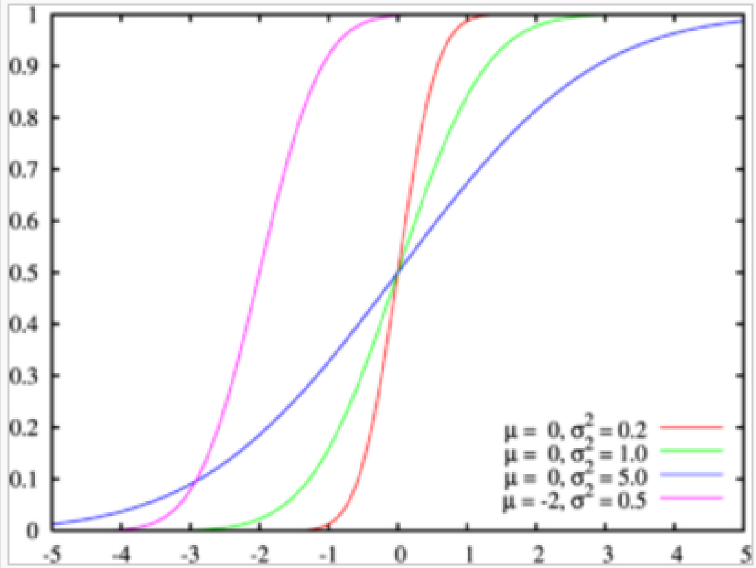
上图所示的概率密度函数的累积分布函数

第一个图表示的是均匀分布的累计分布函数图，理论上应该是一条直行，第二个图形表示的是正态分布的累积图。

4、两者之间的关系。累积的就是积分，那么密度的就是积分的导数。仔细理解一下，就可以发现之间的关系，密度居然是导数，表示的就是变化率的问题。因此，正态分布在“期望值”附近，应该增长的最快，在两端是很慢的，看图对比：



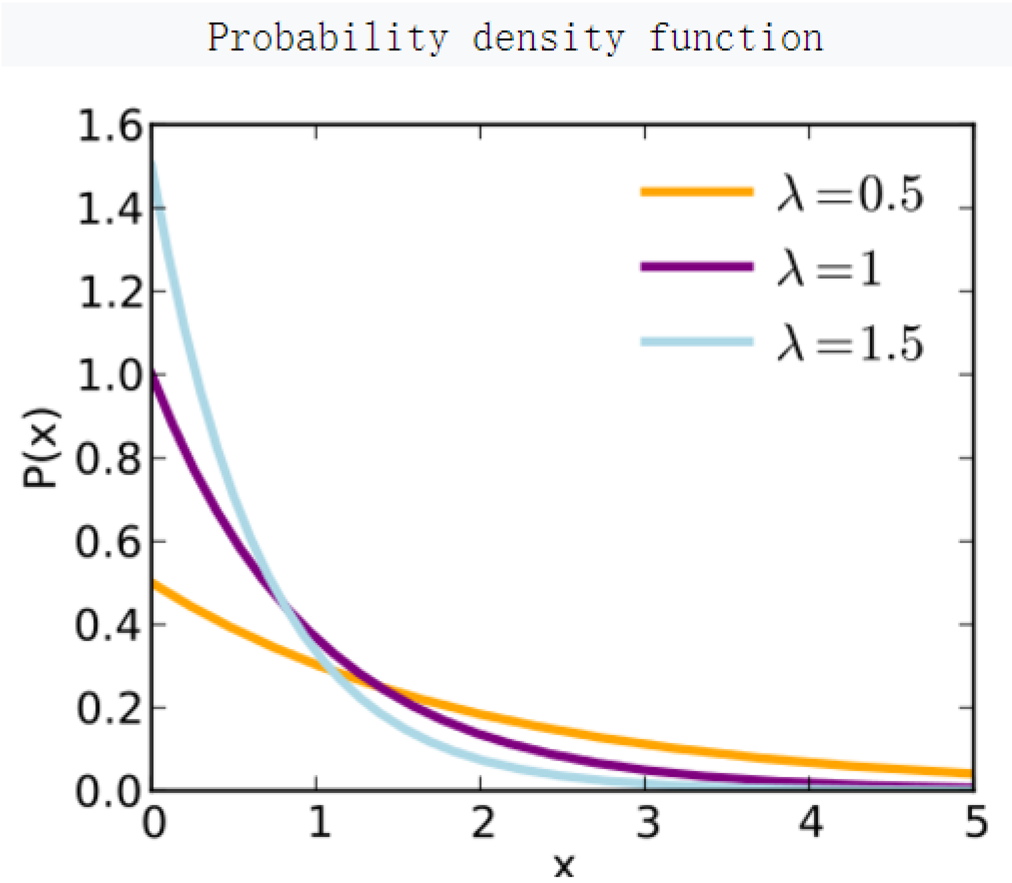
四个不同参数集的概率密度函数（绿色线代表标准正态分布）



上图所示的概率密度函数的累积分布函数

因此，知道其中的关系，就不难理解了。

5、回到指数分布的两个函数吧，再看图：



X 代表事件，代表什么事件呢？看图：

指数分布是事件的时间间隔的概率。下面这些都属于指数分布。

- 婴儿出生的时间间隔
- 来电的时间间隔
- 奶粉销售的时间间隔
- 网站访问的时间间隔

时间间隔就是事件，这个很难理解啊。拿考试这个事件来说，考 83 分，这个很好理解。怎么转变成时间间隔的事件，真的很难并且理解。但是，这个指数分布和 possion 分布是相关的，可以从这个方面理解。说实话，都不好理解。

6、看看高人是怎么推导的。参考：

http://www.ruanyifeng.com/blog/2015/06/poisson-distribution.html

指数分布的公式可以从泊松分布推断出来。如果下一个婴儿要间隔时间 t，就等同于 t 之内没有任何婴儿出生。

$$P(X > t) = P(N(t) = 0) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t}$$

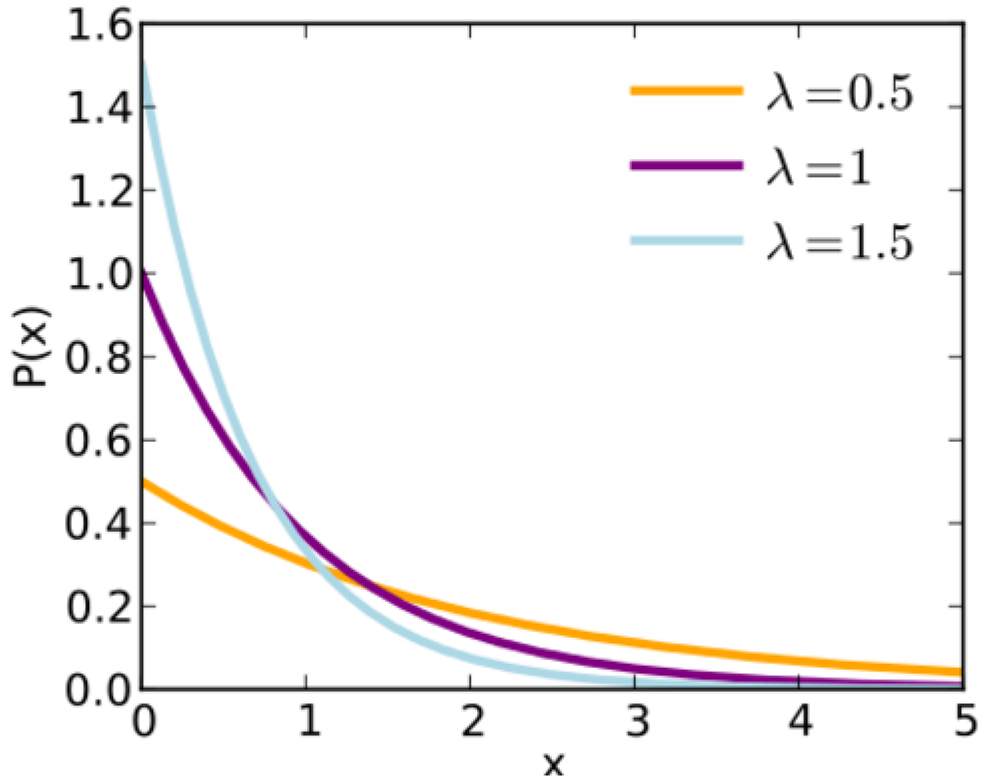
反过来，事件在时间 t 之内发生的概率，就是1减去上面的值。

$$P(X \le t) = 1 - P(X > t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

这个就是“指数分布”的累积分布函数。指数分布的期望值就是 1/lambda，方差是 $1/\text{lambda}^2$。

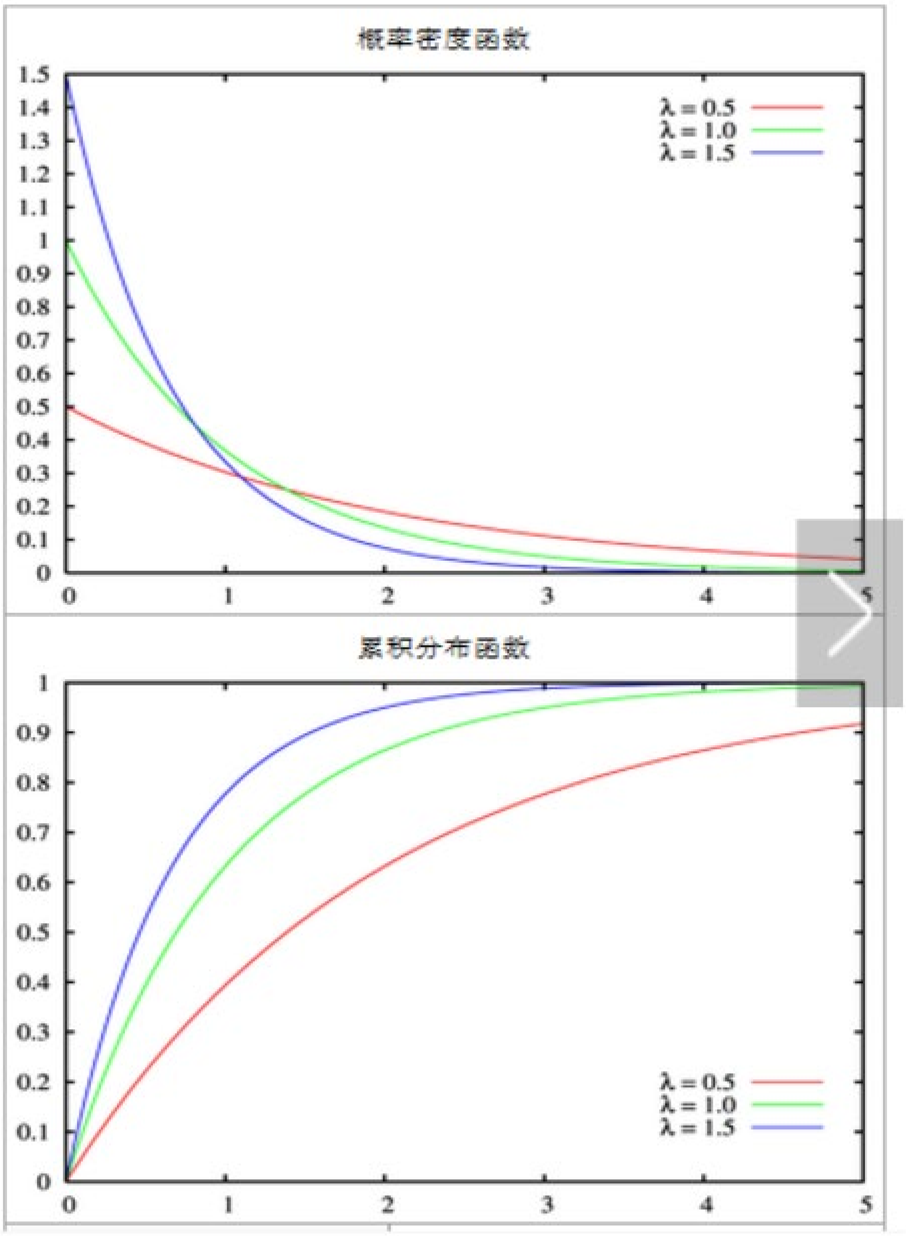
理一下思路：以排队论来说，如果 lambda = 5，那么就是一个小时之内有 5 个人到达，那么相继到达的时间间隔就是 0.2 小时，也就是说 0.2 小时的时间间隔这个事件发生的概率最大？或者说，12 分钟之内，不会来人的概率最大？应该不是这样的，如果 12 分钟之内不会来人，那么，10 分钟，不是更大，分钟不会来人最大了。再看指数分数的图：

Probability density function



从这种理论出发，就可以知道，横坐标，应该代表的是“时间点”（不是时间间隔），指数分布本来的意义应该是表示“在这个时间点**不会**发生事件”的概率。让我们分析一下上图：lambda = 0.5 ，说明一个小时到达 0.5 个人，那么时间间隔就是 2（小时），就是说 2 个小时不会出现人；如果 lambda = 1，那就是 1 个小时不会出现人。**注意：这个时间点，应该是在出现了是事件之后，再发生相同事件。**可以看出，当某个时间出现了以后，紧接着再次出现的概率是非常小的，或者说再次发生的概率是非常大的，符合上面图的意义。而且随着时间点的推移，就是说时间越久，不会发生的概率应该是越低的。但

是，如果从累积分布函数来看，横坐标表示的时间点意义应该是“会发生时间的概率”，看看图形：



从累积的角度说法，那么就是再次发生这个事件的概率。可以分析，lambda 越小的话，说明时间间隔越大，在相同的时间点，会发生事件的概率就越低（比 lambda 大的要低）。因此，可以解释的通。再看看公式的求解，看图：

接下来15分钟，会有婴儿出生的概率是52.76%。

$$
\begin{aligned}
P(X \le 0.25) &= 1 - e^{-3\times 0.25} \\
&\approx 0.5276
\end{aligned}
$$

接下来的15分钟到30分钟，会有婴儿出生的概率是24.92%。

$$
\begin{aligned}
P(0.25 \le X \le 0.5) &= P(X \le 0.5) - P(X \le 0.25) \\
&= (1 - e^{-3\times 0.5}) - (1 - e^{-3\times 0.25}) \\
&= e^{-0.75} - e^{-1.5} \\
&\approx 0.2492
\end{aligned}
$$

7、看一个例子，分析一下。

例1 电子元件的寿命X(年）服从参数为3的指数分布.

(1) 求该电子元件寿命超过2年的概率。

(2) 已知该电子元件已使用了1.5年，求它还能使用两年的概率为多少？

这个例子，和平时看到的例子（服务系统的到达）不一样，因此，需要转变理解。寿命服从指数分布，那就是说这个事件就是“结束生命”，意思是平均3年就死一个（或者说3年天堂就收一个人，来一个人）。转变过来了，就好办了。看问题1，等价于2年后才坏掉的概率，根据图形，大概是0.55左右（猜的）。看图（看不懂）：

$$(1)\quad p\{X>2\}=\int_{2}^{+\infty}3e^{-3x}dx=e^{-6}.$$

再看问题 2，已经使用了 1.5 年，再使用 2 年，这个要怎么转变呢？就是说已经有 1.5 年天堂没有收人了，还要等 2 年再收人的概率，换成数学的意思，就是在 1.5 年到 3.5 年，天堂有人的概率。**以上推导错误**，应该用的是**条件概率**，看图：

$$(2)\quad P\{X>3.5|X>1.5\}=\frac{P(X>3.5\bigcap X>1.5)}{P(X>1.5)}=\frac{P(X>3.5)}{P(X>1.5)}$$

$$=\frac{\int_{3.5}^{+\infty}3e^{-3x}dx}{\int_{1.5}^{+\infty}3e^{-3x}dx}=\frac{e^{-10.5}}{e^{-4.5}}=e^{-6}$$