概率论与数理统计重点

$Chapter$ 1

事件的运算

$$A\bigcup BC=(A\bigcup B)(A\bigcup C)$$
$$A\bigcap(B\bigcup C)=AB\bigcup AC$$
$$(A\bigcup B)(C\bigcup D)=AC\bigcup AD\bigcup BC\bigcup BD$$

容斥原理

$P(A\bigcup B\bigcup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$

事件的关系

$$\text{独立}\begin{cases}\text{两两独立}\\ \text{相互独立}P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{互斥：}A\text{与}B\text{不能同时发生}P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)\\ \text{对立：要么}A\text{发生，要么}B\text{发生}P(A)+P(B)=1\end{cases}$$

$Chapter$ 2

均匀分布

定理：有**连续**随机变量x，x的累积分布函数$Y=F_X(x)$也是**连续**函数，那么$Y\sim U(0,1)$

应用：取指数分布、正态分布、伽马分布的随机数

指数分布

$X\sim Exp(\lambda)$ $(0<x<+\infty)$

失效率函数（单位时间内失效的概率）$\lambda(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{P(t<X\leqslant t+\Delta t|x>t)}{\Delta t}$

则$F(t)=1-exp\{-\int_0^t\lambda(\zeta)d\zeta\}$

正态分布

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

注意$X\sim N(0,4)$则$\sigma=2$!!!

$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\sqrt{2\pi}\sigma$

Γ分布

$\Gamma(\beta,\alpha)=\int_0^{+\infty}\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx$

概率密度函数：$f_\Gamma(x,\beta,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x}$

Γ函数：$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{\alpha-1}dx$令$x=\beta x$得到$\Gamma$分布

需要注意的是它的工具性，在以后算某个积分的时候比较方便

连续型随机变量函数的分布函数

$X\sim f(x),Y=g(X)$,则随机变量Y的分布函数$F_1(y)$为$F_1(y)=\int_{g(x)<y}f(x)dx$

注意：连续型随机变量函数未必是连续型随机变量，变换g要满足一定关系时才可以

$Chapter$ 3

多项分布

$X\sim M(N;p_1,p_2,\dots,p_n)$

$P(X_1=k_1,X_2=k_2,\dots,X_n=k_n)=\frac{N!}{k_1!k_2!,\dots,k_n!}p_1^{k_1}p_2^{k_2},\dots,p_n^{k_n}$

多项式系数可看成多步放球

连续型随机变量

- 一维：设随机变量X的分布函数为$F(x)$，若存在非负函数$f(x)\geq0,s.t.\forall x\in\mathbb{R},F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$则称$X$为连续型随机变量
- 二维：设$(X,Y)\sim F(x,y)$，若存在可积的非负函数$f(x,y),s.t.\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv$则称$(X,Y)$为二维连续型随机变量

证明两个随机变量相互独立必须知道其联合分布$s.t.F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，除二维正态下独立等价于$Cov(X,Y)=0$

多维均匀分布

$\vec{X}\sim f(\vec{X})=\frac{1}{m(\Omega)}I(\Omega)$

二维正态分布

$(X,Y)\sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

$X+Y\sim N(a+b,\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)$联合正态时其线性组合才服从正态分布

$X|y\sim N(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),(1-\rho^2)\sigma_1^2)$

$Y|x\sim N(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),(1-\rho^2)\sigma_2^2)$

技巧：把所需要的变量分离开，详见$chapter4$ 24题

随机变量的和

- 连续型

  $r.v.X$与$r.v.Y$相互独立，$Z=X+Y$称为X,Y的卷积

  法一：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t,z-t)dt\xrightarrow{\text{独立!}}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(z-t)dt$

  法二：令$Z=X+Y,U=Y$再利用$f_{ZU}(z,u)=f_{XY}(z-u,u)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,u)}\right|$得到

  $f_{ZU}(z,u)\rightarrow f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{XY}(z-u,u)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,u)}\right|du$

- 离散型

  根据**概率模型**或矩母函数

最值分布

- **第一种**

设$r.v.X_1,X_2,\dots,X_n\ iid$

$X_{(1)}=min\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$

$X_{(n)}=max\{X_1,X_2,\dots,X_n\}$

$F_{X_{(1)}}(x)=1-P(X_1\geqslant x,X_2\geqslant x,\dots,X_n\geqslant x)=1-(1-F(x))^n$

$F_{X_{(n)}}(x)=P(X_1\leqslant x,X_2\leqslant x,\dots,X_n\leqslant x)=F^n(x)$

典例 X,Y服从均值为λ的指数分布，$Z=min\{X,Y\}$，则$f_Z(z)=\frac{2}{\lambda}e^{-\frac{2}{\lambda}z}I_{(0,+\infty)}$

- **第二种**

$max\{X,Y\}=\frac{X+Y+|X-Y|}{2}$
$min\{X,Y\}=\frac{X+Y-|X-Y|}{2}$

构造$Z=|X-Y|$计算分布函数，详见$chapter4$ 19题

其他

若已知X,Y独立，$P(X\leqslant Y)=\int P(X\leqslant y|Y=y)f_Y(y)dy=\int P(X\leqslant y)f_Y(y)dy$

$Chapter$ 4

期望

广义期望

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xdF_X(x)$

$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dF_X(x)$

条件期望

$E(Y|X=x)=\int yf_{Y|X}(y|x)dy$

性质：①提取已知量$E(Xg(Y)|Y=y)=g(y)E(X|Y=y)$

②$E(X)=E(E(X|Y))$

$e.g.$求: $E(XY^2)$

$step1.E(Xy^2|Y=y)=\overbrace{y^2E(X|Y=y)}^{\text{去掉}Y=y\text{需要独立}}=y^2\varphi(y)$

$step2.E(Y^2\varphi(Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\varphi(y)dF_Y(y)$

正态分布的条件期望：$E(X|Y=y)=\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)$

全期望公式

$E(X)=E(E(X|Y))=\int E(X|Y=y)dF_Y(y)=\iint_{\mathbb{R}^2}xf(x,y)dxdy$

方差

$Var(X)=E(X-E(X))^2=E(X^2)-(E(X))^2$
条件方差:
$Var(Y)=Var[(E(Y|X=x)_X]+E[(Var(Y|X=x)_X)]$

即：条件期望的方差+条件方差的期望

注：离散分布的方差按照定义计算

矩

若$X\sim N(0,1)$,则$E(X^{2n+1})=0,E(X^{2n})=(2n-1)!!$

记忆：$E(X^4)=3$

矩母函数g及特征函数φ

$g_X(t)=E(e^{tX})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}dF_X(x)$
要求任意阶矩存在
$\varphi_X(t)=E(e^{itX})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF_X(x)$
任意随机变量成立

性质

- X, Y相互独立$Z = X + Y$，则$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$
- $\varphi^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$

协方差

$Cov(X,Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$

若X, Y不线性相关：$E(XY) = E(X)E(Y) \iff Cov(X,Y) = 0 \neq X, Y$独立

若$(X,Y) \sim N(a, b, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$
则$\rho = cos\theta = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}$

设$\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$　　$Cov(\vec{X}) = Cov(X_i, X_j)$称为协差阵

熵

设X为离散型随机变量，分布律为$P(X = x_k) = p_k, k \in \mathbb{N}$,则其熵定义为$H(X) = -\sum_{k=1}^{\infty} p_k log_2(p_k)$

对连续型随机变量$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) ln f_X(x) dx$

- $X \in \mathbb{R}, maxH(X), s.t. E(X) = m, Var(X) = \sigma^2 \to X \sim N(m, \sigma^2)$
- $X \in (0, +\infty), maxH(X), s.t. E(X) = \frac{1}{\lambda} \to X \sim Exp(\lambda)$
- $X \in (a, b), maxH(X) \to X \sim U(a, b)$

CLT（中心极限定理）

设$X_1, \dots, X_n, \dots$是一列$i.i.d$随机变量序列，记它们相同的期望和方差分别为μ, σ^2.记$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，则$\forall x \in \mathbb{R}$，有：
$\lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leqslant x) = \Phi(x)$

当$X_i \sim B(1,p)$时有：$\lim_{n\to\infty} P(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant x) = \Phi(x)$

常见的分布的性质

常见分布	$E(X)$	$Var(X)$	再生性$X+Y$（X, Y独立）	性质
二项分布$B(n,p)$	np	$np(1-p)$	$B(n_1+n_2, p)$	两点分布$X^2 = X$
几何分布$Ge(p)$	$\frac{1}{p}$ 典例：彩券问题	$\frac{1-p}{p^2}$	结合模型意义	
泊松分布$Poi(\lambda)$	λ	λ	$Poi(\lambda_1+\lambda_2)$	
均匀分布$U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	结合几何意义	
高斯(正态)分布$N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	$N(\mu, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$	
指数分布$Exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$时$\Gamma(\lambda, 2)$	$min\{X,Y\} \sim Exp(\lambda_1+\lambda_2)$
伽马分布$\Gamma(\beta,\alpha)$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\Gamma(\beta, \alpha_1+\alpha_2)$	

$chapter$ 5

统计学基本概念

总体

研究对象某指标取值全体及其概率分布

样本

按规则（随机性、代表性）从总体中抽取**一个**样本：$X_1, X_2, \dots, X_n$，$X_j \quad i.i.d$

当抽样方案实施后这个样本是一组数：$X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$，因此样本具有**二重性**

$$
\cdot\text{研究的问题}\begin{cases}\text{非参数统计}(F(\mu,\sigma)\text{未知})\\ \text{参数统计}(F\text{已知},\mu,\sigma\text{未知})\begin{cases}\text{参数估计}\begin{cases}\text{无偏性}\\ \text{有效性}\\ \text{相合性(当样本数}n\text{趋于无穷大的时候,估计量的值趋于待估参数的值)}\\ \text{渐近正态性}\end{cases}\\ \text{检验问题}\end{cases}\end{cases}
$$

统计量：只与样本有关（具有二重性）

常见统计量	T	$E(T)$	$Var(T)$
样本均值	$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$	μ（无系统偏差）	$\frac{\sigma^2}{n}$，（n越大精度越高）
样本方差	$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$	σ^2（也即除以$n-1$的原因）	
经验分布函数	$F_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}I_{(X_j\leqslant x)}nF_n(x)\sim B(n,F(x))$ $P(F_n(x)=\frac{k}{n})=P(nF_n(x)=k)$	$F(x)$	$\frac{F(x)(1-F(x))}{n}$

三大分布

χ^2分布

> $(X_1,X_2,\ldots,X_n)i.i.d.\sim N(0,1),P(X_i^2<y)=2\Phi(\sqrt{y})-1\to f_{X_i^2}(y)=\varphi(\sqrt{y})y^{-\frac{1}{2}}I_{(y>0)}=f_{\Gamma}(y)\to X_i^2\sim\Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

则$\xi=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$的分布为具有自由度 n 的 χ^2 分布，记作$\xi\sim\chi_n^2$

由$P(X>\chi_n^2(\alpha))=\alpha$定义上$\alpha$分位数$\chi_n^2(\alpha)$

性质：1.$E(\xi)=n,Var(\xi)=2n$

t分布

设 $X\sim N(0,1),K\sim\chi^2(n)$且二者独立，则$T=\frac{X}{\sqrt{K/n}}$的分布称为自由度为$n$的$t$分布，记作$T\sim t_n$

F分布

$K_1\sim\chi^2(m),K_2\sim\chi^2(n)$且二者独立，则$F=\frac{K_1/m}{K_2/n}$的分布称为具有自由度 (m,n)（或第一自由度为 m，第二自由度为 n）的 F 分布，记为$F\sim F(m,n)$或$F\sim F_{m,n}$

性质：1.若$T\sim t_n$，则$T^2\sim F_{1,n}$

2.$F_{m,n}(1-\alpha)=1/F_{n,m}(\alpha)$

$P(X\geqslant F_{m,n}(\alpha))=P(\frac{1}{X}\leqslant\frac{1}{F_{m,n}(\alpha)})=1-P(\frac{1}{X}\geqslant\frac{1}{F_{m,n}(\alpha)})=\alpha\to F_{m,n}(1-\alpha)=1/F_{n,m}(\alpha)$

三大分布推论

> 设$X_1,X_2,\ldots,X_n\ i.i.d.\sim N(\mu,\sigma^2),Y_1,Y_2,\ldots,Y_n\ i.i.d.\sim N(\mu_2,\sigma^2)$

1. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi_{n-1}^2$
2. $\bar{X}$与S^2相互独立正态总体下独有
3. $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S}\sim t_{n-1}$
4. $\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}S_T}\sim t_{m+n-2}\quad S_T=\frac{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}{m+n-2}$

$chapter$ 6

矩估计

$X\sim F(x;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)$ 分布及 $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n$未知，样本信息已知，令
$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^k=E(X^k)$或者$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\bar{X})^k=E(X-\alpha_1)^k\quad\alpha_1=E(X)$

得到参数$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\ldots,\hat{\theta}_n$与统计量之间的关系

注意：能用低阶矩估计就不用高阶矩估计；总体均值、方差的函数用相应的统计量代替

MLE最大似然估计

$step$:1.求似然函数$L(\vec{\theta}) = f_{\vec{X}}(\vec{x}, \vec{\theta}) \quad \vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$是变量(注意独立不同分布的情况)，离散情况下
$L = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2 \ldots, X_n = x_n)$

$$
2.\text{先观察再求极值}\begin{cases}\text{单调}\rightarrow\text{极值在边界处取到}\\ \text{非单调：求对数似然}lnL(\vec{\theta}) = l(\vec{\theta}) \rightarrow \begin{cases}\frac{\partial l}{\partial \theta_1} = 0\\ \vdots \\ \frac{\partial l}{\partial \theta_n} = 0\end{cases} \quad \text{若}\vec{\theta}\text{间有约束},\text{用拉格朗日乘数法}(\text{列联表检验})\end{cases}
$$

- 正态总体的$MLE : \hat{\mu}_L = \overline{x}, \hat{\sigma}_L^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2$
- 指数分布总体的$MLE : \hat{\lambda}_L = \frac{1}{\overline{x}}$
- 均匀分布总体的MLE
- 二项分布总体$B(N,p)$的$MLE : \hat{p}_L = \frac{\overline{x}}{N}$其中$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
- 泊松分布总体$Poi(\lambda)$的$MLE : \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \rightarrow \hat{\lambda}_M = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$

优良性准则

1.相合估计（最基本）：$P(|\hat{\theta} - \theta| \geqslant \epsilon) = 0$

2.无偏性：参数θ的无偏估计$T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$是指作为估计无系统偏差，即$E[T(X_1, X_2, \ldots, X_n)] = \theta$

3.有效性：$Var_\theta(\hat{\theta}_1) \leqslant Var_\theta(\hat{\theta}_2)$则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$更有效

$chapter$ 7

区间估计

> w_α为上α分位数，$\vec{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$

$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$作为$\theta$的一个**置信水平(置信系数)**为$1-\alpha$的置信区间

注意：θ是真值，不具有随机性，不能说θ以95%的概率落在$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$内；一旦具体到某次具体观测算出95%的$CI(a,b)$，$\theta$只能在其中或者不在其中

枢轴变量法

1. 找一个θ的良好点估计$T(\vec{X})$，一般为θ的最大似然估计
2. 构造一个函数$S(T(\vec{X}), \theta)$使得其分布F已知
3. $P(w_{-\alpha/2} \leq S(T(\vec{X}), \theta) \leq w_{\alpha/2}) = 1-\alpha$
4. 反解不等式为$A \leq \theta \leq B \quad A(B) = A(B)(T(\vec{X}), w_{-\alpha/2}, w_{\alpha/2})$

- 正态总体均值μ的区间估计和σ^2的区间估计

μ (σ^2已知)	$Z = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma$	$N(0,1)$
μ (σ^2 未知)	$T = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/S$	t_{n-1}
σ^2 (μ 已知)	$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$	χ_n^2
σ^2 (μ 未知)	$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$	χ_{n-1}^2

- 两个正态总体均值差$\mu_2 - \mu_1$的区间估计和方差比$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的区间估计

均值(方差已知)	$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}$	$N(0,1)$
均值(方差未知)‡	$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$	t_{m+n-2}
方差(均值已知)	$F=\frac{\sum_{i=1}^m (X_i-\mu_1)^2/m}{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_2)^2/n}$	$F_{m,n}$
方差(均值未知)	$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F_{m-1,n-1}$

比例p的区间估计

> 设事件A在每次试验中发生的概率为p，作n次独立试验，以Y_n记事件A发生的次数，求p的$1-\alpha$置信区间

$\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\sim N(0,1)$

则$p\in\frac{\hat{p}+\frac{u_{\alpha/2}^2}{2n}}{1+\frac{u_{\alpha/2}^2}{n}}\pm u_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}+\frac{u_{\alpha/2}^2}{4n^2}}}{1+\frac{u_{\alpha/2}^2}{n}}$其中$\hat{p}=y_n/n$

一般要求$n\hat{p}>10$和$n(1-\hat{p})>10$才有$p\in\hat{p}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

置信限

σ已知：正态整体$N(\mu,\sigma^2)$的均值μ的置信系数为$1-\alpha$的置信下限：$\underline{\theta}=\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha$，置信上限：$\overline{\theta}=\overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha$

σ未知：正态整体$N(\mu,\sigma^2)$的均值μ的置信系数为$1-\alpha$的置信下限：$\underline{\theta}=\overline{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha)$，置信上限：$\overline{\theta}=\overline{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha)$

$chapter$ 8

假设检验

> 研究如何根据抽样后获得的样本来检查抽样前所作假设是否合理
>
> $According\ to$**小概率原理**：小概率事件在一次实验中几乎不发生

将问题一般化：

1. 根据问题提出假设检验问题
   原假设：$H_0:\theta\in\Theta_0\longleftrightarrow$对立假设：$H_1:\theta\in\Theta_1$
2. 根据参数的估计方法*构造*一个适当的**检验统计量**$T=T(X_1,...,X_n),X_1,...,X_n$为样本
3. 根据H_1构造**拒绝域**$W=\{T\in A\},A$为一个集合，通常为一个区间$e.g.W=\{T>\tau\}$，则称τ为临界值
4. 对任意$\theta\in\Theta_0$，犯第一类错误（H_0成立但检验法则拒绝了H_0，弃真）的概率$P_\theta(T\in A)\leq\alpha,\alpha$为**显著性水平**
5. 结合T在H_0下的分布，定出A
6. 统计量落在拒绝域中则拒绝原假设

注：犯第二类错误（H_0不成立但检验法则没有拒绝H_0，存伪）的概率为$P_{\theta\in\Theta_1}(T\in\overline{A})$

功效函数

对于不同的原假设θ和特定的检验$\Psi(x_1,x_2,...,x_n)$，定义功效函数为$\beta_\Psi(\theta)=P_\theta(在检验\Psi下H_0被拒绝)$

可以理解为不同的假设下犯第一类错误的概率

原假设的提法

- **原则一**：将受保护的对象置为零假设（经验事实、错误拒绝会带来很大后果）
- **原则二**：希望"证明"某个命题，取相反结论或者其中一部分相反结论作为零假设

正态总体参数检验

先判断X, Y是否独立再判断具体模型

表 7.2.1: 一样本正态总体$N(\mu, \sigma^2)$.

检验对象	检验统计量	分布	拒绝域[†]
μ (σ^2已知)	$Z=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/\sigma$	$N(0,1)$	$\begin{cases}\lvert Z\rvert > u_{\alpha/2} \\ Z > u_\alpha \\ Z < -u_\alpha\end{cases}$
μ (σ^2 未知)	$T=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S$	t_{n-1}	$\begin{cases}\lvert T\rvert > t_{n-1}(\alpha/2) \\ T > t_{n-1}(\alpha) \\ T < -t_{n-1}(\alpha)\end{cases}$
σ^2 (μ 已知)	$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2$	χ_n^2	$\begin{cases}\chi^2 > \chi_n^2(\alpha/2)\text{或者}\chi^2 < \chi_n^2(1-\alpha/2) \\ \chi^2 > \chi_n^2(\alpha) \\ \chi^2 < \chi_n^2(1-\alpha)\end{cases}$
σ^2 (μ 未知)	$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$	χ_{n-1}^2	$\begin{cases}\chi^2 > \chi_{n-1}^2(\alpha/2)\text{或者}\chi^2 < \chi_{n-1}^2(1-\alpha/2) \\ \chi^2 > \chi_{n-1}^2(\alpha) \\ \chi^2 < \chi_{n-1}^2(1-\alpha)\end{cases}$

†有关均值的检验: 对立假设分别为$\mu \neq \mu_0$, $\mu > \mu_0$ 和$\mu < \mu_0$. 有关方差的检验: 对立假设分别为$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$, $\sigma^2 > \sigma_0^2$ 和$\sigma^2 < \sigma_0^2$.

表 7.2.2: 两样本正态总体的假设检验

检验对象	检验统计量	分布	拒绝域[†]
均值(方差已知)	$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}$	$N(0,1)$	$\begin{cases}\lvert Z\rvert > u(\alpha/2) \\ Z > u(\alpha) \\ Z < -u(\alpha)\end{cases}$
均值(方差未知)[‡]	$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$	t_{m+n-2}	$\begin{cases}\lvert T\rvert > t_{m+n-2}(\alpha/2) \\ T > t_{m+n-2}(\alpha) \\ T < -t_{m+n-2}(\alpha)\end{cases}$
方差(均值已知)	$F=\frac{\sum_{i=1}^m(X_i-\mu_1)^2/m}{\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_2)^2/n}$	$F_{m,n}$	$\begin{cases}F > F_{m,n}(\alpha/2)\text{或}F < \frac{1}{F_{n,m}(\alpha/2)} \\ F > F_{m,n}(\alpha) \\ F < \frac{1}{F_{n,m}(\alpha)}\end{cases}$
方差(均值未知)	$F=\frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F_{m-1,n-1}$	$\begin{cases}F > F_{m-1,n-1}(\alpha/2)\text{或}F < \frac{1}{F_{n-1,m-1}(\alpha/2)} \\ F > F_{m-1,n-1}(\alpha) \\ F < \frac{1}{F_{n-1,m-1}(\alpha)}\end{cases}$

†有关均值的检验: 对立假设分别为$\mu_1 \neq \mu_2$, $\mu_1 > \mu_2$ 和$\mu_1 < \mu_2$. 有关方差的检验: 对立假设分别为$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ 和$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$.

‡假定方差相等

注：（方差极性的检验）未说明两样本正态总体的方差相等需要检验$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$

若σ_1^2, σ_2^2不等$\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\frac{1}{n}S_1^2+\frac{1}{m}S_2^2}} \overset{A}{\sim} N(0,1)$

成对比较

> 样本$\{(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\dots,(X_n,Y_n)\}$满足数据对之间独立，数据对内部两个样本值通常不独立$H_0:u_z=0\leftrightarrow H_1$

设$Z_i=X_i-Y_i$服从正态分布，则相应的假设检验问题转化为**一样本正态检验问题**

检验统计量为$T=\frac{\sqrt{n}Z}{S}\sim t_{n-1}$

比例p的检验

> 设$(X_1,X_2,\dots,X_n)$是$0-1$分布总体$B(1,p)$的一个样本，$H_0:p=p_0\leftrightarrow H_1$

假定样本n较大，则检验统计量为$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}-p_0)}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\overset{A}{\sim}N(0,1)$其中$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{1\times n}$

似然比检验

> $H_0:\theta\in\Theta_0\longleftrightarrow H_1:\theta\in\Theta_1$

$LR(\vec{x})=\frac{\underset{\theta\in\Theta}{sup}f(\vec{x},\theta)}{\underset{\theta\in\Theta_0}{sup}f(\vec{x},\theta)}$

若$LR(\vec{x})\to 1$则H_0成立，若$LR(\vec{x})\gg 1$则拒绝H_0

$p-value$

> 衡量拒绝原假设的强烈程度

$p值=P(得到当前样本下检验统计量的值或更极端值|原假设下)$

p值越接近于0，拒绝原假设的证据越充分；p值越接近于1，不能拒绝原假设的证据越充分

置信区间和假设检验的关系

显著水平α下所有接受H_0的θ集合$\leftrightarrow$ θ置信系数为$1-\alpha$置信区间

$chapter$ 9

非参数检验

拟合优度检验

> $H_0:X\sim 某个分布F$

- 离散分布，样本量为n
  - F已知
    - p_j已知：定义$Z=\sum\frac{(O-E)^2}{E}=\sum_{i=1}^k\frac{(np_i-n_i)^2}{np_i}\sim\chi^2_{k-1}$在给定水平$\alpha$的条件下，当$Z>\chi^2_{k-1}$时拒绝
    - p_j未知：p的MLE为$\hat{p}_i=p(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\dots,\hat{\theta}_r)\to Z=\sum\frac{(O-\hat{E})^2}{\hat{E}}=\sum_{i=1}^k\frac{(n\hat{p}_i-n_i)^2}{n\hat{p}_i}\sim\chi^2_{k-r-1}$
  - F未知
    - 秩和检验：次序统计
    - 符号检验：根据一对数据差的正负号来检验两个总体位置参数之间是否有差异，一般通过计数正负号的个数计算p值判断是否有差异
- 连续分布，划分区间变为离散分布即可

列联表独立性（齐一性）检验

> $H_0:A与B相互独立，若H_0为真，则有p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$

B \ A	1	2	$\cdots$	a	sum
1	n_{11}	n_{21}	$\cdots$	n_{a1}	$n_{\cdot 1}$
2	n_{12}	n_{22}	$\cdots$	n_{a2}	$n_{\cdot 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
b	n_{1b}	n_{2b}	$\cdots$	n_{ab}	$n_{\cdot b}$
sum	$n_{1\cdot}$	$n_{2\cdot}$	$\cdots$	$n_{a\cdot}$	n

列联表如图所示

用最大似然估计得出$\hat{p}_{i\cdot} = \frac{n_{i\cdot}}{n}$;$\hat{p}_{\cdot j} = \frac{n_{\cdot j}}{n}$

$Z = \sum \frac{(O-\hat{E})^2}{\hat{E}} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{(nn_{ij}-n_{i\cdot}n_{\cdot j})^2}{nn_{i\cdot}n_{\cdot j}} \sim \chi^2_{(a-1)(b-1)}$

注意

1.示性函数的应用

2.分布函数分情况讨论

3.$(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2$

4.$\sum(X_j - \overline{X}) = 0$