

目 录

第一章 线性规划基础	1
第三节 用Excel求解线性规划问题	1
一、规划求解工具的加载	1
二、规划求解工具的使用	2
第四章 整数规划	10
第四节 用Excel求解整数规划问题	10

第一章 线性规划基础

第三节 用Excel求解线性规划问题

如前文所述，线性规划问题是运筹学研究领域中发展最早，研究最成熟的分支之一。因此，许多计算机软件都设计并实现了线性规划问题的求解。其中，最具代表性的软件当属微软公司办公软件系列中的Microsoft Office Excel软件。

一、规划求解工具的加载

用Excel求解线性规划问题使用的工具是集成在Excel中的“规划求解”工具，但这个工具在默认状况下并未加载。下面以Excel 2007版为例，介绍如何操作加载规划求解工具。

- 1) 运行Excel，鼠标单击“Office按钮”，在下拉菜单的右下角找到并点击“Excel选项”按钮。
- 2) 在弹出的“Excel选项”对话框（如图1-1所示）左边列表中，选择“加载项”。然后，单击对话框下部的“转到(G)...”按钮。

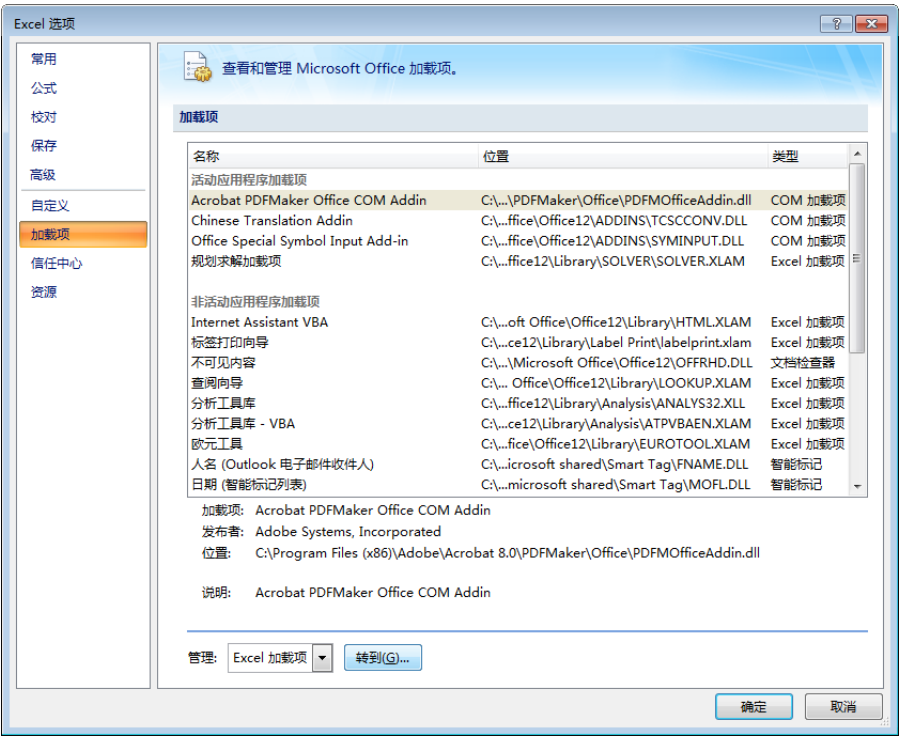


图 1-1 “Excel选项”对话框

- 3) 在弹出的“加载宏”对话框中，选中“规划求解加载项”，单击“确定”按钮加载规划求解工具。

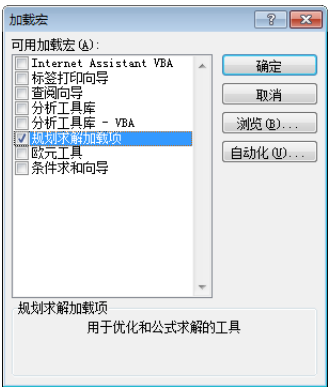


图 1-2 “加载宏”对话框

如果在安装Office时未安装Excel加载项，或者未安装加载项中的规划求解项，则需根据提示找到安装文件或光盘进行安装。当规划求解工具被成功加载之后，在“数据”功能区中将会增加“分析”一栏，其中包含了规划求解工具的按钮（如图1-3所示）。

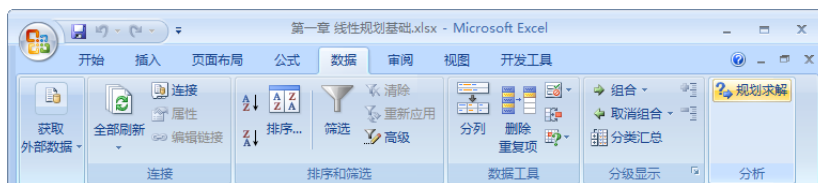


图 1-3 规划求解工具的位置

单击规划求解图标，出现图1-4所示的“规划求解参数”对话框。完成上述步骤后，任何时候启动Excel都会载入规划求解工具。



图 1-4 “规划求解参数”对话框

二、规划求解工具的使用

应用Excel规划求解工具求解线性规划问题，其计算求解过程可以大体上分为三个步骤：

- 1) 线性规划问题的计算机建模（将目标函数和约束方程输入Excel表格）；
- 2) 规划求解工具的参数设置；
- 3) 规划求解工具的求解计算以及计算结果数据解析。

下面以例??中的线性规划问题为例，演示规划求解工具的使用和求解过程。

例 1-1 应用Excel规划求解工具求解例??中的线性规划问题。

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Z = 3x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 \leq 4 \\
 & x_2 \leq 6 \\
 & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

解：首先，在Excel中输入例??问题的数学模型。一般来说，用Excel中输入线性规划模型的模式没有严格的规定，可以根据个人的习惯来确定变量、约束条件和目标函数的输入位置。为了清楚地表述输入的数值所表征的对象，在相应的数字旁用文字进行了标示，这些文字(包括“ \leq ”等符号)对计算过程没有任何影响。同时，为了与手工输入的数据和公式区分开来，用有底色的空白单元格来存放Excel规划求解的计算结果。本例模型各参数输入的结果如图1-5所示。

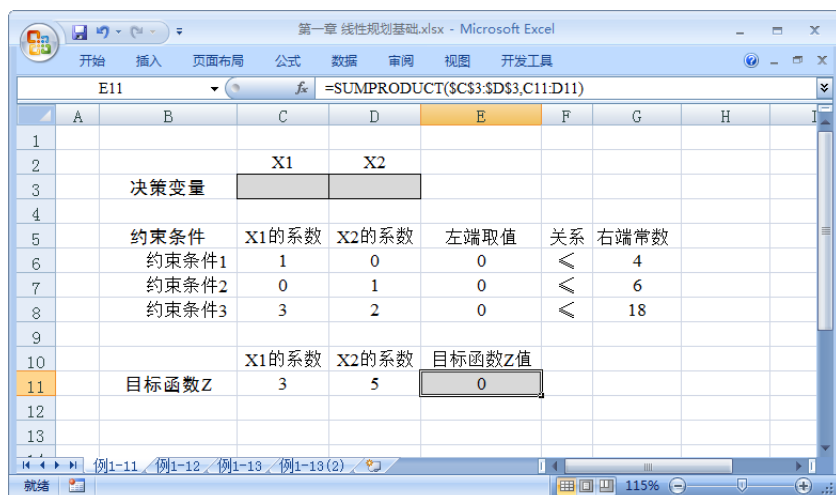


图 1-5 在Excel表中输入参数的图示

在图1-5中，本问题中需求解的决策变量 x_1 和 x_2 存放在单元格C3和D3中（可不输入数字，也可输入0作为初始数值）； x_1 和 x_2 在约束条件中的系数分别存放于单元格C6:C8和D6:D8中； x_1 和 x_2 在目标函数中的系数分别存放于C11和D11中；约束条件中右端的常数存放于G6:G8中；最后，本问题要求解的目标函数值Z存放于E11单元格。

在各系数输入完后，还需输入关系表达式才能进行求解，这也是为什么在图1-5中预留了E6:E8和E11分别作为输入约束条件左端的表达式和目标函数式的位置。以目标函数式 $Z = 3x_1 + 5x_2$ 为例，由于 x_1 和 x_2 存放在单元格C3和D3中，而 x_1 和 x_2 在目标函数中的系数分别存放于C11和D11中，则可在单元格E11中输入以下Excel公式来计算Z值：

$$= C11*C3+D11*D3 \quad (1-1)$$

这里有一个输入表达式的技巧，注意到式(1-1)实际上是数组C3:D3与C11:D11的乘积形式，如使用Excel集成的SUMPRODUCT函数*则可大大简化输入过程：单元格E11的公式可输入为

$$= \text{SUMPRODUCT}(C3:D3,C11:D11). \quad (1-2)$$

类似可以得到约束条件中单元格E6:E8的计算公式分别为：

表 1-1 单元格E6:E8的Excel公式	
单元格	Excel公式
E6	=SUMPRODUCT(C3:D3,C6:D6)
E7	=SUMPRODUCT(C3:D3,C7:D7)
E8	=SUMPRODUCT(C3:D3,C8:D8)

这里可以使用的另一个Excel技巧是利用“绝对引用[†]”来使输入的公式可以复制到其它单元格。在本例中，可以利用绝对引用把第一个数组（即变量所在单元格）的位置固定，即：把“C3:D3”改写为“\$C\$3:\$D\$3”，把式(1-2)改写为：

$$= \text{SUMPRODUCT}(\$C\$3:\$D\$3,C11:D11).$$

然后把单元格E11复制到E6:E8，即可实现公式的正确复制[‡]。如图1-6。

*SUMPRODUCT函数的语法为：“=SUMPRODUCT(数组1, 数组2, 数组3, ...)”，可对2个以上不超过255个数组中相应的元素相乘，并返回乘积之和。详见Excel帮助。

[†]Excel公式中，可用符号“\$”实现对行、列或单元格的绝对引用。关于绝对引用和相对引用，详见Excel帮助。

[‡]注意：复制对象是单元格而不是其中的Excel公式。

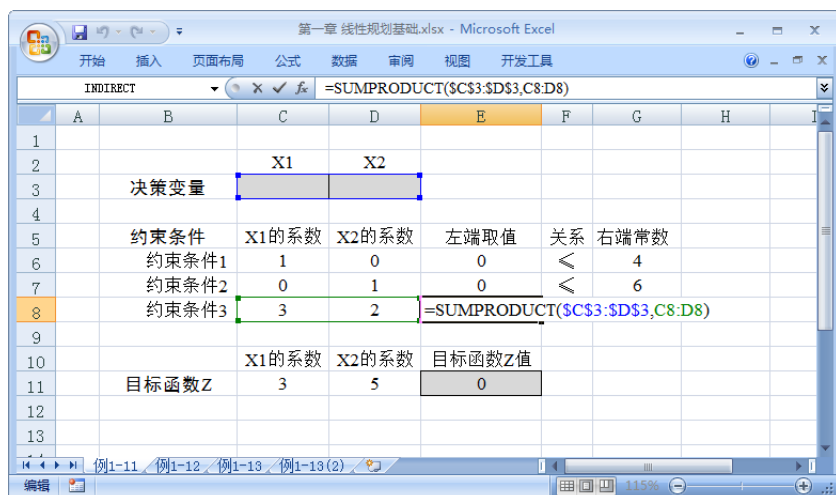


图 1-6 在Excel表中输入完整模型的图示

上述步骤全部完成后，就可调用Excel的规划求解工具进行求解。打开“规划求解参数”对话框，设定参数结果如图1-7所示。

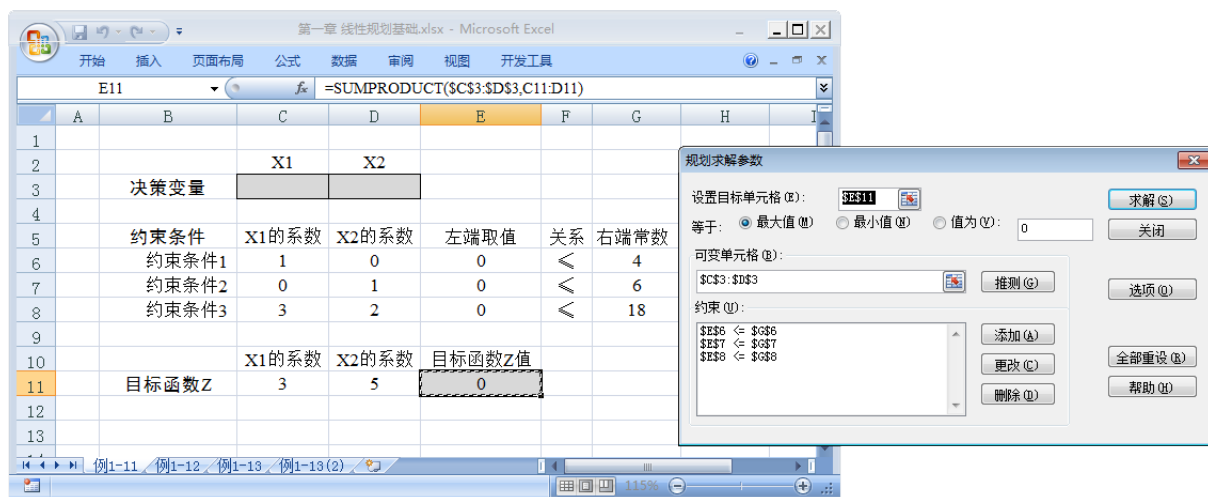


图 1-7 “规划求解参数”对话框设置

具体操作过程为：选定“规划求解参数”对话框中的“设置目标单元格”的输入框，然后直接用鼠标在工作表中选择单元格E11，或者手工输入E11，即可完成目标单元格的设置*；在“等于”项选择“最大值(M)”，因为本例的目标为求目标函数的最大值；选定“可变单元格(B)”下方的输入框，然后直接用鼠标在工作表中拖选单元格C3:D3，这样就设定了决策变量 x_1 和 x_2 所对应的单元格；“约束”项则输入模型中约束条件部分：选定“约束”项输入框，点击右侧的“添加”即可弹出“添加约束”对话框。图1-8为输入第一个约束不等式的示例。



图 1-8 “添加约束”对话框

按此方式再添加另外两个约束条件，就得到了如图1-7所示的输入结果。另外，由于本例中的3个约束条件不等式全部为“≤”约束，可以通过鼠标拖选，更快捷地将三个约束条件用一个“添加约束”对话框完成，如图：

*注意：由于采用了鼠标选择的方式，图1-7中“规划求解参数”对话框中的“设置目标单元格”显示为“\$E\$11”，这正是前面所说的对单元格E11的绝对引用，下同。



图 1-9 简化后的约束条件输入形式

除此之外，还需注意线性规划通常要求的决策变量的非负约束。在Excel规划求解中，可以采用如图1-10的方式以约束条件 $x_1, x_2 \geq 0$ 的形式对过“添加约束”对话框来设定。



图 1-10 决策变量的非负约束条件

更便捷的方法是也可以“规划求解参数”对话框点击“选项(O)”按钮，在打开的“规划求解选项”对话框中选中“采用线性模型(M)”和“假定非负(G)”两个选项。前者限定输入的模型为线性规划模型，后者就是约定决策变量为非负。其它参数保持默认*，点击确定返回“规划求解参数”对话框。



图 1-11 “规划求解选项”对话框设置

回到如图1-7的视图，点击“规划求解参数”对话框中的“求解(S)”按钮。求解完成的同时弹出了规划求解结果对话框，如图1-12所示。

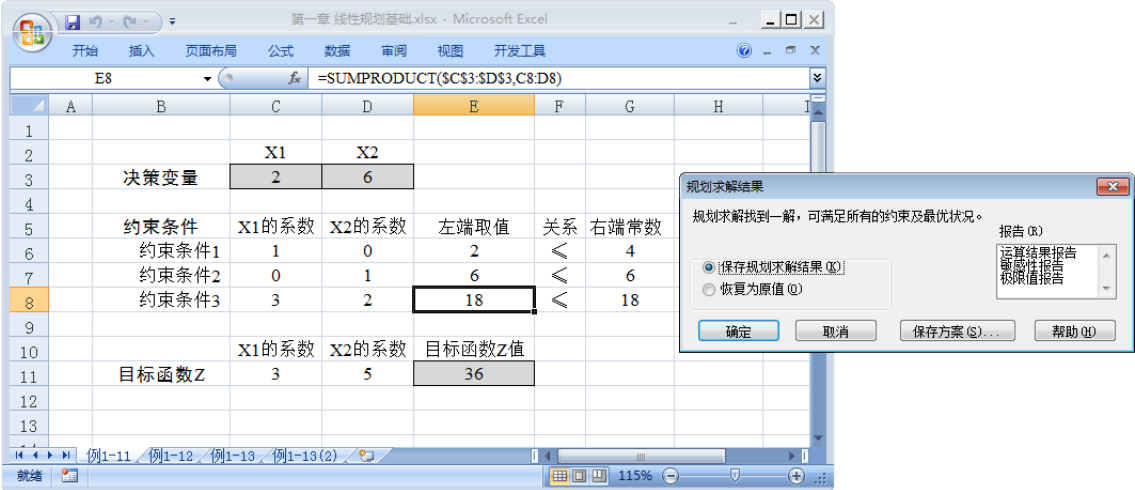


图 1-12 “规划求解结果”对话框

“规划求解结果”对话框显示“规划求解找到一解，可满足所有的约束及最优状况”，可知规划求解工具计算得到了该问题的最优解。从Excel工作表中输入模型时预留给决策变量和目标函数Z值的位置(C3:D3和E11)，读出最优解为 $x_1^* = 2, x_2^* = 6$ ，最优目标函数值为 $Z^* = 36$ 。求解结束。

* “规划求解选项”对话框其它参数在求解非线性规划问题或大型线性规划问题才需设置，其含义详见Excel关于“规划求解选项”的帮助文件。

本例中“规划求解结果”对话框中的信息显示为：“规划求解找到一解，可满足所有的约束及最优状况”。这并不是唯一可能出现的结果，对于线性规划的求解结果，可能出现的显示结果有：

1. 规划求解找到一解，可满足所有的约束及最优状况；
2. 规划求解找到一解，可满足所有约束；
3. “设置目标单元格”的值未收敛；
4. 规划未解找不到可行答案；
5. 达到最大x限制时停止选择；
6. 未满足“采用线性模型”的条件。

其中前4种情况比较常见。本例为第1种情况；第2种情况出现在若干次迭代后目标函数基本未变时，出现这种情况并不意味着已经找到了最优解；第3种情况通常说明问题有无界解（目标函数值可为无穷大或负无穷大）；第4种情况出现在问题无可行域时*。

需特别说明的是，Excel的规划求解工具不会去判断一个问题是否有无穷多最优解，也就是说，如果显示如本例一样的信息(第1种情况)，并不能说明得到的最优解为唯一最优解，可以在点击“保存规划求解结果”后再进行若干次规划求解，以初步判断是否存在其它的最优解。

另外，“规划求解结果”对话框会显出可以生成三种报告的选项：“运算结果报告”，“敏感性报告”和“极限值报告”。单击“报告”列表中自己想要查看的报告，然后点击“确定”。Excel会在独立的工作表上显示出各个报告†。

例 1-2 应用规划求解工具求解例??中的线性规划问题

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

解：在Excel工作表中输入模型的各系数，完成规划求解参数的设置，如图1-13所示。

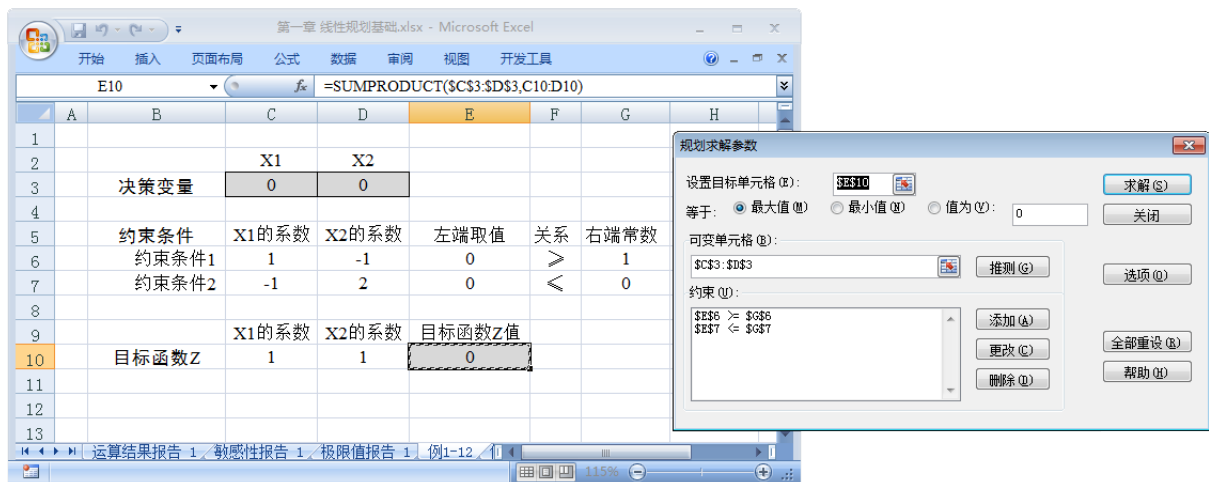


图 1-13 输入模型及规划求解参数

在“规划求解选项”对话框中选中“采用线性模型(M)”和“假定非负(G)”两个选项后，求解本问题。虽然工作表中预留的决策变量值和目标函数Z值的位置填入了数字，但规划求解对话框中的信息为““设置目标单元格”的值未收敛”，可知本问题有无界解（目标函数无穷大），此结果例??图解法的结果一致。

*关于“规划求解结果”对话框中出现的各种信息的详细说明，详见Excel帮助文件。

†由于本例中模型输入的原因，输出的报告可读性较差。采取不同方式输入问题模型可以输出可读性更强的报告。详见例1-3。



图 1-14 “规划求解结果”对话框

例 1-3 在例??中，要求根据表??求解最优的生产计划。

表?? 三种产品的基本信息表					
单位消耗 资源	产品	产品A	产品B	产品C	可用资源
原材料 M_1		8	4	5	320
原材料 M_2		2	2	1	100
单位产品利润		5	4	2	

设三种产品的产量分别为 x_1, x_2 和 x_3 ，得到以下线性规划模型： 试用Excel规划求解工具求解该问题。

解：在Excel中输入模型的各系数，如图1-15所示。本例中，将标注的文字进一步简化，同时，为了与手工输入的数据和公式区分开来，用有底色的空白单元格来存放Excel规划求解的计算结果(C3:E3为决策变量，F8为目标函数Z值)。然后，完成规划求解参数的设置，包括变量非负约束和线性模型的设置。

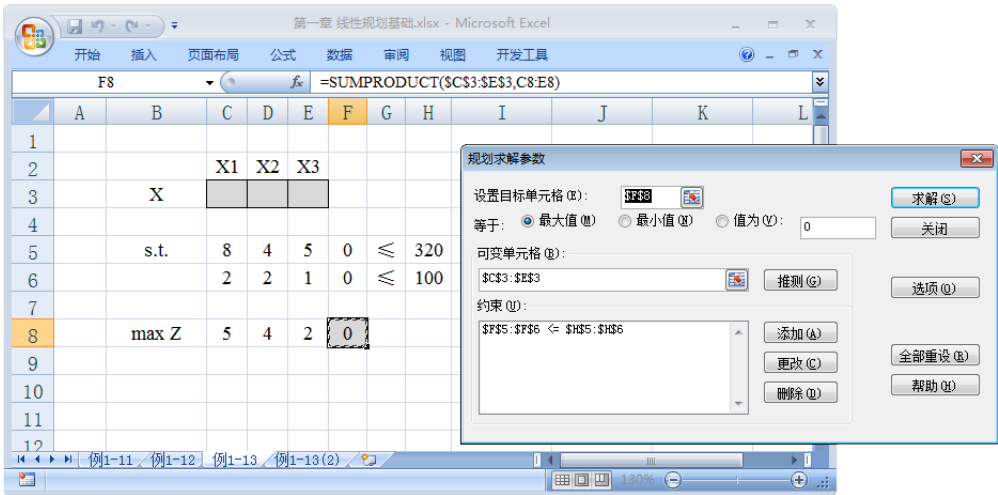


图 1-15 本问题的Excel基本模型和规划求解工具中的参数设置

求解结果如图1-16所示。

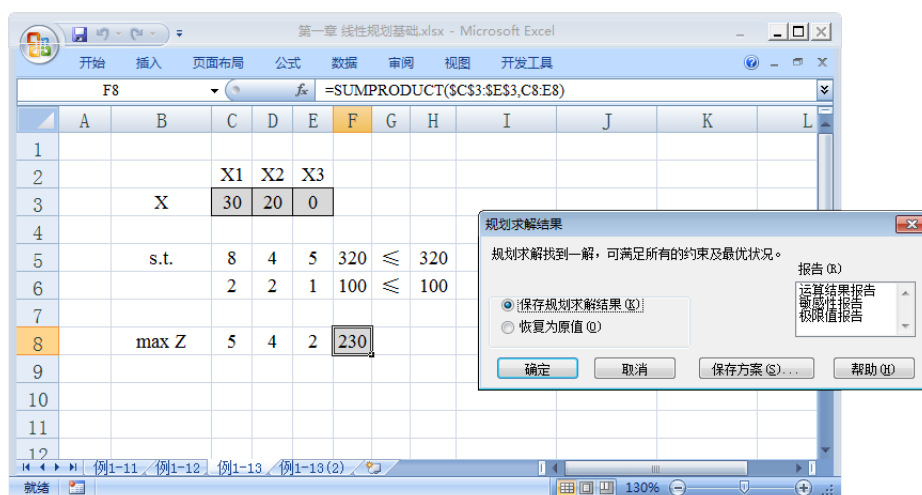


图 1-16 本问题的规划求解工具计算结果

如前所述，Excel求解线性规划模型对输入的格式没有特别的要求。对于本例而言，可以结合问题的实际背景采取另一种形式来输入本问题的模型。如图1-17，以适当的背景文字在相关的行、列对相关的单元格进行标示，资源使用量及利润单元格中的公式与图1-15相同。

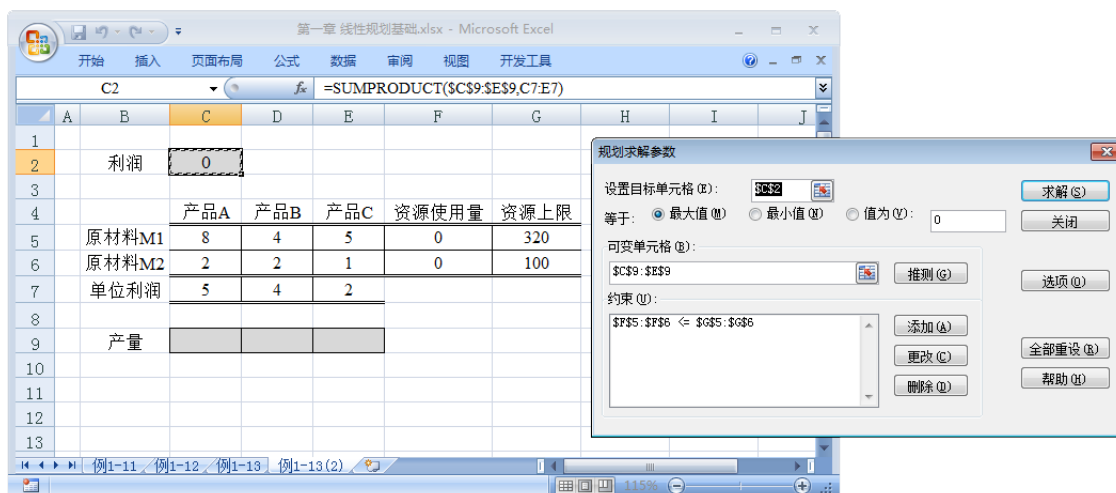


图 1-17 可读性更好的问题模型

完成规划求解参数的设置，包括变量非负约束和线性模型的设置后，规划求解得到的结果与图1-16一致（如图1-18）。

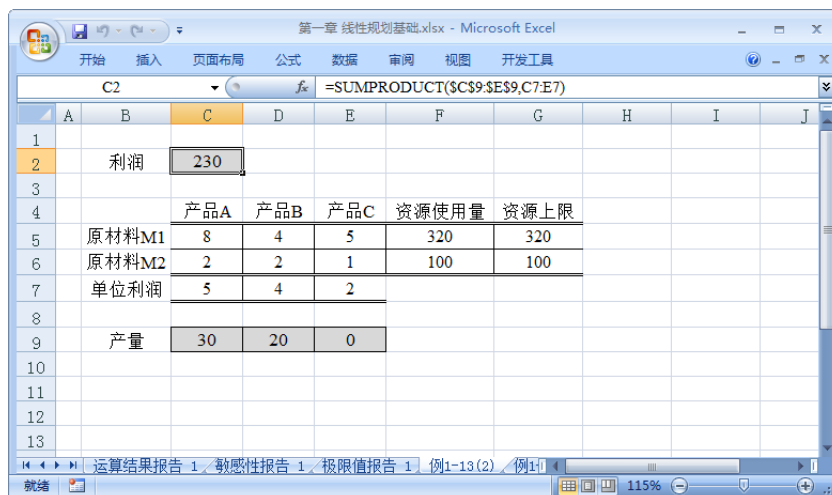


图 1-18 最终计算结果

除了模型更为直观之外，采取这种输入方式的一个好处是能得到可读性更强的规划求解结果报告。关于用Excel规划求解工具生成的三份报告的解读，涉及到单纯形法，对偶理论以及灵敏度分析的内容，本书将在相关的部分介绍。

第四章 整数规划

第四节 用Excel求解整数规划问题

整数规划问题的一般解法（分枝定界法和割平面法），本质上是通过不断添加约束条件构造解原始问题的衍生问题，利用隐枚举技术或缩小原始问题的可行域，在衍生问题中找到满足整数约束的最优解的过程。由于衍生问题都是线性规划问题，可以将Excel作为辅助工具来完成求解过程。

事实上，Excel规划求解工具本身就集成了整数约束规则，在添加约束对话框中部的下拉项中，可以选择“int”和“bin”，分别表示整数(Integer)和0-1二进制数(Binary number)，如图4-1所示。

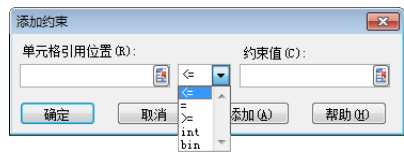


图 4-1

借助这个对话框，可以引入任意单元格（包括变量和表达式）的整数或0-1约束，使得Excel规划求解工具能直接用于求解所有类型的整数规划问题，而没有必要通过繁琐的迭代来逐步找到问题的最优解。

例 4-1 用Excel规划求解工具求解例??。

解：由第一章第三节中介绍的例1-3可知，用Excel规划求解工具求解实际问题时，不一定要输入数学规划模型。根据问题背景来输入数学模型，并合理地组织数据单元格及其注释的位置，则模型本身及其求解报告都有更强的可读性。结合例??的实际背景，本例的数学模型输入结果如图4-2。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		利润	0						
3									
4			产品甲	产品乙	资源使用量	资源限量			
5		原材料A	2	1	0	10			
6		原材料B	3	6	0	40			
7		单位利润	10	15					
8									
9		产量							
10									
11									
12									

图 4-2

图4-2中，以有底色的空白单元格表示Excel求解的结果。E5、E6和C2单元格中分别为两种资源实际使用量和总利润的计算公式：

单元格	公式
E5	=SUMPRODUCT(\$C\$9:\$D\$9,C5:D5)
E6	=SUMPRODUCT(\$C\$9:\$D\$9,C6:D6)
C2	=SUMPRODUCT(\$C\$9:\$D\$9,C7:D7)

“规划求解”对话框中各参数设置如下：

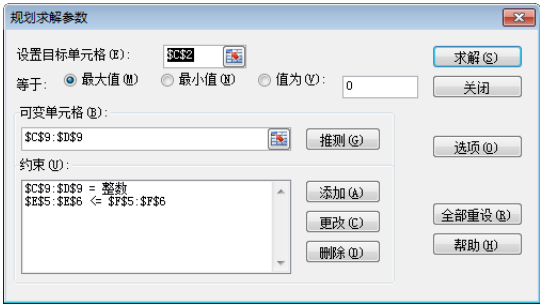


图 4-3

“约束”中有一行：\$C\$9:\$D\$9=整数,这就是变量的整数约束，添加这个约束的方法是：点击“添加”按钮打开“添加约束”对话框，选择了决策变量所在区域C9:D9后，点击对话框中部的下拉列表并选择“int”项。如图4-4所示。



图 4-4

在选项中勾选了“采用线性模型”和“假定非负”后（下同），求解计算结果如图4-5。

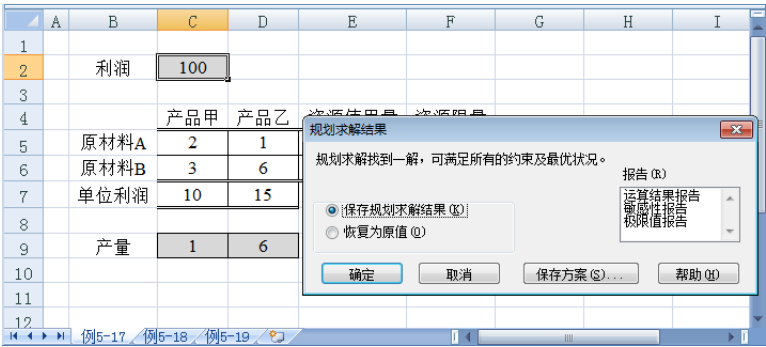


图 4-5

规划求解结果对话框显示：“规划求解找到一解，可满足所有的约束及最优状况”，表明已经取得最优解：产品甲和产品乙各生产1件和6件，可取得最大利润100千元。

例 4-2 应用Excel规划求解工具求解例??。

解：例??是一个0-1背包问题，结合问题背景在工作表中输入数学模型，如图4-6。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2		总效用	0											
3														
4		物品	食物	帐篷	衣物	洗漱	防晒防雨	厨具	摄影	通信	医疗	实际携带体积	允许体积	
5		体积(10升)	25	35	15	4	3	10	15	18	6	0	65	
6		重要性	10	8	6	7	4	6	8	9	8			
7														
8		是否携带												
9														
10														
11														
12														

图 4-6

其中，“是否携带”一行表示各个物品携带与否的0-1变量。实际携带体积和总效用单元格中的计算公式如下：

单元格	公式
L5	=SUMPRODUCT(\$C\$8:\$K\$8,C6:K6)
C2	=SUMPRODUCT(\$C\$8:\$K\$8,C5:K5)

“规划求解”对话框中各参数设置如图4-7。

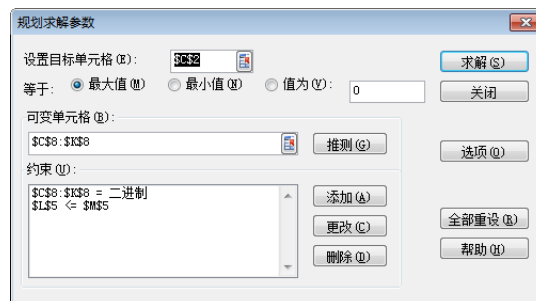


图 4-7

“约束”中第一行“\$C\$8:\$K\$8=二进制”是变量的0-1约束，添加此约束的方法是：点击“添加”按钮打开“添加约束”对话框，选择了决策变量所在区域C8:K8后，点击对话框中部的下拉列表并选择“bin”项，如图4-8所示。



图 4-8

最终计算结果如图4-9。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2		总效用	43											
3														
4		物品	食物	帐篷	衣物	洗漱	防晒防雨	厨具	摄影	通信	医疗	实际携带体积	允许体积	
5		体积(10升)	25	35	15	4	3	10	15	18	6	63	65	
6		重要性	10	8	6	7	4	6	8	9	8			
7														
8		是否携带	1	0	0	1	1	1	1	0	1			
9														
10														
11														
12														

图 4-9

本问题的最优解为：携带除去帐篷、衣物、通信设备以外的其他所有物品，可取得最大的总效用。

下面再来看一个稍微复杂的问题：既包含整数，又包含0-1变量的整数规划问题。

例 4-3 应用Excel规划求解工具求解例??。

解：例??中包含了互斥的约束条件，用数学模型更易于处理，所以直接求解例??所建立的整数规划模型。

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 50x_1 + 40x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 8x_{11} + 9x_{12} + 4x_{21} + 3x_{22} \leq 640 \\ & x_{11} + x_{12} - x_1 = 0 \\ & x_{21} + x_{22} - x_2 = 0 \\ & 2x_1 + 2x_2 - M_1y_1 \leq 200 \\ & x_1 + 3x_2 - M_2y_2 \leq 200 \\ & y_1 + y_2 = 1 \\ & y_1, y_2 = 0, 1 \\ & x_i, x_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2 \end{aligned}$$

(4-1)

将以上数学模型式(4-1)输入到工作表中。注意到式(4-1)中有两个取值未知的极大正数 M_1 和 M_2 ，为便于Excel计算，在这里简单设定为 $M_1 = M_2 = 1 \times 10^{10}$ （在Excel中用科学计数法显示为1E+10）。输入结果如图4-10。

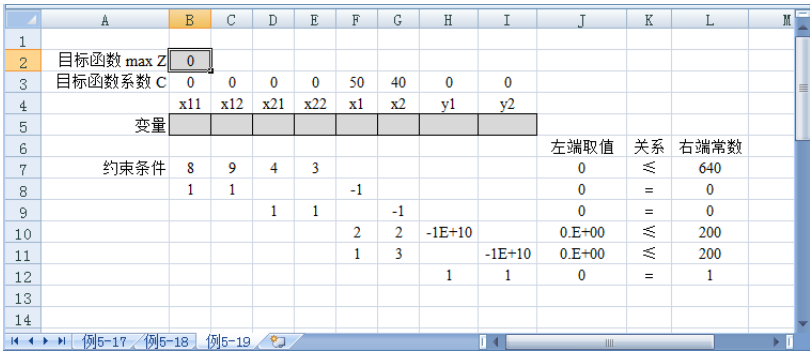


图 4-10 本问题的Excel基本模型

其中，B5:I5为决策变量单元格；B2为目标函数单元格，其计算公式为：

= SUMPRODUCT(\$B\$5:\$I\$5,B3:I3)

除去变量的整数约束和0-1取值约束，图4-10中各约束条件左端取值的输入公式分别为：

单元格	公式
J7	=SUMPRODUCT(\$B\$5:\$I\$5,B7:I7)
J8	=SUMPRODUCT(\$B\$5:\$I\$5,B8:I8)
J9	=SUMPRODUCT(\$B\$5:\$I\$5,B9:I9)
J10	=SUMPRODUCT(\$B\$5:\$G\$5,B10:G10)+ROUND(H5,1)*H10
J11	=SUMPRODUCT(\$B\$5:\$G\$5,B11:G11)+ROUND(I5,1)*I11
J12	=SUMPRODUCT(\$B\$5:\$I\$5,B12:I12)

注意：单元格J10和J11中，在计算 M_1y_1 和 M_2y_2 时，利用Round函数对 y_1 和 y_2 进行了个位的四舍五入取整*。

“规划求解”对话框中各参数设置如图4-11。

*由于Excel的浮点计算会产生误差，0-1变量 y_1 和 y_2 的计算结果可能只是无限逼近0或1，但并不是恰好等于0或1，在一般情况下可以忽略这种误差带来的影响，但在式(4-1)的第4、5个约束中，因为 y_1 和 y_2 的系数 M_1 和 M_2 是极大的正数，此时这种误差就会影响计算结果。本例求解结果为 $y_1 = 0$ ，但在Excel中的实际结果， y_1 只是接近0而不等于0，当规划求解选项中的精度为默认的 10^{-6} ，而且 $M_1 = M_2 = 1 \times 10^{10}$ 时，此时 M_1y_1 的值达到了2位数，如果不予干预对结果的影响会很大。处理的方法有几种，一是如文中，在计算 M_1y_1 和 M_2y_2 时对 y_1 和 y_2 的取值四舍五入，那么一定能保证 $M_1y_1 = 0$ ；另一种方法是将 M_1 和 M_2 的数量级减小，或者（在规划求解选项对话框中）大幅提高规划求解的精度。



图 4-11 本问题的规划求解参数设置

求解得到最优解，如图4-12。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2	目标函数 max Z	4680											
3	目标函数系数 C	0	0	0	0	50	40	0	0				
4		x11	x12	x21	x22	x1	x2	y1	y2				
5	变量	68	0	0	32	68	32	0	1				
6										左端取值	关系	右端常数	
7	约束条件	8	9	4	3					640	≤	640	
8		1	1			-1				0	=	0	
9				1	1		-1			0	=	0	
10						2	2	-1E+10		2.E+02	≤	200	
11						1	3		-1E+10	-1.E+10	≤	200	
12								1	1	1	=	1	
13													
14													

图 4-12 本问题的最优解

由最优解可知，该公司应生产68件产品A和32件产品B。其中，在甲工序，产品A用甲1工艺生产，产品B用甲2工艺生产；在乙工序中选择乙1工艺。

由上面的例题可知，Excel几乎可以求解所有类型的、复杂的整数规划问题。当问题模型中包含了整数约束或0-1约束时，都不能生成“敏感性报告”和“极限值报告”，在选择“敏感性报告”和/或“极限值报告”时，都会得到如下的提示。

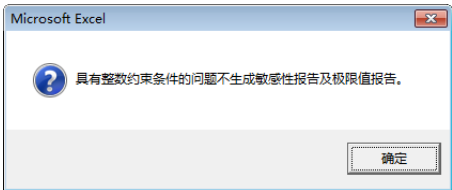


图 4-13 Excel给出的提示对话框