椭圆极坐标方程上顶点求解

一、已知条件与基本关系

给定以右焦点为极点的椭圆极坐标方程：

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

其中，各参数满足以下基本几何关系：

- 离心率：$e \quad (0 < e < 1)$
- 半通径：$p = a(1 - e^2)$
- 半焦距：$c = ea$
- 椭圆基本关系：$c^2 = a^2 - b^2$

目标是求得上顶点 $V_t(0, b)$ 所对应的极坐标 (r, θ)。

二、方法一：几何法

1. 求解极径 r

极径 r 为极点（右焦点 $F(c, 0)$）到上顶点 $V_t(0, b)$ 的距离。

$$r = |FV_t| = \sqrt{(0 - c)^2 + (b - 0)^2} = \sqrt{c^2 + b^2}$$

将$c^2 = a^2 - b^2$代入上式：

$$r = \sqrt{(a^2 - b^2) + b^2} = \sqrt{a^2} = a$$

因此，上顶点对应的极径为：

$$\boxed{r = a}$$

2. 求解极角 θ

极角 θ 为向量 $\overrightarrow{FV_t}$ 与极轴（x轴正方向）的夹角。在由焦点 $F(c, 0)$、中心 $O(0, 0)$ 和上顶点 $V_t(0, b)$ 构成的直角三角形 $\triangle OFV_t$ 中，有：

$$\cos\theta = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}} = \frac{-c}{|FV_t|} = \frac{-c}{a}$$

将$c = ea$代入：

$$\cos\theta = \frac{-ea}{a} = -e$$

因此，上顶点对应的极角为：

$$\boxed{\theta = \arccos(-e)}$$

三、 方法二：代数法（微积分求极值）

1. 建立 y 关于 θ 的函数

在极坐标中，$y = r\sin\theta$。将 r 的表达式代入：

在极坐标中，$y = r\sin\theta$。将 r 的表达式代入：

$$y(\theta) = \frac{p\sin\theta}{1 + e\cos\theta}$$

2. 求 $y(\theta)$ 的极大值

对 $y(\theta)$ 关于 θ 求导，并令导数为零：

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{p\sin\theta}{1 + e\cos\theta}\right) = 0$$

使用商的求导法则$(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$，令分子为零：

$$(p\cos\theta)(1 + e\cos\theta) - (p\sin\theta)(-e\sin\theta) = 0$$

$$p\cos\theta + pe\cos^2\theta + pe\sin^2\theta = 0$$

提取公因子p，并利用$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$：

$$p(\cos\theta + e(\cos^2\theta + \sin^2\theta)) = 0$$

$$p(\cos\theta + e) = 0$$

由于$p > 0$，故：

$$\cos\theta + e = 0 \implies \boxed{\cos\theta = -e}$$

$$\cos\theta + e = 0 \implies \boxed{\cos\theta = -e}$$

这与几何法得到的结果一致。

3. 求解对应的 r

将 $\cos\theta = -e$ 代入原极坐标方程：

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} = \frac{p}{1 + e(-e)} = \frac{p}{1 - e^2}$$

将$p = a(1 - e^2)$代入：

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e^2} = a$$

这也与几何法得到的结果一致。

四、 结论

对于以右焦点为极点的椭圆极坐标方程 $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$，其上顶点的极坐标为：

$$\boxed{(r, \theta) = (a, \arccos(-e))}$$

五、 示例验证

已知：椭圆方程 $r = \dfrac{7.5}{1 + 0.5\cos\theta}$。

五、 示例验证

已知：椭圆方程 $r = \dfrac{7.5}{1 + 0.5\cos\theta}$。

参数：$e = 0.5, \quad p = 7.5$。

1. 计算半长轴 a：

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{7.5}{1 - 0.5^2} = \frac{7.5}{0.75} = 10$$

2. 应用结论求上顶点极坐标：

- 极径：$r = a = 10$
- 极角：$\theta = \arccos(-e) = \arccos(-0.5) = \frac{2\pi}{3}$

3. 验证笛卡尔坐标：

上顶点相对于焦点 $F(c, 0)$（其中 $c = ea = 5$）的坐标为：

$$x' = r\cos\theta = 10\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 10\left(-\frac{1}{2}\right) = -5$$

$$y' = r\sin\theta = 10\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5\sqrt{3}$$

转换为绝对笛卡尔坐标：

$$x = c + x' = 5 + (-5) = 0$$

$$y = 0 + y' = 5\sqrt{3}$$

计算半短轴$b = a\sqrt{1 - e^2} = 10\sqrt{1 - 0.25} = 5\sqrt{3}$。

因此，上顶点坐标为 $(0, b) = (0, 5\sqrt{3})$，与验证结果一致。验证成功。

1. 椭圆极坐标方程上顶点求解

2. 椭圆极坐标方程与直角坐标方程的相互推导主要涉及两种常见的极坐标形式：以焦点为极点和以中心为极点。下面详细推导它们之间的关系。

椭圆极坐标方程与直角坐标方程的相互推导主要涉及两种常见的极坐标形式：以焦点为极点和以中心为极点。下面详细推导它们之间的关系。

一、以焦点为极点的椭圆极坐标方程推导

已知直角坐标方程（中心在原点，长轴在x轴）：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a>b>0$$

其中 $c^2=a^2-b^2$，离心率 $e=\frac{c}{a}$，焦点坐标为 $(\pm c,0)$。

推导极坐标方程（以右焦点为极点）：

1. 设右焦点 $F_2(c,0)$ 为极点，极轴沿x轴正向。
2. 椭圆上任意点 P 的极坐标为 (r,θ)，直角坐标（相对于原点）满足：
$$x=c+r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$
3. 代入椭圆方程：
$$\frac{(c+r\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(r\sin\theta)^2}{b^2}=1$$
4. 利用椭圆的第二定义（到焦点距离与到相应准线距离之比为 e）：
   - 右准线：$x=\frac{a^2}{c}=\frac{a}{e}$
   - 点 P 到右焦点的距离为 r，到右准线的距离为 $d=\frac{a}{e}-x$

- 根据第二定义：$r = ed = e\left(\frac{a}{e} - x\right) = a - ex$

5. 将 $x = c + r\cos\theta = ea + r\cos\theta$ 代入：

$$r = a - e(ea + r\cos\theta) = a(1-e^2) - er\cos\theta$$

6. 整理得：

$$r(1 + e\cos\theta) = a(1-e^2)$$

$$\boxed{r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} = \frac{p}{1+e\cos\theta}}$$

其中 $p = a(1-e^2) = \frac{b^2}{a}$ 为半通径。

同理，以左焦点为极点时，极坐标方程为：

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}$$

二、从极坐标方程还原为直角坐标方程

已知以右焦点为极点的极坐标方程：

$$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}, \quad p = a(1-e^2)$$

推导直角坐标方程：

1. 由极坐标方程得：

$$r(1 + e\cos\theta) = p$$

2. 将极坐标转换为直角坐标（极点位于右焦点 $(c, 0)$，

2. 将极坐标转换为直角坐标（极点位于右焦点 $(c, 0)$，其中 $c = ea$）：

$$r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x-c}{r}$$

3. 代入方程：

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + e(x-c) = p$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = p - e(x-c)$$

4. 两边平方：

$$(x-c)^2 + y^2 = p^2 - 2pe(x-c) + e^2(x-c)^2$$

5. 整理，利用 $p = a(1-e^2)$ 和 $c = ea$：

$$(1-e^2)(x-ea)^2 + y^2 = a^2(1-e^2)^2 - 2ae(1-e^2)(x$$

6. 两边除以 $1-e^2$：

$$(x-ea)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2(1-e^2) - 2ae(x-ea)$$

7. 展开并化简：

$$x^2 - 2eax + e^2a^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2(1-e^2) - 2aex + 2a$$

$$x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2(1-e^2) + a^2e^2 = a^2$$

8. 即：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

由于 $b^2 = a^2(1-e^2)$，最终得到：

由于 $b^2 = a^2(1-e^2)$，最终得到：

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

三、以中心为极点的极坐标方程

若以椭圆中心为极点，极轴沿长轴方向，则直角坐标与极坐标关系为 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，代入标准方程：

$$\frac{r^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\theta}{b^2} = 1$$

解得：

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}, \quad \text{即} \quad r = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin}}$$

此形式在应用中较少使用。

总结

椭圆的极坐标方程（以焦点为极点）与直角坐标方程可以相互转换，关键联系是离心率 e 和半通径 p。以右焦点为极点的标准极坐标方程为 $r = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$，通过坐标平移和代数推导可化为直角坐标的标准形式。这种极坐标形式在描述天体轨道时尤为常见。