

- 1、要掌握对偶的概念，一定要有线性代数的基本知识。
- 2、通过推导，可以得到相关的一些概念。看图：

Handwritten derivation of the dual problem from a primal linear programming problem:

Primal problem (P): $\max C^T x$ subject to $Ax \leq b$. This is referred to as a "pushing b model" (推 b 模型).

Dual problem (D): $\min y^T b$ subject to $y^T A \geq C^T$ or $A^T y \geq C$.

Derivation steps:

- 1. $y^T A x \leq y^T b$ (exists y^T) — (1)
- 2. At the optimal value, $\lambda = C^T - C_B^T B^{-1} A \leq 0$.
- 3. $C_B^T B^{-1} A \geq C^T$.
- 4. $C_B^T B^{-1} A x \geq C^T x$ — (2)

Combining (1) and (2), we get $C^T x \leq y^T A x \leq y^T b$. The left side is maximized (max) and the right side is minimized (min). Therefore, when the primal reaches its optimal value, the dual also reaches its optimal value. $y^T = C_B^T B^{-1}$ is the optimal dual variable.

3、现在要理解一些概念：P 问题的对偶变量可以由 $C_B^T B^{-1}$ 得到，也可以由检验数得到，是不是。不对，通过例子检验一下：

$$\begin{aligned} \max Z &= 300x_1 + 400x_2 \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 40 \\ x_1 + 3/2x_2 + x_4 &= 30 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(1) 选取 x_2, x_3 为基变量，构建基矩阵，得到解是 $[0, 20, 20, 0]$ ，检验数为 $[100/3, 0, 0, -800/3]$ 。根据 dual variable = $C_B^T B^{-1}$ ，得到约束对应的 dual variable = $[0, 800/3]$ ，对不上。

(2) 选取 x_1, x_2 为基变量，构建基矩阵，得到解是 $[15, 10, 0, 0]$ ，检验数为 $[0, 0, -25, -250]$ 。根据 dual variable = $C_B^T B^{-1}$

1, 得到约束对应的 dual variable = [25,250], 检验数的相反数是 dual variable, 和公式求出来的是一样的。

4、再做一个例子, 验证一下:

$$\max z = 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 30 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

分析: 对偶变量就是 2 个;

选取 x_2, x_4 为基变量, 构建基矩阵, 得到解是 [0,5,0,2.5],
dual variable = $C_B * B^{-1} = [1,1]$, 然后根据公式 $\text{ranmda} = CN - C_B * B^{-1} * N = [5,7,0,0] - [1,1] * [2 \ 3 \ 1 \ 0; 3 \ 4 \ 0 \ 1] = [0,0,-1,-1]$, 根据检验数的相反数是对偶变量 (位置要对应好), 多以 [1,1] 就是对偶最优解, 对上了。

5、总结一下: 求解 D 对偶变量, 可以根据 P 的检验数相反数, 就可以得到。同时, 如果 P 问题的最优解的对偶变量, 除了检验数的相反数这个性质, 还可以通过 $C_B * B^{-1}$ 这个乘子得到, 只有在最优解的情况下才满足。