数理方程重点

偏微分方程

是指含有**多元**未知函数$u=u(\vec{x}),\vec{x}=(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n)$及其若干阶偏导数的关系式

$$F(\vec{x},u,\frac{\partial u}{\partial x_0},\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^m u}{\partial x_0^{m_0}x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}})=0$$

其中m为方程的阶，称为偏微分方程，简称为数学物理方程(PDE)

求解

通解：m阶偏微分方程的含有m个任意函数的解　　$C^{m-1}(\mathbb{R}^{n-1})$

特解：泛定方程需要初始条件，边界条件

1. 初始条件：初始时刻每一点构成的函数，个数：关于t的最高导数的阶数
2. 边界条件：固定边界点随时间的函数(Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ类边界条件和Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ类齐次边界条件)　$PPT\ 1.2\ P12$

注意：

1. 解偏微分方程时，每次等式两边关于某一个变量（比如x）积分后，0关于x积分后得到一个不依赖该变量x，但是依赖除此变量x外所有剩余的变量的任意函数
2. 积分因子法45页4(2)

> 两边乘以积分因子再化成全微分

二元一阶线性PDE

$$u=u(x,y),a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y),ab\neq 0$$

$thought$：积分因子法

$tools$：变量代换，链式法则

$important$：特征方程$\frac{dx}{a(x,y)}=\frac{dy}{b(x,y)}$　$G\in C^1(\mathbb{R})$

$hard$：链式法则，寻找一个合适的η

多元一阶线性PDE

写特征方程，找到$\xi_i,i\neq n$后先化简为$D(\vec{\xi})\frac{\partial u}{\partial \xi_n}+c(\vec{\xi})u=f(\vec{\xi})$，$D=\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial \xi_n}{\partial x_j}(P18)$

$c=0,f=0\rightarrow u=g(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$

$P45\ 12.(1)$

二元二阶线性PDE

$thought\ 1$：二阶可因式分解变一阶

最基本的方法：`令v=u的微分方程或u的函数`

$e.g.$　$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial x}=2xy$

- **无界区域**二元二阶齐次波动方程all初值问题：达朗贝尔公式

  定理 5.16 (积分的换元法) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 而函数 $x=\varphi(t)$ 满足下面条件:

  1° $\varphi(\alpha)=a$ 及 $\varphi(\beta)=b$, 且当 t 从 α 变到 β 时, $x=\varphi(t)$ 所确定的值全部含于区间 $[a,b]$.

  2° 函数 $\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$(或 $[\beta,\alpha]$) 上有连续的微商 $\varphi'(t)$,

  则有下面的换元公式

  $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

- **无界区域**二元二阶非齐次波动方程0初值问题

  线性叠加原理（有限叠加+积分叠加）+达朗贝尔公式+$u_2=\int_0^t w(t,x,\tau)d\tau$

- **无界区域**二元二阶非齐次发展型方程非0初值问题

  $Fourier$变换

- **半区域**二元二阶齐次波动方程all初值问题，构造函数分情况讨论
  - |类齐次边界条件，奇延拓
  - ||类齐次边界条件，偶延拓
  - 四元二阶波动方程(化为二元)球面波$v=ru$ `注意与P45T2,3的区别`

- **半区域**二元二阶非齐次发展型方程常数初值非齐次边条

  $Laplace$变换　习题4 2.(4)

- $Goursat$**特征边值**问题

- **有界区域**齐次(周期)边条二元二阶齐次线性方程
  - 波动方程初值问题：(边值条件齐次)分离变量法

    二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$　(5.5.1)
    的通解与其特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ (5.5.3) 的根之间的关系

特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的根	微分方程 $y''+py'+y=0$ 的通解
两个互异的实根 λ_1,λ_2	$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$
实的重根 $\lambda=-\frac{p}{2}$	$y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{p}{2}x}$
共轭的复根 $\lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\alpha-i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

    满足$S-L$定理有**非负**的固有值，当给出不含|、|||类边界条件时注意$\lambda=0$的情况!

    叠加后再代入初始条件!

  - $Laplace$方程：$\Delta_2u(r,\theta)=0,$

    圆域问题 Θ满足周期条件+ 欧拉方程：$r^2R''(r)+prR'(r)+qR(r)=0$, (*) p,q为常数.
    当$r>0$时，令$r=e^s$，欧拉方程(*)化为$\frac{d^2R}{ds^2}+(p-1)\frac{dR}{ds}+qR=0$ 后求解.

    $$u=\frac{C_0+D_0lnr}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(C_{1n}r^n+D_{1n}r^{-n})cos(n\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}(C_{2n}r^n+D_{2n}r^{-n})sin(n\theta)\quad 0<a<r<b<+\infty$$

- **有界区域**齐次(周期)边条二元二阶非齐次线性方程　P75
  1. 特解法：适用于非齐次项为一元函数，化为常微分方程的边值问题求出特解
  2. 冲量原理（含时）：注意把t换成$t'=t-\tau$，t换成τ　P81 12.(2)
  3. Fourier展开：thought：将$u(t,x),f(t,x),\varphi(x),\psi(x)$化为$L_\rho^2[a,b]$空间中的向量，对比系数

     对每个基都可以得到关于非固有值变量的常微分方程和边界条件

     当变量为(θ,r)时对具体基代具体n

  $Poisson$(场位)方程：$0=\Delta u(t,\vec{x})+f(t,\vec{x})$只能用1,3两种方法

- **有界区域**非齐次边条二元二阶非齐次线性方程（见P45）
  1. 化为齐次边条
  2. 退化回上一问题

$thought\ 2$：利用特征方程(不可因式分解降阶的，齐次的)

一般形式：$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0\quad xy\neq 0$

1. 判断$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$确定类型（大于0双曲，等于0抛物，小于0椭圆）
2. 特征方程$a_{11}(dy)^2-2a_{12}dxdy+a_{22}(dx)^2=0$
3. $\begin{cases}\varphi(x,y)\\ \eta(x,y)\end{cases}$
4. 链式法则求导

$tips$:抛物标准型关于两个自变量的最高阶偏导阶数不同，双曲标准型二阶只有混合偏导，椭圆标准型关于两个自变量的最高阶偏导阶数相同

三元二阶线性PDE

- **有界区域**单/双齐次边条三元二阶齐次线性方程

  求解仅含空间变量的$Helmholtz$方程：$\Delta_3 v+k^2v=0$

  - 直角坐标
  - 柱坐标：R函数满足$Bessel$**方程**（$\lambda=0\rightarrow Eular$方程）

    $Bessel$方程：$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$一般只要求求解$\nu=0$的情况

    P121例3.4.6　注意固有值为0的情况
  - 球坐标：Θ函数满足m**阶连带**$Legendre$**方程**，R函数满足球$Bessel$方程（$k=0\rightarrow Eular$方程）

    $Legendre$方程：$[(1-x^2)y']'+\lambda y=0$

    轴对称解：$u=\sum_{n=0}^{\infty}(C_nr^n+\frac{D_n}{r^{n+1}})P_n(cosx)$

    特别注意半球问题P133T9,P103例3.3.7

$Fourier$变换法

$tips$：判断奇偶性，反变换后分母比较简单

$Laplace$变换法

$tips$:

习题4 2.(2)

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(t),\ t>0,\ x>0,\ a>0\text{是常数},\\ u|_{x=0}=g(t),\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}$$

根据线性叠加原理，分解：$u=u_1+u_2$，其中

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},\quad t>0,\quad x>0,\\ u_1|_{x=0}=0,\ u_1|_{t=0}=\varphi(x),\ \frac{\partial u_1}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}$$

u_1：初值x奇怪延拓后，用达朗贝尔公式(例题1.4.3′)或Fourier变换，或直接用Fourier正弦变换.

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+f(t),\ t>0,\quad x>0,\\ u_2|_{x=0}=g(t),\quad u_2|_{t=0}=0,\ \frac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.\end{cases}$$

u_2：用Laplace变换求.（下次课学习）

5.3+-5.4卷积练习

基本解方法

$LU(M) = \delta(M)$称为$Lu = 0$型方程的基本解

*套路：5.1++-5.2 P30

$\Delta_3(\frac{1}{4\pi r}) = -\delta(x, y, z)$

$\Delta_2(\frac{1}{2\pi} ln \frac{1}{r}) = -\delta(x, y)$

*二维左半平面 I 类边值问题的Green函数，三维 I 类边值问题的green函数

第 I 边值问题的Green函数法

possion公式

*注意poisson公式外法向导数为-1的值要乘

圆内poisson方程 I 类边值green函数镜像法在对称位置 放$-\varepsilon$ ln里面乘$\frac{R}{\rho_0}$

球内poisson方程 I 类边值green函数镜像法在对称位置 放$-\frac{R}{\rho_0}\varepsilon$

Others

固有值问题：$S-L$标准型？$S-L$定理？目的：1.求$\rho \to$加权内积　2.判断固有值取值（满足S-L定理所有条件）

圆环域内边界$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{r=a} = -\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a}$

$\lambda = 0? n = 0? \rho = 1? \qquad \frac{2}{\text{区间长度}}? \int \text{权?基函数?}$

$(2m)! \neq 2^m m! = (2m)!!$

P132T4　P96例3.3.2.　勒让德递推公式会给，

$L_{m,n} \triangleq \int_0^1 x^m P_n(x)dx, L_{m,n} = \frac{m}{m+n+1} L_{m-1,n-1}(m \geq 1, n \geq 1)$

(1) $P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!2^n (n-2k)!(n-k)!} x^{n-2k}$.　(3.2.8)(P 89)

1) $P_n(x)$是n次多项式.

2) $P_0(0) = 1$,　$P_{2m-1}(0) = 0$, $P_{2m}(0) = \frac{(-1)^m (2m-1)!!}{(2m)!!}$, $m = 1, 2, \cdots$. (3.3.5a)(P 95)

(2) 微分表示：$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$.　(3.3.1)(P 93)

(3) 复积分表示：$P_n(x) = \frac{1}{2^n 2\pi i} \oint_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz$, $n = 0, 1, 2, \cdots$.　(3.3.2)(P 94)

C是围绕 x的任意闭路.

(4) 实积分表示：$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x + \sqrt{1-x^2}\, i\cos\theta)^n d\theta$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. (3.3.3)(P 94)

(5) $|P_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1, 1]$; $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$. (3.3.5b)(P 95)

记熟

(6) 母函数表示：$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) t^n$, $|x| < 1$, $|t| < 1$. (3.3.4)(P 95)

(7) 递推公式：$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$, (3.3.6a) (P 96)

$nP_n(x) = xP_n'(x) - P_{n-1}'(x)$, (3.3.6b)　$P_n(x) = \frac{1}{2n+1}\{P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)\}$.　(3.3.6d)

Bessel函数递推公式，范数平方会给，Bessel积分常数要写

微分关系、递推公式 (P112)

$\{x^{\nu}J_{\nu}\}' = x^{\nu}J_{\nu-1}$, (3.4.1a)

$\nu=1$时, $xJ_0(x)=(xJ_1(x))'$.

用来算$\int x^m J_0(x)\,dx$, $m\ge 1$.

$\{x^{-\nu}J_{\nu}\}' = -x^{-\nu}J_{\nu+1}$, (3.4.1b)

$xJ_{\nu}'+\nu J_{\nu}=xJ_{\nu-1}$, (3.4.2a)

$xJ_{\nu}'-\nu J_{\nu}=-xJ_{\nu+1}$, (3.4.2b)

$2J_{\nu}'=J_{\nu-1}-J_{\nu+1}$, (3.4.3a)

$2\nu x^{-1}J_{\nu}=J_{\nu-1}+J_{\nu+1}$. (3.4.3b)

可(3.4.1b)用来算$\int x^m J_{\nu+1}(x)\,dx$, $\nu\ge 0$, $m\ge 1$. 特别是,

(3.4.1b)中取$\nu=0$得, $J_1(x)=-J_0'(x)$.用于计算$\int x^m J_1(x)\,dx$.

(3.4.3a) ⇨ $J_{\nu+1}=J_{\nu-1}-2J_{\nu}'$, $\nu\ge 1$.

用(3.4.3a)来算$\int J_{\nu+1}(x)\,dx$ ($\nu\ge 1$时)(记到书中).

(3.4.3b) ⇨ $J_{\nu+1}=2\nu x^{-1}J_{\nu}-J_{\nu-1}$, $\nu\ge 1$.

用(3.4.3b)将$J_{\nu+1}(x)$递推为$J_0(x)$和$J_1(x)$的函数($\nu\ge 1$时). (记到书中)