

Équipe 3

David Sanfaçon (111 238 942)
Nicolas Sicard (111 246 676)
Nicolas Breton (111 265 945)
Jérémy Raymond (111 265 079)

TP5 : Le joint roulant
Modélisation en ingénierie
GMC-3001

Travail présenté à
Philippe Cardou

Université Laval
Département de Génie mécanique
26 avril 2021

Introduction:

La modernisation des entreprises amène une nouvelle vague d'innovations technologiques dans le domaine de l'automatisation. Un aspect notable est l'implémentation de robots en parallèle avec les travailleurs, partageant le même espace de travail. Les robots doivent donc idéalement être suffisamment sécurisés pour éviter les accidents et les blessures. L'expansion rapide de la robotique amène également un intérêt pour la fabrication rapide et peu coûteuse, suggérant un avantage à un design excluant toutes composantes spécialisées comme des roulements à billes. Afin de répondre à ces critères de base, on opte pour un bras robotique à joint roulant qui peut être entièrement fabriqué par impression 3D. Un autre avantage de ce mécanisme est que les ligaments au niveau du joint sont moins rigides que les mécanismes conventionnels, ce qui a pour potentiel de réduire grandement les blessures causées par un impact entre le bras et un travailleur. Quantifier ces étirements permettrait de mieux prédire les mouvements, identifier les limites et déterminer les "comportements" à améliorer. L'étirement est directement relié à la tension induite dans chacun des ligaments. Cette tension est produite par le mouvement de la charge à soulever. On cherche à trouver, par l'élaboration d'un modèle mathématique, la relation entre la tension des ligaments et le mouvement du bras. Ce modèle mathématique est simulé dans Matlab/Simulink et le joint roulant est modélisé dans le logiciel SolidWorks.

Identifier le problème:

Le principal problème à résoudre est de représenter les forces de tension présentes à l'intérieur des tendons lors du mouvement d'une charge. On suppose que les accélérations du bras peuvent être interprétées comme des forces de réaction dans un repère fixe. On peut aussi supposer que la torsion longitudinale est négligée à cause de trois raisons. La première est que la charge est assumée axiale à l'avant-bras. La deuxième est que le point de contact des deux bras est situé au même endroit sur chacun des cylindres de ceux-ci. La troisième raison est que cela simplifie drastiquement la matrice de raideur à produire pour la résolution. On doit définir les dimensions physiques du bras et de la liberté de mouvement qu'il peut avoir. On connaît les dimensions du bras robotique, soit la longueur de l'avant-bras(L_1) qui est de 974.5 mm, l'épaisseur du bras est de 28mm et le rayon du joint roulant est de 25.5mm. La masse à soulever est de 0.5 kg. La fixation du câble est située à une distance verticale h_1 de 26 mm et une distance horizontale l_2 de 12.03 mm du centre du rayon de courbure du coude.

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \begin{cases} 5\pi, 0 < t < 0.25 \\ -5\pi, 0.25 < t < 0.75 \\ 5\pi, 0.75 < t < 1 \end{cases} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \begin{cases} 4\pi, 0 < t < 0.5 \\ -4\pi, 0.5 < t < 1 \end{cases}$$

Il est aussi à noter que les accélérations angulaires originales ont été modifiées de manière à augmenter le mouvement du bras et rendre les résultats plus intéressants.

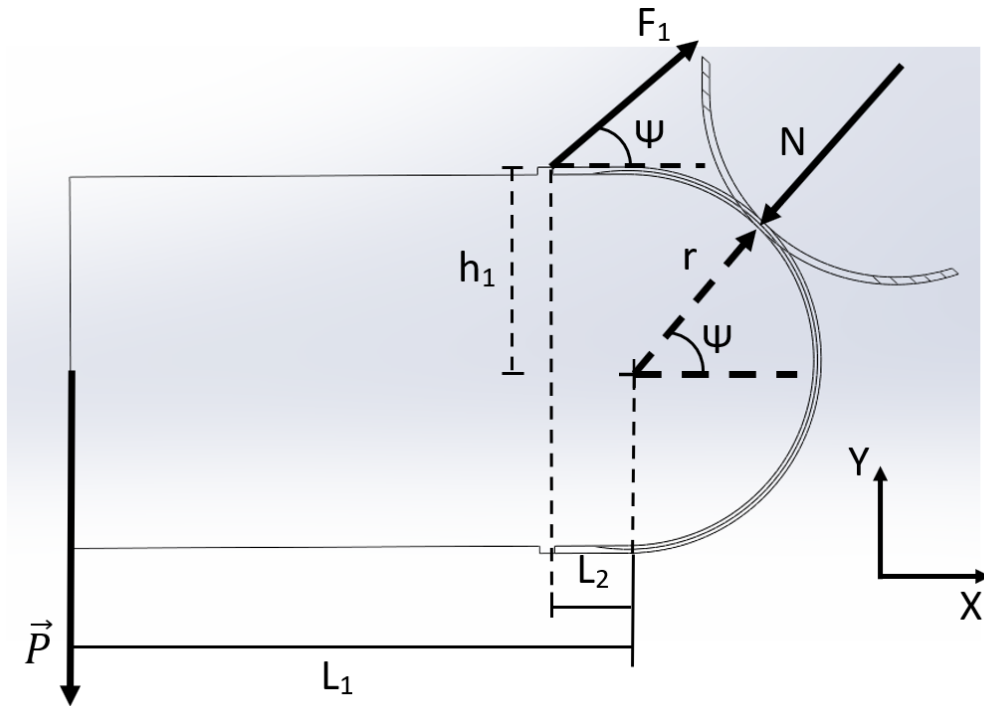


Figure 1: DCL section de l'avant-bras

Élaborer une procédure de résolution :

Équations permettant de calculer Kzz

Conversion du mouvement de la masse en force de réaction + ajouter la force gravitationnelle

Nous modélisons la barre dans un domaine statique. Nous devons donc traduire les accélérations des masses sous forme de forces de réaction sur la barre. On commence donc par calculer les accélérations tangentielles et normales (en orange) causées par les accélérations angulaires de θ et de ϕ .

(1)

$$a_{n\theta} = l_2 \sin(\phi) \dot{\theta}^2$$

$$a_{n\phi} = l_2 \dot{\phi}^2 \quad (2)$$

$$a_{t\theta} = l_2 \sin(\phi) \ddot{\theta} \quad (3)$$

$$a_{t\phi} = l_2 \ddot{\phi} \quad (4)$$

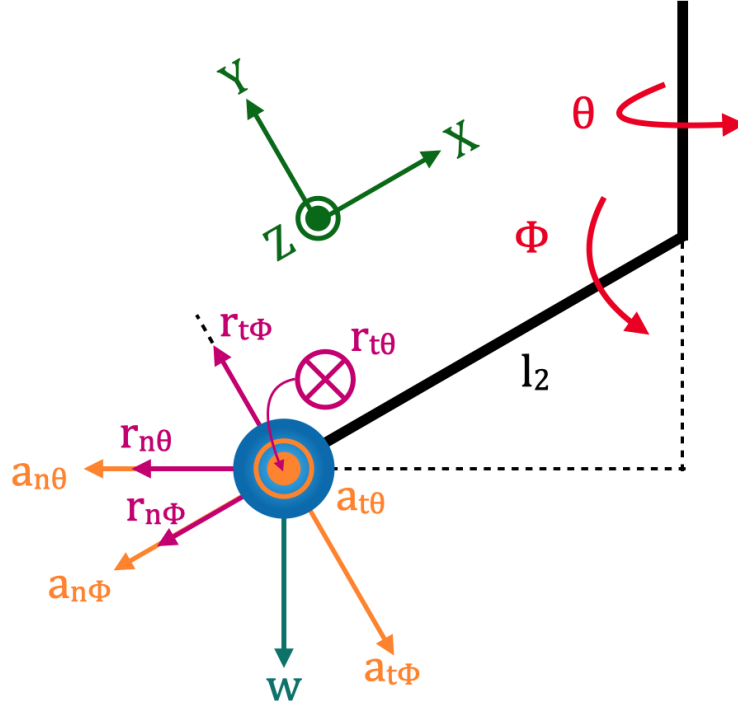


Figure 2 : Accélérations de la masse ainsi que les forces de réaction sur la barre

Par la suite, on peut calculer les forces de réaction sur la barre (en mauve) causées par ces différentes accélérations. Les forces r_{t_phi} et r_{t_theta} sont opposées à leur accélération équivalente, car la barre doit appliquer une force pour accélérer la masse et la masse applique donc une force opposée sur la barre.

$$F_{acc} = ma \quad (5)$$

Il ne reste qu'à calculer la somme des forces de réaction selon le référentiel de la barre (référentiel vert). On doit donc trouver les composantes x et y de la force r_{n_theta} . L'angle entre r_{n_theta} et r_{n_phi} est égal à $90-\phi$, donc (le négatif dans la première équation sert à indiquer que la composante se trouve dans le x négatif) :

$$r_{n,\theta-x} = -r_{n\theta} \sin \varphi \quad (6)$$

$$r_{n,\theta-y} = r_{n\theta} \cos \varphi \quad (7)$$

Puisque l'angle entre w (la force gravitationnelle) et a_{t_phi} est aussi $90-\phi$, on passe donc par la même méthode pour trouver les composantes x et y de cette force. En additionnant toutes ces forces, nous avons le vecteur tridimensionnel de la force affectant le bout de la barre.

Par la suite, il faut analyser la déformation des ligaments lorsqu'une force est appliquée dans l'axe des z. Dans ce cas, il est important de tenir en compte de l'élongation des ligaments en fonction de leur distance par rapport au point de contact entre les cylindres.

Déterminer le point de contact entre les deux cylindres

De ce fait, il faut commencer par vérifier la position du point de contact à la jointure pour permettre d'analyser le moment résultant de la force. Cette vérification est faite en observant la direction (positive ou négative) de la composante z de la force appliquée à l'extrémité du bras.

Le moment généré par les forces de réaction au point de contact des deux cylindres

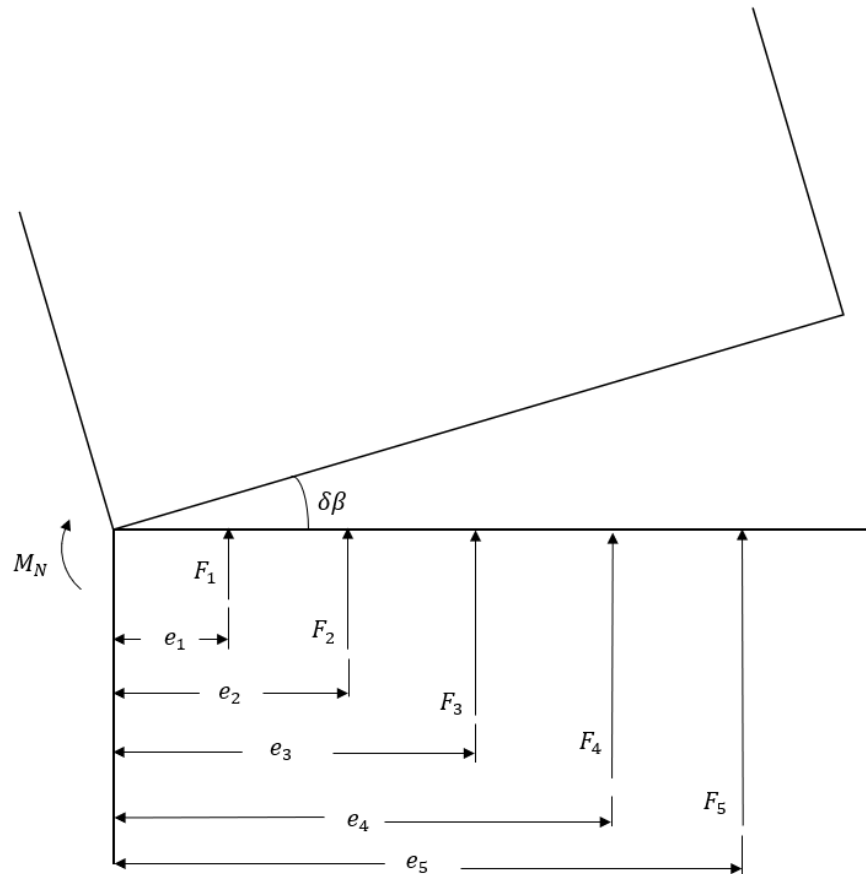


Figure 3 : Point de contact entre les deux cylindres et forces des ligaments en fonction du mouvement

Ensuite, à l'aide du schéma ci-dessus, il faut faire une somme des moments autour de ce point de contact pour permettre de déterminer le moment repris par le joint. C'est la composante tangente aux cylindres de ce moment qui nous permettra de calculer la déformation des ligaments et la force qu'ils reprennent. Pour se faire, nous effectuons une projection du moment sur le vecteur unitaire tangent au cylindre, qui s'avère être un vecteur normal au vecteur de rayon r .

Bien que les autres composantes de ce moment vont causer une déformation, celle-ci sera principalement en torsion autour de l'axe x , ce qui ne nous intéresse pas pour cette modélisation. Pour la déformation des ligaments, la force qu'ils reprennent peut être calculée à

partir de la relation contrainte-déformation, en prenant compte du matériau et de la géométrie de ceux-ci. L'itération par bisection cherche donc à trouver un angle pour lequel la somme des moments autour du point de contact sera nulle.

$$F_{lig} = AE\rho(\mu) \quad (8)$$

$$\sum M_n = 0 \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^5 F_{lig,n} e_n = \sum_{n=1}^5 A_n E \rho(\mu_n) e_n = 0 \quad (10)$$

Itération par bisection de l'angle $\delta\beta$ d'équation de compatibilité

Avec la composante tangentielle aux cylindres du moment, il est possible de trouver la déformation menant à l'équilibre du système. Par itération, on trouve l'angle entre les deux cylindres qui déforme les ligaments de façon à produire un moment qui est de grandeur égale et de direction opposée au moment préalablement trouvé.

$$\delta_z = \delta_\beta (r \cos \Psi + l_1) \cos \Psi \quad (11)$$

Convertir l'angle de déformation en déplacement de l'extrémité du bras

L'angle entre les deux cylindres correspond à un déplacement de l'extrémité du bras. Ce déplacement est toutefois dû à un changement d'angle qui n'est pas sur le plan x-z. Ainsi, il faut d'abord projeter l'angle sur l'axe x-z pour ensuite obtenir un déplacement en z de l'extrémité du bras.

Trouver la raideur équivalente

Finalement, avec la force en z et le déplacement en z, il est possible de calculer la raideur équivalente pour cette coordonnée.

$$k_{zz} = \frac{F_z}{\delta_z} \quad (12)$$

Équations permettant de calculer K_{yy}

On commence par déterminer les composantes x et y du vecteur r étant le vecteur rayon du cylindre du bras guidé se terminant vis-à-vis du point de contact entre les deux roulements. En se référant à la figure 4, on obtient :

$$r_x = r \cos \Psi \quad (13)$$

$$r_y = r \sin \Psi \quad (14)$$

Nous cherchons ensuite à obtenir la force F_3 correspondant à la force au contact du roulement. Puisque nous ne connaissons pas la force F_2 du câble de mouvement, nous cherchons donc à faire une somme des forces horizontales et une somme des moments de manière à éliminer la force F_2 des équations. Puisque nous ne connaissons ni la grandeur ni l'angle de la force F_3 , nous avons donc plus d'inconnues que d'équations.

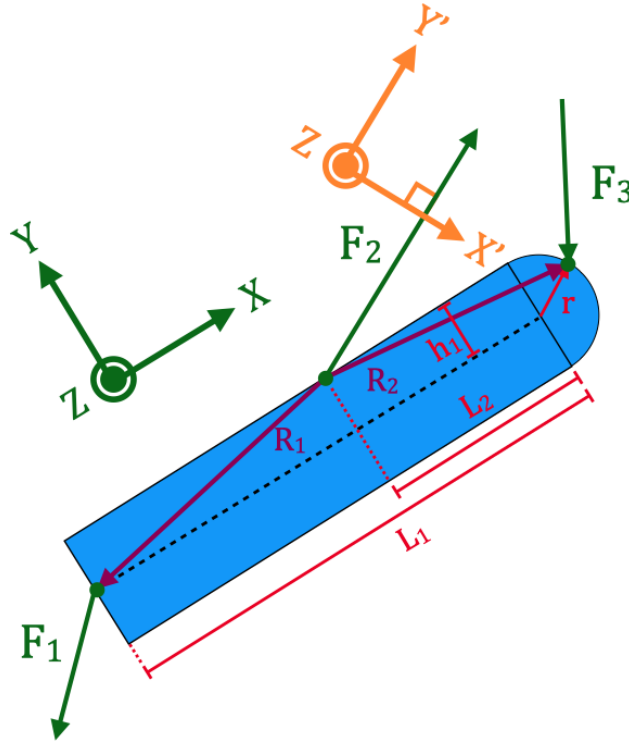


Figure 4 : DCL de la barre guidée

Nous devons donc faire une simplification au modèle en éliminant h_1 , puisque l'épaisseur de la barre est beaucoup plus faible que la longueur de celle-ci. Il est à noter que cette simplification aura des impacts plus importants sur le calcul de F_3 , car L_2 est plus proche de la valeur de h_1 . La composante perpendiculaire à h_1 aurait donc un impact plus grand sur le moment autour de l'attache de F_2 .

En se fiant à la figure 4, on calcule les vecteurs R_1 et R_2 avec :

$$R_1 = L_1 - L_2 \quad (15)$$

$$R_2 = L_2 + r \cos \Psi \quad (16)$$

Nous avons donc une équation donnant la projection de F_3 perpendiculaire au vecteur horizontal R_2 par moment autour de l'attache du câble. Il nous faut donc une autre équation pour arriver à 2 équations, 2 inconnues.

Pour se faire, on crée un nouveau système d'axes dont la composante horizontale est perpendiculaire à la force F_2 . On peut donc faire une somme des forces horizontales tout en éliminant F_2 .

$$\sum F_{X'} = 0 = F_{1X'} + F_{3X'} \quad (17)$$

Avec la somme des forces, on trouve la force horizontale de F_3 ($F_{3X'} = v$) opposée à la force F_1 selon le nouveau système d'axe.

Quant au moment autour de l'attache de F_2 , on commence par calculer le moment créé par la force F_1 en faisant un produit vectoriel avec R_1 .

Avec le moment, on peut calculer la réaction de la force F_3 par sa projection perpendiculaire au vecteur R_2 . On obtient une projection du vecteur nommée M .

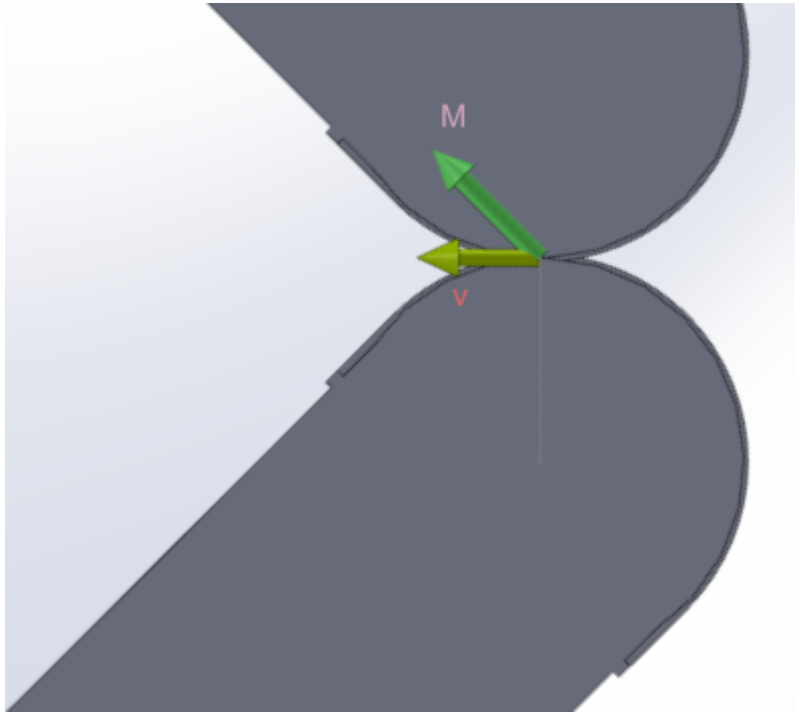


Figure 5 : Visualisation et mise en contexte de la position et orientation des vecteurs M et v .

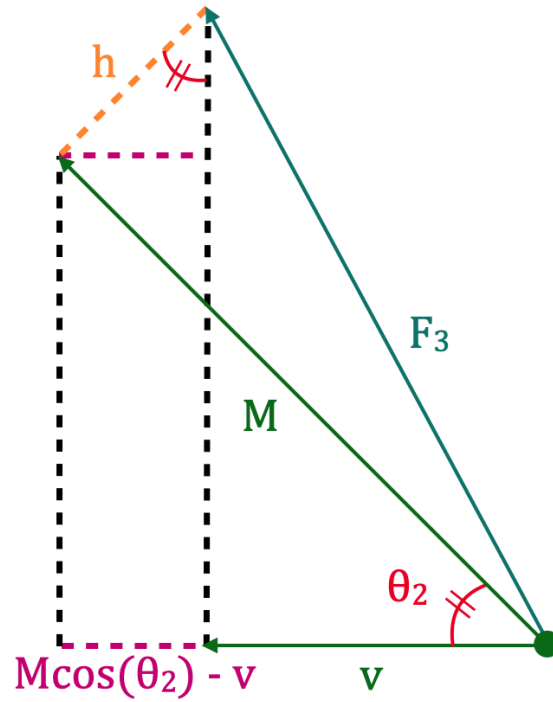


Figure 6 : Représentation des projections de la force F_3

Puisqu'on connaît les vecteurs M et v calculés précédemment, on utilise le schéma de la figure 6 pour calculer la longueur de h :

$$h = \frac{M \cos(\theta_2) - v}{\sin(\theta_2)} \quad (18)$$

Connaissant h et m , on peut encore utiliser une relation de Pythagore pour calculer la norme de F_3 :

$$F_3 = \sqrt{h^2 + M^2} \quad (19)$$

Avec la norme de F_3 , on peut finalement trouver son orientation grâce à l'une de ses projections.

Puisque les ligaments agissent comme des câbles, ils reprennent seulement en tension la composante de la force F_3 qui y sont colinéaires. Puisqu'ils sont toujours tangents aux cylindres pour cette configuration, nous pouvons donc utiliser la projection de F_3 sur un vecteur tangent au cylindre, qui s'avère également être perpendiculaire au vecteur r . Pour ce qui est de la répartition de la force, seuls les ligaments étant sollicités en tension offrent une résistance. C'est pourquoi nous divisons la force F_3 en 2 ou 3, en fonction de la direction de celle-ci. Le nombre 2 ou 3 vient du nombre de ligaments qui sont de chaque côté des cylindres.

À partir des forces étant reprises par les ligaments, de leurs dimensions et du module d'élasticité du matériau utilisé, nous calculons l'élongation de ceux-ci qui résulte en l'équilibre

du système. Cette élongation est ensuite assignée à un vecteur tangent aux cylindres, puis la composante y de ce vecteur est utilisée pour calculer le déplacement en y de l'extrémité du bras. Ce calcul provient d'un simple pivot autour du point d'attache du câble. Finalement, la division de la force équivalente en y par le déplacement en y de l'extrémité du bras nous donne une raideur équivalente k_{yy} .

Appliquer la procédure de résolution

Au cours du développement de notre modèle, nous avons porté attention à une multitude de paramètres pour nous assurer que chaque partie était correctement programmée.

Afin de s'assurer d'obtenir la raideur équivalente en fonction de la force et du déplacement, on confirme avec les graphiques ci-dessous que le déplacement trouvé représente bien le déplacement attendu et que les forces, leurs composantes et les projections de celles-ci sont cohérentes.

Pour ce qui est de la raideur en z, on commence par confirmer que la projection du moment de réaction sur un vecteur tangent au cylindre représente bien le comportement attendu. Sachant que le bras commence en accélérant, puis à 0.5s, décélère subitement jusqu'à la fin du mouvement, le graphique ci-dessous représente bien la séquence modélisée.

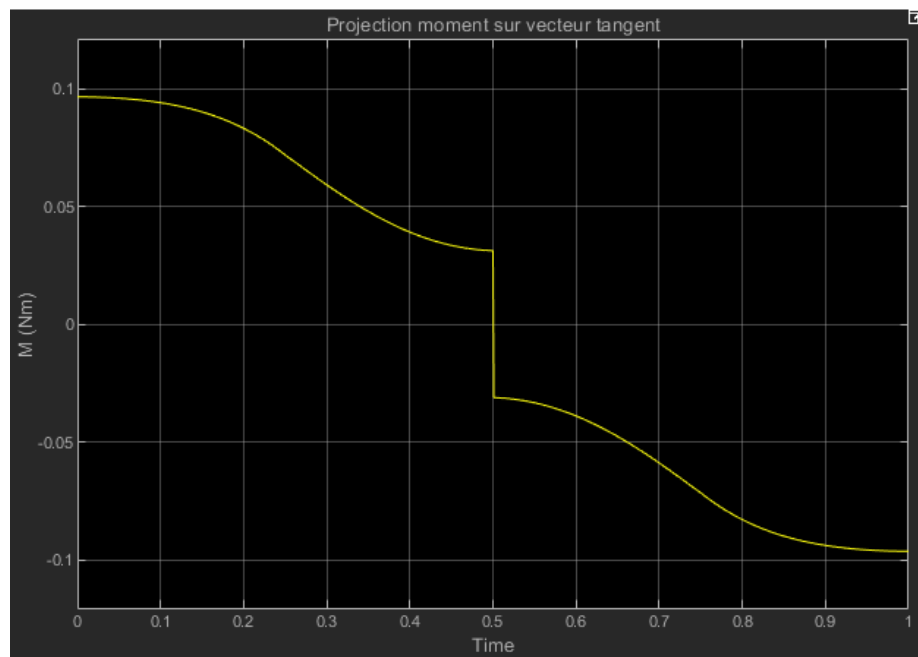


Figure 7: Projection du moment de réaction sur un vecteur tangent au cylindre

Par le graphique du déplacement en z en fonction du temps ci-dessous, on peut observer un changement soudain de direction à 0.5s. Ce changement de direction est attribuable à un changement d'orientation du moment en z, donné par l'accélération initiale du bras qui est ralenti par une décélération forcée autour de l'axe de θ .

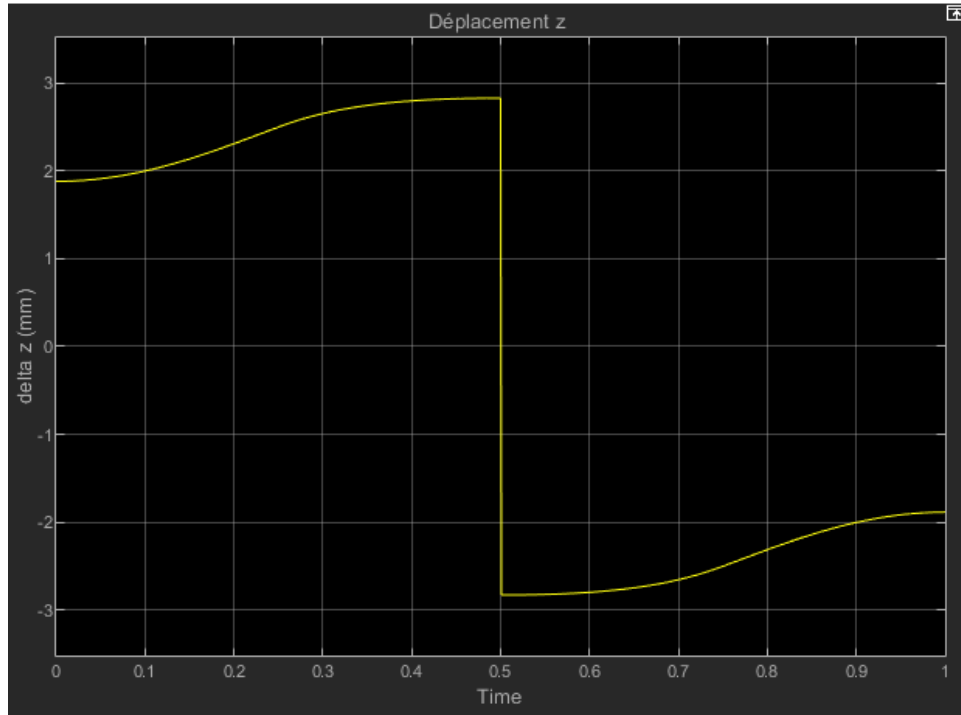


Figure 8: Déplacement en z

En divisant la force par le déplacement en z, on obtient la raideur équivalente en z. La courbe illustrée montre que la raideur varie en fonction du temps, ce qui est tout à fait envisageable, compte tenu du fait que la force et le déplacement varient également en fonction du temps.

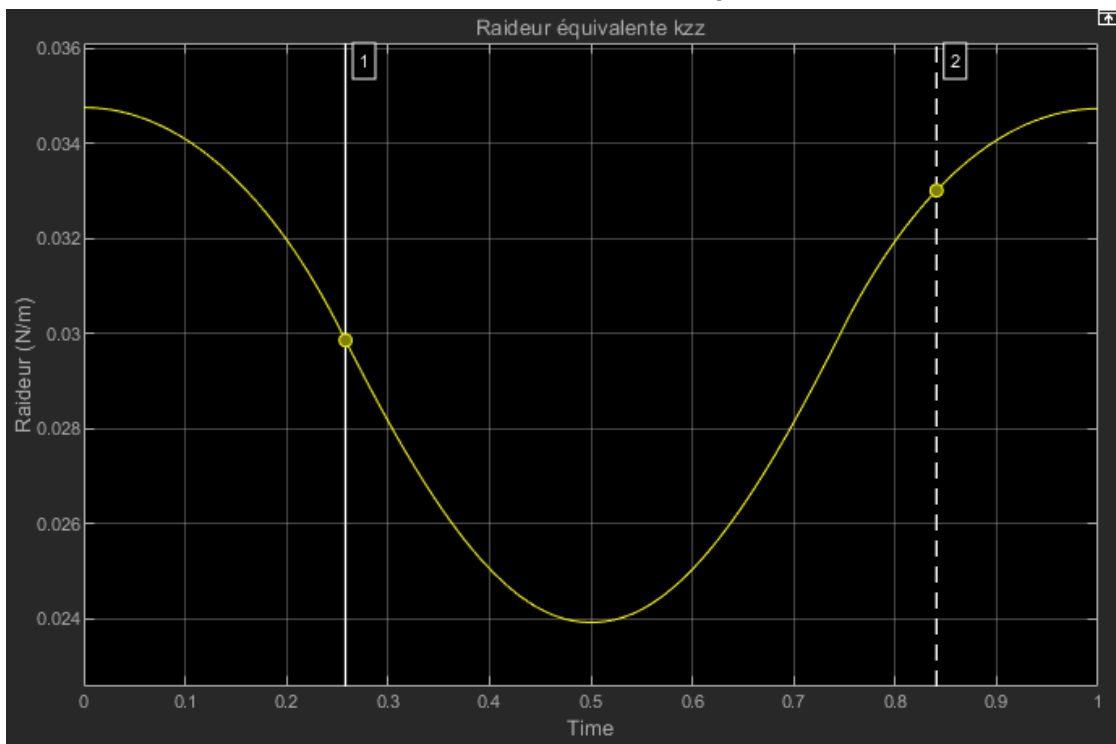


Figure 9: Raideur équivalente kzz

Pour la raideur équivalente en y, nous utilisons la même méthode. Pour chacune des étapes suivantes, nous vérifions tout au long de la programmation que les valeurs restent cohérentes, que la forme des courbes est réaliste et que les amplitudes concordent avec nos attentes.

On remarque une similitude entre la forme des courbes qui est caractérisée par deux changements d'orientation de l'accélération. Ce premier changement débute à 0.25s et le deuxième à 0.75s et ils représentent les périodes d'accélération et de décélération de l'angle ϕ .

Les graphiques sont présentés en ordre :

- La projection de la force sur le vecteur tangent.
- La composante "y" de l'élongation tangente.
- Le déplacement en "y" de l'extrémité du bras.

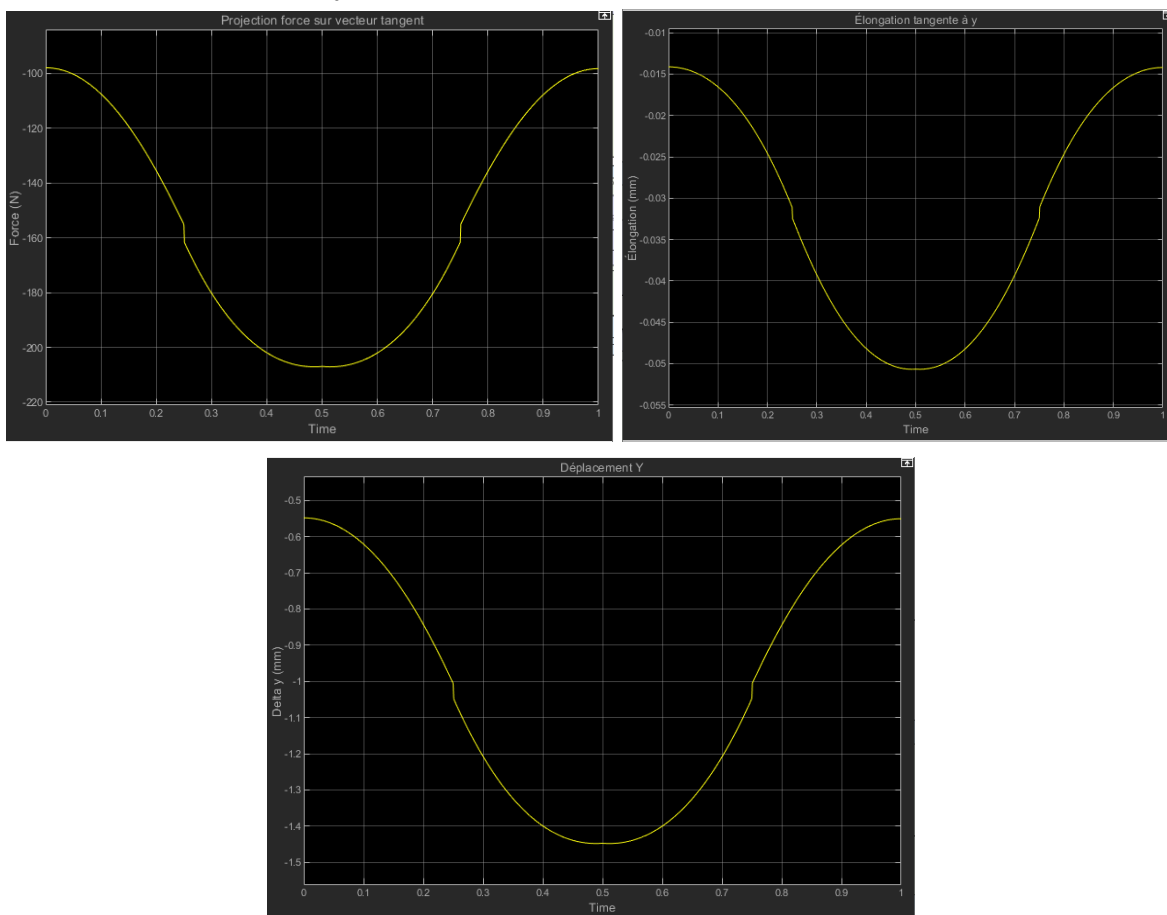


Figure 9,10,11: Graphique projection de la force sur le vecteur tangent, composante "y" de l'élongation tangente et déplacement en "y" de l'extrémité du bras

On obtient le comportement de la raideur équivalente en divisant la force de tension par le déplacement. Le graphique de la raideur équivalente en y est affiché plus bas et on remarque le même comportement qu'en "z", soit le fait que la raideur change dans le temps, ce qui indique bien que celle-ci est fonction de la position du bras et qu'elle n'a pas une réponse linéaire.

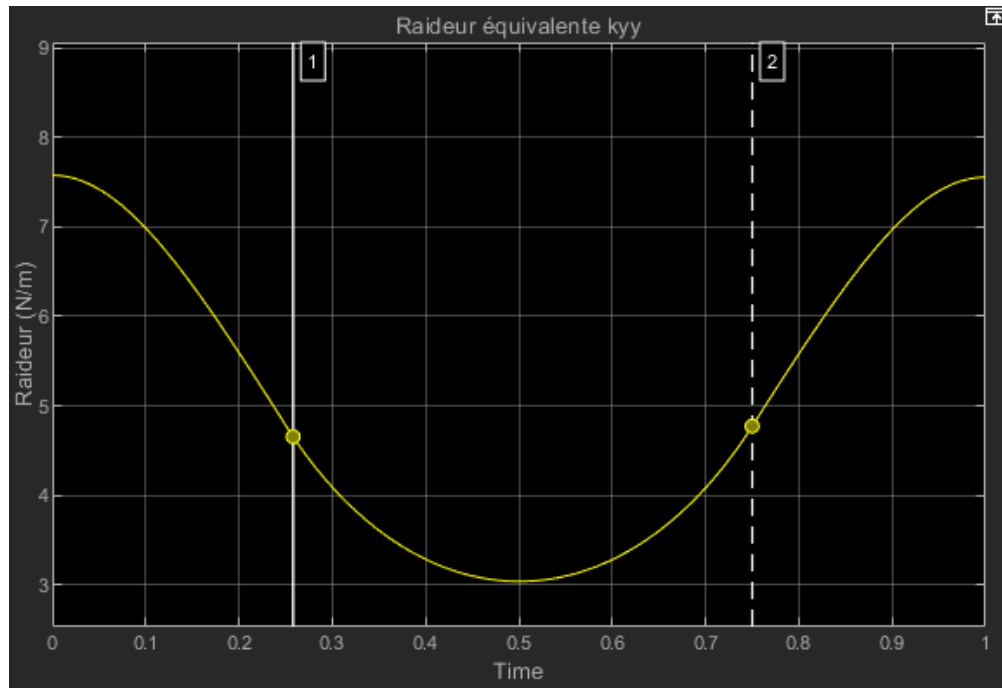


Figure 12: Raideur équivalente k_{yy}

Évaluer la solution et la procédure de résolution

Après avoir modélisé notre système sur Solidworks et Simulink, nous avons obtenu les résultats suivants.

Tableau 1: Résultats des raideurs équivalentes k_{yy} et k_{zz}

	k_{yy} (N/m)	k_{zz} (N/m)
Solidworks	1.1993	0.1201
Simulink	4.8263	0.0296

On remarque en premier lieu que les valeurs sont assez éloignées l'une de l'autre. On a environ une valeur 4 fois plus élevée pour le k_{yy} de Simulink tandis qu'on remarque l'inverse pour k_{zz} . Malgré cela, il est à noter que les valeurs restent dans le même ordre de grandeur. Cette deuxième observation nous permet de confirmer que les résultats sont véritables. Une différence d'ordre d'une centaine ou plus aurait disqualifié nos résultats.

La différence entre les valeurs est donc fort probablement due aux simplifications utilisées par les deux types de modélisation. Dans le cas de la modélisation Simulink, la simplification utilisée pour le calcul du moment autour de F_2 s'avère avoir des conséquences plus importantes que prévu. L'élimination de la hauteur h_1 a des conséquences minimales sur le calcul du moment provoqué par F_1 , car L_1 domine. Quant au moment provoqué par F_3 , après plusieurs modifications, il s'est avéré que h_1 est devenu environ 2 fois plus élevé que L_2 . La composante horizontale L_2 créerait donc un moment moins important que celle verticale avec h_1 . Malgré

cela, la composante verticale est plus petite plus l'angle ϕ est petit, car le point de contact est plus haut sur le cylindre du bras. La simplification a donc moins d'impacts moins l'angle ϕ est élevé. Donc, la force F_3 a été surestimée, ce qui explique la valeur de k_{yy} plus élevée que celle du modèle Solidworks.

Quant au calcul de k_{zz} pour le modèle Simulink, on sous-estime la force utilisée pour le calcul de k_{zz} . En fait, on suppose que la tension dans les ligaments permettant d'équilibrer le moment provient uniquement de la force en z de la masse au bout du bras. On ne tient donc pas compte de la déformation causée par la composante en y ou en x . Autrement dit, on suppose que seule la force en z produit un déplacement en z et que seul la force en y produit un déplacement en y . On néglige aussi toute interaction entre les forces, supposant ainsi qu'une force en y n'affectera pas la déformation en z causée par une force en z .

Des erreurs sont aussi présentes dans le modèle Solidworks. Premièrement, puisque le modèle comportait plusieurs composantes (2 bras et 5 ligaments), nous avons utilisé un maillage plus grossier permettant de rouler la simulation dans un temps raisonnable. Il est tout de fois difficile de déduire si cette erreur de calcul produit une surestimation ou une sous-estimation de la contrainte des câbles.

Conclusion

Pour conclure, il est possible de modéliser mathématiquement la raideur équivalente du bras en fonction de la géométrie, de la position et des ligaments du joint roulant. Ce modèle mathématique élaboré sur Matlab Simulink a l'avantage d'être incroyablement moins lourd en temps de calcul que les simulations Solidworks. Ces simulations nous ont toutefois permis de valider le modèle mathématique et de faire un portrait de sa précision. Les raideurs équivalentes de k_{yy} et k_{zz} trouvées sur SolidWorks sont respectivement 1.1993 N/m et 0.1201 N/m, tandis que les raideurs sur Simulink sont 4.8263 N/m et 0.0296 N/m. On remarque que l'écart entre ces valeurs est d'un facteur de 4 lorsque le bras est positionné à 90° . Cet écart peut être attribuable à des simplifications effectuées dans l'élaboration du problème dans Simulink et le maillage grossier utilisé dans SolidWorks. Ces résultats, bien que différents, sont du même ordre de grandeur, ce qui nous indique que le modèle est fonctionnel pour les aspects qu'il considère.

Présentement, notre modèle mathématique est suffisamment fonctionnel pour calculer grossièrement les mouvements d'un bras robotisé comportant un joint roulant. C'est un bon point de départ et il serait possible d'ajouter davantage de relations et d'équations au modèle Simulink pour réduire le nombre de simplifications menant à des imprécisions. Puisque le modèle mathématique est très léger et fait très peu d'itérations, il serait possible de l'implémenter dans un microcontrôleur pour compenser les déformations afin de récupérer une précision sur les mouvements.