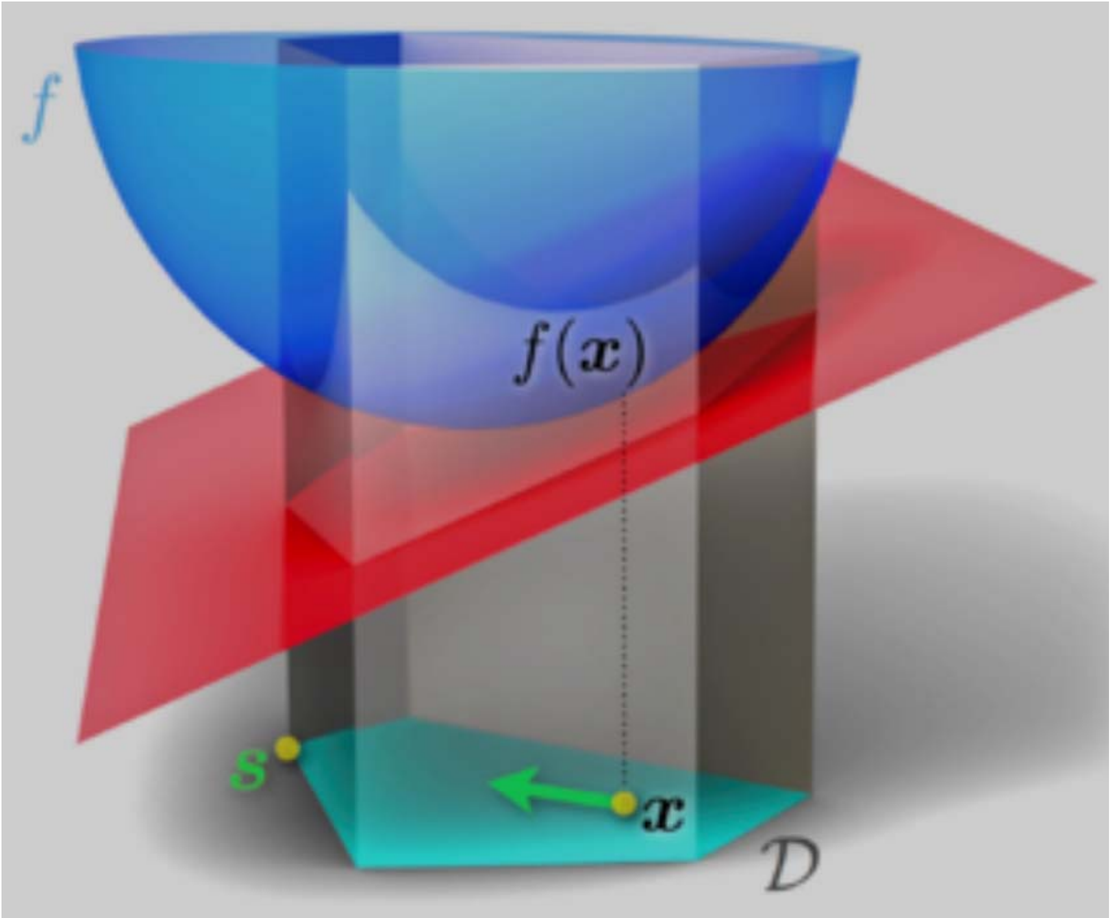
1、有一类模型，比较特殊，这类模型求解，可以采用一种特殊的算法，叫做“Frank-Wolfe 算法”，看图：

带线性约束的非线性规划问题

$$
\begin{aligned}
&\min f(\boldsymbol{x}) \\
&s.t. \quad \boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b} \\
&\qquad\quad \boldsymbol{Ex} = \boldsymbol{e}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min f(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 \\
&x_1 + x_2 - 2 \le 0 \\
&x_1 + 5x_2 - 5 \le 0 \\
&-x_1 \le 0 \\
&-x_2 \le 0
\end{aligned}
$$

2、怎么求解？算法思路：先初始化一个点 X0，根据“某种规则”得到下一个迭代点 X1，X1 点比 X0 更优；根据这种规则一直迭代，最后得到最优解。那么，这种思路，如何理解，看图理解：



上图的解释：在可行域 D 范围内，随机找到一个可行点 X（X1），利用泰勒展开，线性逼近 F（X），得到一个线性规划，通过这个线性规划，得到最优解 S，X-》S 决定一个下降方向，在这个方向中，找到 F（X）的最优解 X2，然后重复前面的计算，直到满足条件跳出循环。

3、由于要利用线性规划的知识，插入 matlab 线性规划求解方法。

minZ=-4a+b+7c

s.t.

a+b-c=5 3a-b+c<=4

a+b-4c<=-7 a,b>=0

问a，b，c分别取何值时，Z有最小值

代码如下：

```
c=[-4 1 7];%目标函数的系数
A=[3 -1 1;1 1 -4];%约束中不等式的系数，要求《=
b=[4; -7]; %约束中不等式的右端系数
Aeq=[1 1 -1];%约束中等式的系数
beq=[5]; %约束中等式的右端系数
vlb=[0, 0];%设置变量的下限
vub=[];%设置变量的上限
[x,fval]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,vlb,vub)
```

运行结果如下：

```
[x,fval]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,vlb,vub)
Optimization terminated.

x =

    2.2500
    6.7500
    4.0000


fval =

   25.7500
```

4、例题讲解。

[例] 用 F-W 算法求解带下面的带线性约束的非线性规划问题。要求取初始点 $\boldsymbol{x}^{(1)}=(0,0)^T$，终止误差 $\varepsilon=10^{-6}$。

$$\min f(\boldsymbol{x})=2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1-6x_2$$
$$x_1+x_2-2\le 0$$
$$x_1+5x_2-5\le 0$$
$$-x_1\le 0$$
$$-x_2\le 0$$

（1）根据初始化点 x1（0,0）进行泰勒展开，并求解 X1 的梯度，得到线性规划模型；

求解梯度的代码

```
syms y x1 x2; %定义变量
y=2*x1.^2+2*x2.^2-2*x1*x2-4*x1-6*x2;%定义函数
gradff=gradient(y,[x1, x2]);%直接用梯度函数求解
grad2 = subs(gradff,{x1, x2},{0,0})%用（0,0）求出具体值
```

得到梯度为（-4，-6）

线性规划的模型

与(2)式近似的线性规划

$$\min_{x\in X} f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)+\nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)^T\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{(k)}\right)$$

或者等价的，有线性规划

$$\boxed{\min_{x\in X} \nabla f\left(\boldsymbol{x}^{(k)}\right)^T \boldsymbol{x}} \qquad (3)$$

因此，得到规划模型为：

$$\min \nabla f(\boldsymbol{x}^0)^T \boldsymbol{x} = -4x_1 - 6x_2$$

$$x_1 + x_2 - 2 \le 0$$

$$x_1 + 5x_2 - 5 \le 0$$

$$-x_1 \le 0$$

$$-x_2 \le 0$$

（2）根据 x1 的梯度，得到线性规划，用 matlab 求解最优解

S；

用 matlab 求解，代码如下：

```
c=[-4 -6];%目标函数的系数
A=[1 1;1 5];%约束中不等式的系数，要求《=
b=[2; 5]; %约束中不等式的右端系数
vlb=[0,0];%设置变量的下限
vub=[];%设置变量的上限
[x,fval]=linprog(c,A,b,[],[],vlb,vub)
```

得出最优解，看图：

```
x =

    1.2500
    0.7500


fval =

   -9.5000
```

S = [1.25 0.75]

（3）通过 X1 和 S（y1），得到下降方向，求解在这个方向中，使目标函数值为最小的步长 lambda，即一维线性搜索；

$$p^{(1)} = y^{(1)} - x^{(1)} \qquad \min_{0\le\lambda\le1} f\left(x^{(1)} + \lambda p^{(1)}\right)$$

代码如下：

```
x = sym('[x1,x2]');
syms lamda;
s = [1.25 0.75];
x1=[0 0];
P = s-x1;
lambda = x1+lamda*P;
x = lambda;
y=2*x(1).^2+2*x(2).^2-2*x(1)*x(2)-4*x(1)-6*x(2);%定义函数
```

运行得到，如下：

```
y =

(19*lamda^2)/8 - (19*lamda)/2
```

求解 lamda 在（0，1）区间的最优解，得到最佳步长。

用 matlab 的 fminbnd(y,0,1)函数求解，代码如下：

```
y = (19*lamda^2)/8 - (19*lamda)/2 %目标函数值
f = @(lamda)(19*lamda^2)/8 - (19*lamda)/2; %定义
z = fminbnd(f,0,1) %一维搜索
mn = round(z) %四舍五入
```

求得最佳步长为 mn = 1

（4）通过最佳步长，得到下一个迭代点 x2，然后跳转到第一步

```
x2 =x1+lamda*P;
```