



Alexis Karl et Mathys Fillinger

# *Propriétés structurelles et classifications cinématiques des robots mobiles à roues*

- Présentation de l'article -

*Campion 1996*



8 Novembre 2024

# *Référence de l'article*



*[1] Guy Campion, Georges Bastin et Brigitte D' Andréa-Novel*

Février 1996

**Structural Properties and Classification of Kinematic and  
Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots**

IEEE-Transactions on robotics and automation vol 12, NO.1 \*



\*On ne traitera pas la partie dynamique. On simulera le robot (3,0) durant cette présentation

# Modélisation d'un robot mobile avec des roues

Schéma de la position du robot en vue du dessus :

## Repère monde

$x$  est la coordonnée du point de référence  $P$  sur l'axe  $I_1$

$y$  est la coordonnée du point de référence sur l'axe  $I_2$

## Angle de rotation $\theta$

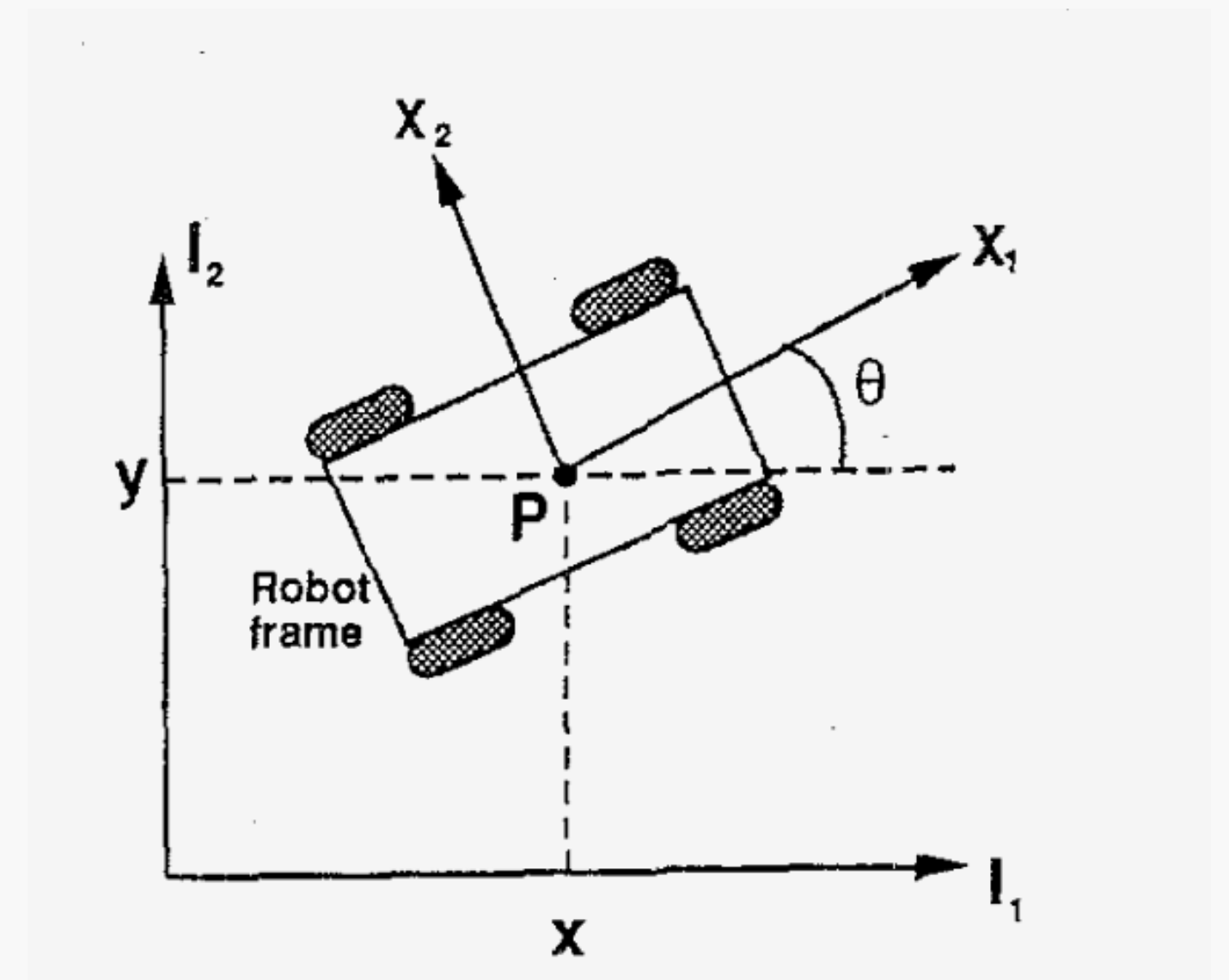
$\theta$  est la rotation du robot mobile suivant un axe vertical  $I_3$  (orthogonal au tableau) et passant par  $P$

## Repère propre au robot mobile

Le repère propre au robot mobile a son origine en  $P$ .

Il est engendré par la rotation  $\theta$  et est constitué des axes

$X_1$  et  $X_2$



[1] modélisation générale d'un robot mobile à roues vue du dessus, dans le plan  $(0, I_1, I_2)$

# Modélisation d'un robot mobile avec des roues

Schéma de la position d'une roue dans le repère propre au robot mobile:  
(Cas d'une roue fixe et centrée)

Coordonnées polaires pour placer les roues par rapport à P

$l$  est la distance PA où A est le centre de la roue

$\alpha$  est l'angle existant entre  $X_1$  et PA

Plan de la roue

L'inclinaison du plan de la roue est régie par la constante  $\beta$

Rotation de la roue

$\varphi(t)$  est l'angle de rotation de la roue

$r$  est le rayon de la roue

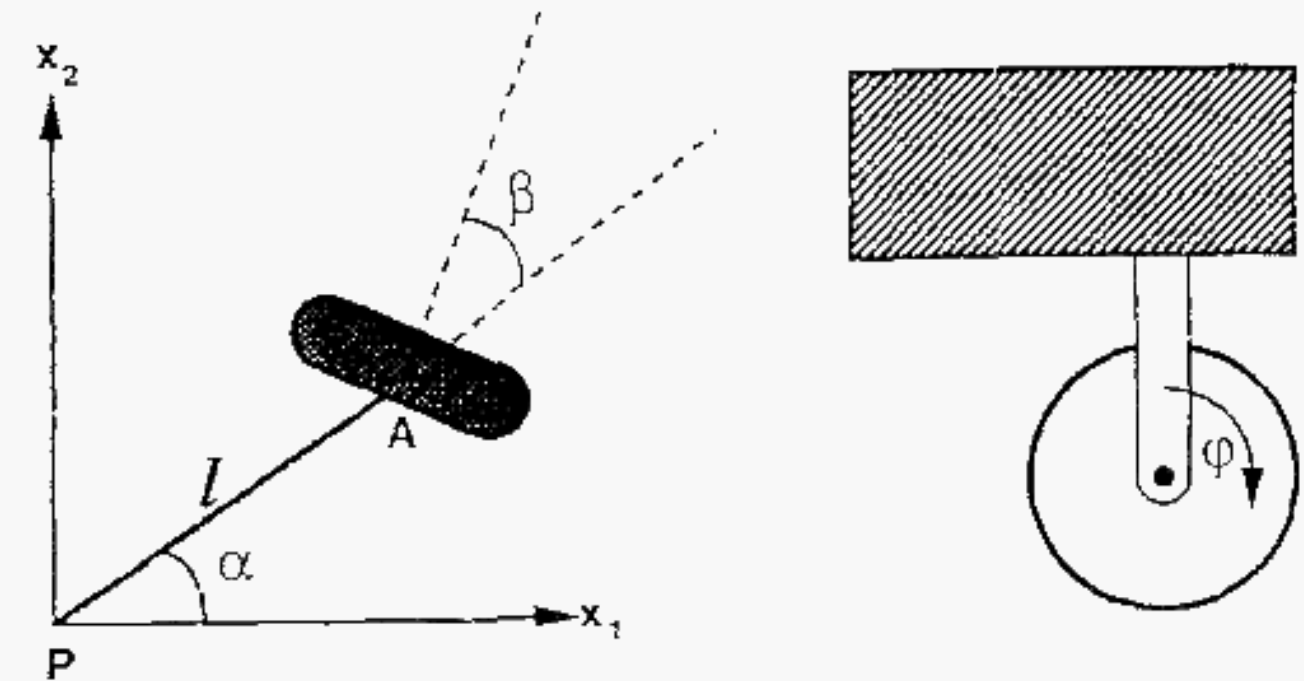


Schéma d'une roue fixe selon le repère (P,  $X_1$ ,  $X_2$ ) puis vue de face [1]

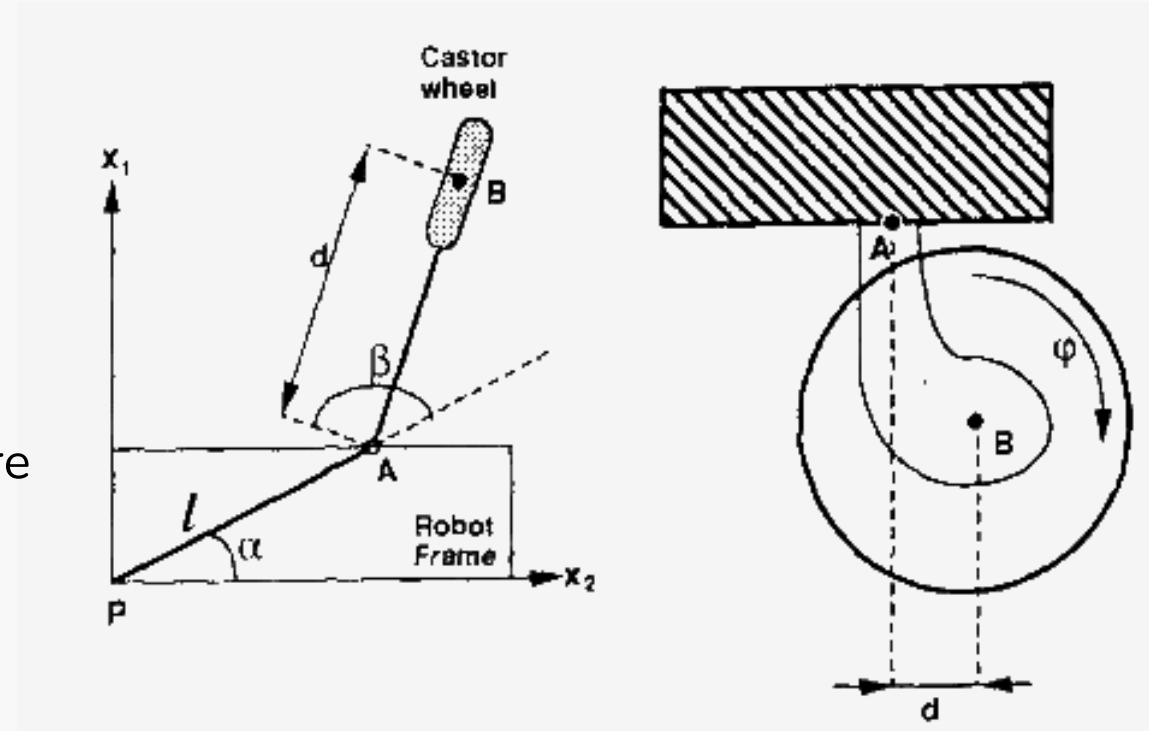
# Complexification du modèle des roues utilisées

## roue centrée orientable

L'inclinaison du plan de la roue devient variable.

$\beta$  dépend du temps  $\rightarrow \beta(t)$

Schéma d'une roue décentrée orientable selon le repère  $(P, X_1, X_2)$  [1]



## roue décentrée orientable

Il y a un **décalage noté  $d$**  entre le centre de la roue  $B$  et le point de contact reliant le corps constitué de la roue noté  $A$

## roue suédoise

Un nouveau paramètre angulaire  $\gamma$  est instauré pour gérer **l'inclinaison des rouleaux**

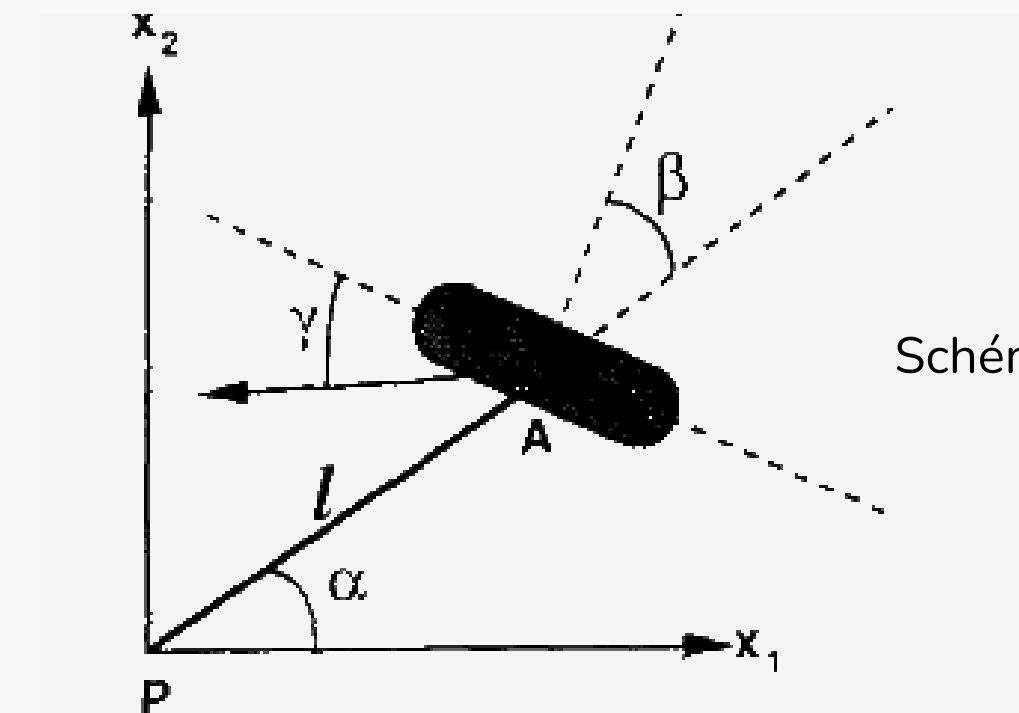


Schéma d'une roue suédoise selon le repère  $(P, X_1, X_2)$  [1]



# Equations au point de contact roue/sol

roue fixe

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l \cos \beta] R(\theta) \dot{\xi} + r \dot{\varphi} = 0 \quad (1)$$

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin \beta] R(\theta) \dot{\xi} = 0 \quad (2)$$

roue centrée orientable

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l \cos \beta] R(\theta) \dot{\xi} + r \dot{\varphi} = 0 \quad (3)$$

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin \beta] R(\theta) \dot{\xi} = 0 \quad (4)$$

roue décentrée orientable

$$[-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l \cos \beta] R(\theta) \dot{\xi} + r \dot{\varphi} = 0 \quad (5)$$

$$[\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad d + l \sin \beta] R(\theta) \dot{\xi} + d \dot{\beta} = 0 \quad (6)$$

roue suédoise

$$[-\sin(\alpha + \beta + \gamma) \quad \cos(\alpha + \beta + \gamma) \quad l \cos(\beta + \gamma)] R(\theta) \dot{\xi} + r \cos \gamma \dot{\varphi} = 0 \quad (7)$$

# Modélisation d'un robot mobile avec des roues

Légende:

f: roue fixe

c:roue centrée orientable

oc: roue décentrée orientable

sw: roue suédoise

On considère désormais un robot mobile composé de N roues.

$$N_f + N_c + N_{oc} + N_{sw} = N$$

Le nombre total de coordonnées de configuration est donné par :

$$N_f + 2N_c + 2N_{oc} + N_{sw} + 3$$

$$\xi \triangleq \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}$$

Roues fixes

$$\varphi(t)$$

Roues orientables

$$\begin{aligned} \varphi(t) \\ \beta(t) \end{aligned}$$

Roues suédoises

$$\varphi(t)$$



# Modélisation d'un robot mobile avec des roues

Pour un robot avec N roues de tout type

$$J_1(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq \begin{pmatrix} J_{1f} \\ J_{1c}(\beta_c) \\ J_{1oc}(\beta_{oc}) \\ J_{1sw} \end{pmatrix}$$

$$J_2$$

$$C_1(\beta_c, \beta_{oc}) \triangleq \begin{pmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta_c) \\ C_{1oc}(\beta_{oc}) \end{pmatrix}$$

$$C_2 \triangleq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{2oc} \end{pmatrix}$$

$$J_1(\beta_c, \beta_{oc})R(\theta)\xi + J_2\dot{\varphi} = 0 \quad (8)$$

$$C_1(\beta_c, \beta_{oc})R(\theta)\dot{\xi} + C_2\dot{\beta}_{oc} = 0 \quad (9)$$

Matrice compacte comportant les lignes qui multiplient le terme  $R(\theta)\dot{\xi}$  dans les équations (1),(3),(5) et (7) en prenant en compte le type de roue dont il s'agit. Cette matrice est donc de taille Nx3

Matrice diagonale où le terme  $i$  correspond au rayon de la roue considérée ou bien au produit du rayon avec le facteur  $\cos(\gamma)$  s'il s'agit d'une roue suédoise. Elle est de taille NxN

Matrice compacte comportant les lignes qui multiplient le terme  $R(\theta)\xi$  dans les équations (2),(4) et (6) en prenant en compte le type de roue dont il s'agit. Cette matrice est donc de taille (N-Nsw)x3

Matrice de taille (Noc+2)xNoc où  $C_{2oc}$  est une matrice diagonale regroupant pour chaque terme  $i$  le décalage des roues décentrées orientables et  $i$



# Modélisation d'un robot mobile avec des roues

Pour un robot avec N roues de tout type

$$J_1(\beta_c, \beta_{oc})R(\theta)\dot{\xi} + J_2\dot{\varphi} = 0 \quad (8)$$

$$C_1(\beta_c, \beta_{oc})R(\theta)\dot{\xi} + C_2\dot{\beta}_{oc} = 0 \quad (9)$$

Les  $N_f+N_c$  premières équations  
déduites de (9)

$$C_{1f}R(\theta)\dot{\xi} = 0 \quad (10)$$

$$C_{1c}(\beta_c)R(\theta)\dot{\xi} = 0. \quad (11)$$

$$\longrightarrow C_1^*(\beta_c) = \begin{pmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta_c) \end{pmatrix} \quad (12)$$

# Modélisation d'un robot mobile avec des roues

## Degré de mobilité

$$\delta_m = \dim \mathcal{N}[C_1^*(\beta_c)] = 3 - \text{rank}[C_1^*(\beta_c)] \quad (13)$$

## Degré de directionnalité

$$\delta_s = \text{rank} C_{1c}(\beta_c) \quad (14)$$

## Hypothèses de non dégénérescence

Les roues fixes ont un seul et même axe de rotation

Les centres des roues centrées orientables n'appartiennent pas à cet axe

$\delta_s$  est inférieur ou égal à 2

# Modélisation d'un robot mobile avec des roues

En prenant en compte les hypothèses de non dégénérescence et en considérant que les cas cinématiquement intéressants et réalisables, on obtient (15) et (16) :

$$1 \leq \delta_m \leq 3. \quad (15)$$

$$0 \leq \delta_s \leq 2. \quad (16)$$

D'où : (15) + (16)

$$2 \leq \delta_m + \delta_s \leq 3.$$

Degré de manoeuvrabilité

(impossible d'avoir 1 en borne inférieure car le CIR varie au cours du temps)

Les valeurs possibles sont donc données dans le tableau suivant

$\delta_m$	3	2	2	1	1
$\delta_s$	0	0	1	1	2

robot de type 3,0

# Modélisation d'un robot mobile avec des roues

On sait que :  $R(\theta)\dot{\xi} \in \mathcal{N}[C_1^*(\beta_c)]$

Notons :  $\Sigma(\beta_c)$  comme étant une base de  $\mathcal{N}[C_1^*(\beta_c)]$

$$\Delta_c \triangleq \text{span} \{ \text{col } R^T(\theta)\Sigma(\beta_c) \}$$

On obtient :

$$\dot{\xi}(t) \in \Delta_c \Rightarrow \text{Pour tout } t, \dot{\xi} = R^T(\theta)\Sigma(\beta_c)\eta \quad (17)$$

avec  $\eta$  étant un vecteur temporel

On peut réécrire (17) en l'équation (18):

$$\dot{z} = B(z)u \quad (18) \quad \text{où } z \triangleq \xi, B(z) \triangleq R^T(\theta)\Sigma \text{ et } u \triangleq \eta$$

# Modélisation d'un robot mobile avec des roues

L'équation (18) pour un robot (3,0) peut se réécrire:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Où  $\Sigma(\beta_c)$  est la matrice identité

# Irréductibilité du modèle cinématique en posture

Modèle cinématique en posture (relation entre la dérivée de la posture et la commande) :

$$\dot{z} = B(z)u$$

où  $z \triangleq \xi$  ,  $B(z) \triangleq R^T(\theta)\Sigma$  et  $u \triangleq \eta$

Ici :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

# Irréductibilité du modèle cinématique en posture

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$$

- On remarque que le rang de B est égal à 3 et vaut  $\delta_m + \delta_s$
- De plus, on peut facilement former une base de dimension 3 composée des colonnes de B et la dimension de cette matrice vaut la dimension de z.
- Ainsi, en conséquence du Théorème de Frobenius : **ce modèle cinématique en posture est irréductible**



# Irréductibilité du modèle cinématique en posture

- Cette propriété est généralisable aux autres classes de robots en utilisant l'Algèbre de Lie
- Pour tout modèle cinématique en posture :

Pour tout  $z$ ,

$$\dim \bar{\Delta}(z) = 3 + \delta_s$$

$$\text{rank } B(z) = \delta_m + \delta_s$$

# Commandabilité du linéarisé et du robot

- Modèle cinématique linéarisé :

$$\frac{d}{dt}(z - \bar{z}) = B(\bar{z})u. \quad \text{avec} \quad (\bar{z}, \bar{u} = 0)$$

Or, le rang de B est  $\delta_m + \delta_s$  car d'après ce qui précède c'est valable pour tout z donc pour  $\bar{z}$

- Ce qui implique le modèle linéarisé est commandable car son rang vaut la dimension de z qui est 3. De plus, le robot (3,0) est commandable.

# Modèle cinématique en configuration

À présent, on prend en compte les contraintes restantes : les vitesses de rotation et angulaire. Elles résultent des équations (10) et (11) :

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_{oc} &= -C_{2oc}^{-1} C_{1oc}(\beta_{oc}) R(\theta) \dot{\xi} \\ \dot{\varphi} &= -J_2^{-1} J_1(\beta_c, \beta_{oc}) R(\theta) \dot{\xi}\end{aligned}$$

En utilisant :

$$\dot{\xi} = R^T(\theta) \Sigma(\beta_c) \eta$$

On déduit :

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_{oc} &= D(\beta_{oc}) \Sigma(\beta_c) \eta \\ \dot{\varphi} &= E(\beta_c, \beta_{oc}) \Sigma(\beta_c) \eta\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}D(\beta_{oc}) &\triangleq -C_{2oc}^{-1} C_{1oc}(\beta_{oc}) \\ E(\beta_c, \beta_{oc}) &\triangleq -J_2^{-1} J_1(\beta_c, \beta_{oc})\end{aligned}$$

# Modèle cinématique en configuration

On remarque que les matrices E et D satisfont les équations suivantes

:

$$J_1(\beta_c, \beta_{oc}) + J_2 E(\beta_c, \beta_{oc}) = 0$$

$$C_{1oc}(\beta_{oc}) + C_{2oc} D(\beta_{oc}) = 0.$$

Ainsi, l'évolution des coordonnées de configuration peuvent être décrite par l'équation suivante :

$$\dot{q} = S(q)u$$

Avec :

$$q \triangleq \begin{pmatrix} \xi \\ \beta_c \\ \beta_{oc} \\ \varphi \end{pmatrix}$$

(le vecteur des coordonnées de configuration)

# Modèle cinématique en configuration

$$S(q) \triangleq \begin{pmatrix} R^T(\theta)\Sigma(\beta_c) & 0 \\ 0 & I \\ D(\beta_{oc})\Sigma(\beta_c) & 0 \\ E(\beta_c, \beta_{oc})\Sigma(\beta_c) & 0 \end{pmatrix} \quad u \triangleq \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

# Modèle cinématique en configuration

Dans notre exemple, du type (3,0) :

$$q = (x \ y \ \theta \ \varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3)^T$$

Ce qui donne :

$$S(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2r} & \frac{1}{2r} & \frac{L}{r} \\ 0 & -\frac{1}{r} & \frac{L}{r} \\ \frac{\sqrt{3}}{2r} & \frac{1}{2r} & \frac{L}{r} \end{pmatrix}.$$

# Modèle cinématique en configuration

Ce qui veut dire que  $S$  est de rang 3.

$$\Delta_1(q) \triangleq \text{span}\{\text{col}(S(q))\}.$$

De plus :

Et, on repère facilement que :

$$\dim(\Delta_1) = 3 \qquad \dim(\text{inv}(\Delta_1)) = 5.$$

Or, le degré de non-holonomie est défini par :

$$M = \dim(\text{inv}(\Delta_1)) - (\delta_m + N_c).$$

Et vaut donc ici,  $5 - 3 = 2$



# Modèle cinématique en configuration

Enfin, le nombre de coordonnées qui peuvent être éliminés est  $6 - 5 = 1$ .

En effet :

$$\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3 = -\frac{3L}{r}\dot{\theta}.$$

Ce qui implique que le terme  $(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \frac{3L}{r}\theta)$  est constant pour toute trajectoire compte-tenu des contraintes (car la somme des dérivées fait 0, ce qui implique que la primitive est constante)

Ansì, on peut éliminer une des quatre variables :  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \theta$ .



Alexis Karl et Mathys Fillinger

# *Propriétés structurelles et classifications cinématiques des robots mobiles à roues*

- Simulation -

*Campion 1996*



# But de la simulation



**Le robot 3.0 doit se déplacer d'un état initial vers un état final. La simulation permet de visualiser la vitesse de rotation de chacune des roues au cours de son déplacement en incrémentant les trajectoires effectuées d'un angle de  $22,5^\circ$**

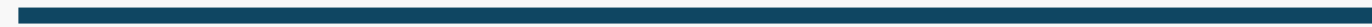
## Hypothèses

**Les hypothèses que nous considérons durant la simulation :**

- La mécanique du robot est neuve
- On considère des roues suédoises parfaitement rondes
- Il n'y a aucun frottement et aucun glissement des roues sur le sol
- Le robot étudié est un corps composé uniquement de 3 roues liées entre elles par un châssis (pas de prise en compte du moteur par exemple ...)
- Le point P se trouve au centre du robot
- On connaît l'endroit initial et l'endroit d'arrivée du robot
- On connaît la valeur de chacune des constantes du robot



# ***Application au robot APR-02***



*[2] Jordi Palacin, Elena Rubies, Ricard Bitriá et Eduard Clotet*

*1 Juillet 2023*

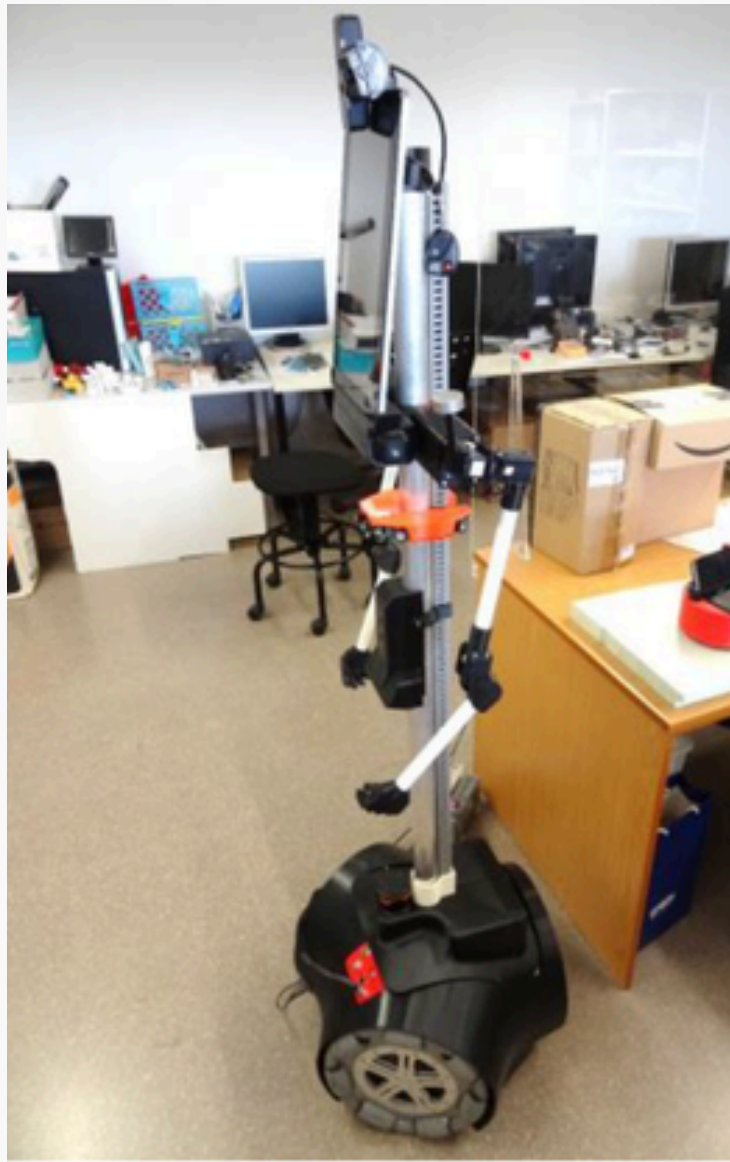
**Phasor-Like Interpretation of the Angular Velocity of the Wheels  
of Omnidirectional Mobile Robot**

Mobile Robotics: Mathematics, Models and Methods, *Machines* **2023**



# *Application au robot APR-02*

Robot d'assistance pour les personnes hospitalisées



Robot Apr-02 complet [2]



Vue du dessus du système interne permettant de contrôler les trois roues omnidirectionnelles du robot Apr-02 [2]

# Application au robot APR-02

Il est dit dans l'article que les roues sont placées suivant  $\alpha=[0, 2\pi/3, 4\pi/3]$

Les roues sont des **roues suédoises**

On supposera que les roues sont centrées =>  $d=0$

r



Parameter	Symbol	Value (m)
Chassis radius	—	0.2790
Wheel radius	$r_{w_i=1...3}$	0.1480
Wheel width	—	0.0465
Distance between the centroids of the robot and the wheels	$d_{i=1...3}$	0.1950
Angle between $x_b$ and the line joining the centroids of the robot and the wheels	$\delta_{i=1...3}$	$[60, 180, 300]^\circ$
Angle between the rolling direction of the passive rollers and the wheels axis	$\gamma_{i=1...3}$	$0^\circ$

l



$\beta$



$\gamma$

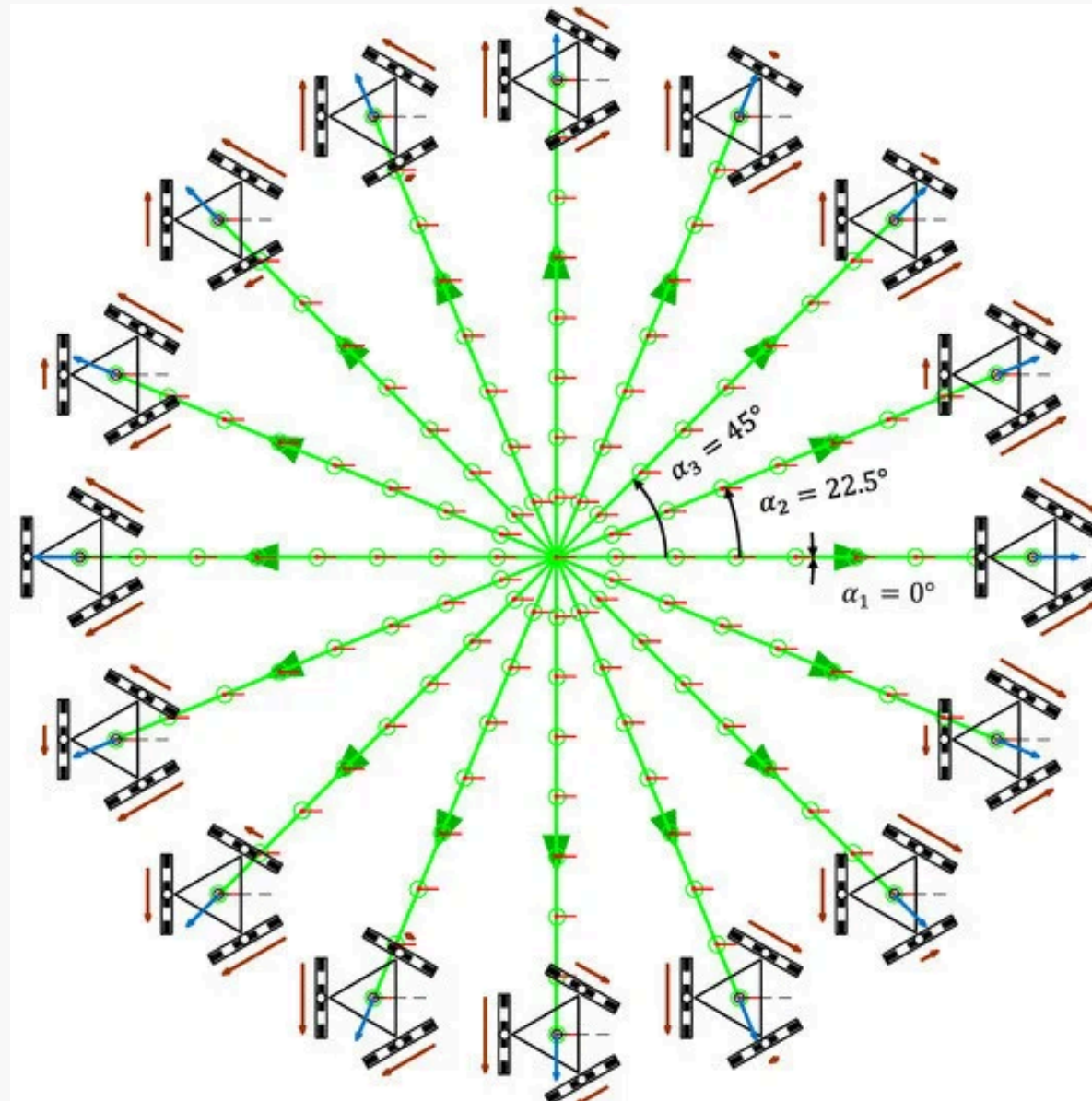


$y_{w_i}$

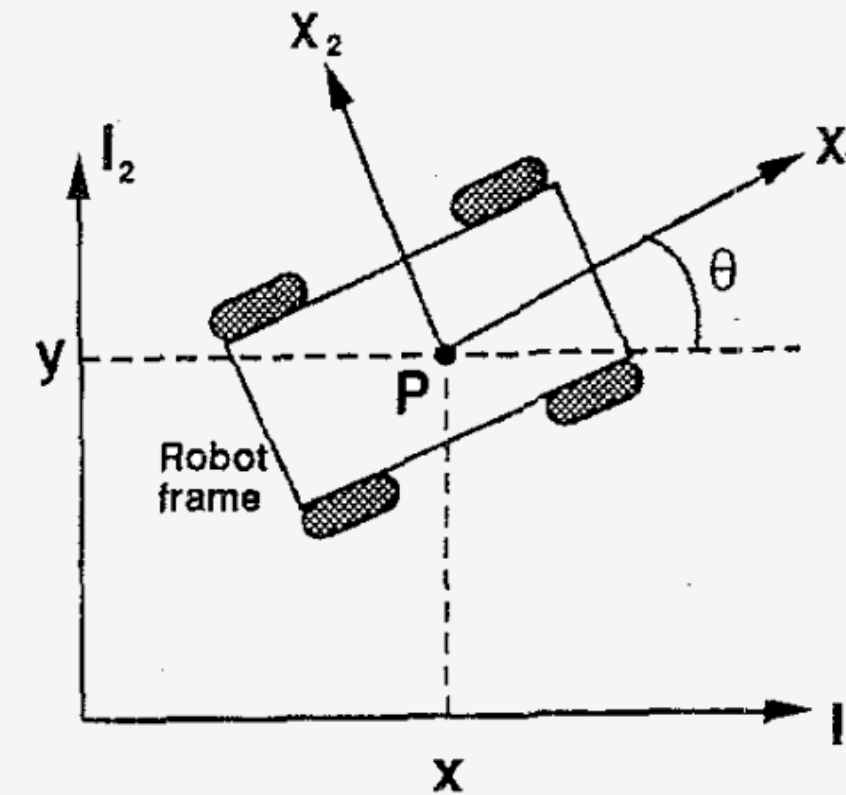
Tableau regroupant quelques caractéristiques du robot APR-02 [2]



# Application au robot APR-02



Représentation des trajectoires utilisées pour la simulation du robot APR-02 [2]



modélisation générale d'un robot mobile à roues vue du dessus, dans le plan  $(0, l_1, l_2)$  [1]

En position  
initiale :

$x=0$  .....→  
 $y=0$  .....→  
 $\Theta=0$  .....→

En position  
finale:

$x=4.8\cos(\alpha)$   
 $y=4.8\sin(\alpha)$   
 $\Theta=0$

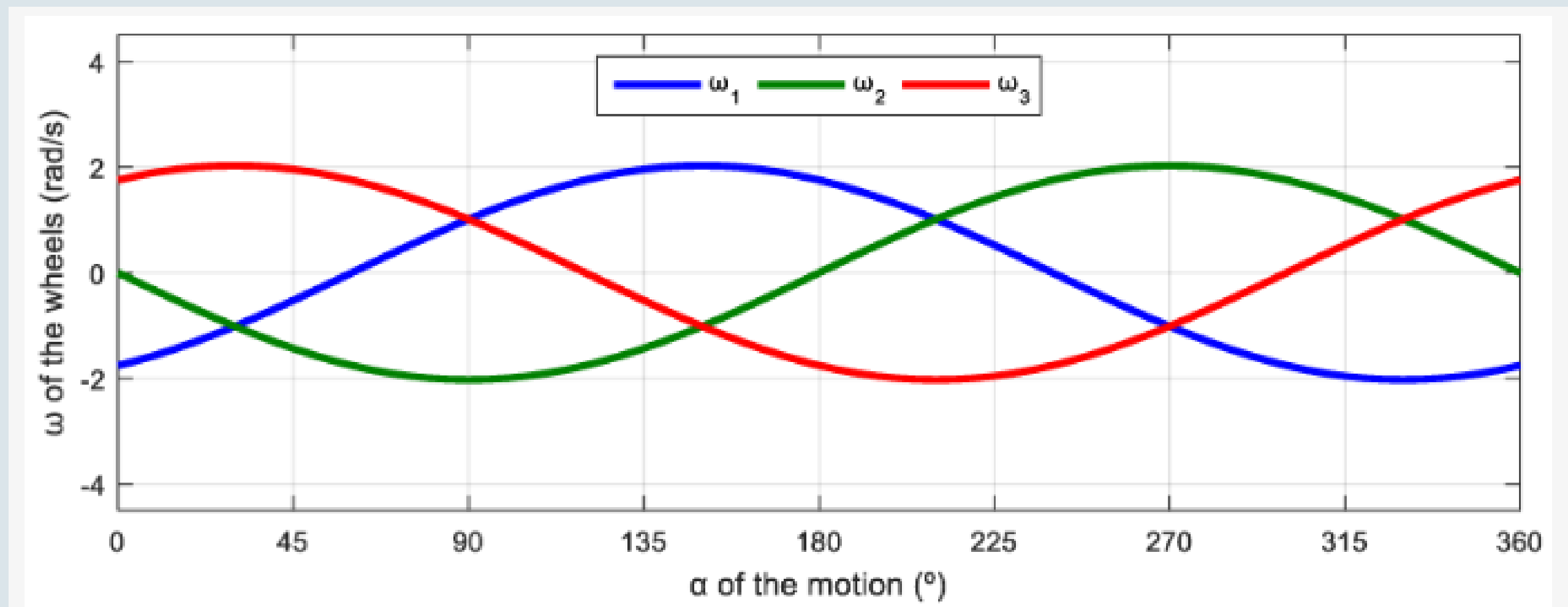
Un pas angulaire de  $22.5^\circ$

Une durée de trajectoire de 16 s



# *Application au robot APR-02*

Résultats de la simulation du robot APR-02 obtenus



L'évolution de la vitesse de rotation de chacune des roues du robot APR-02 en fonction de l'angle  $\alpha_i$  [2]

# ***Conclusion et pistes d'améliorations***

## **Points positifs**

- On obtient des sinusoides comme dans les résultats de L'APR-02
- Les extremums des courbes coïncident avec les résultats

## **Points à améliorer**

- Les caractéristiques dynamiques du robot sont négligées

## **Ajouts possibles**

- Complexifier le modèle en enlevant des hypothèses de simulation
- Ajouter une fonctionnalité pour commander le robot en vitesse
- Différencier les conditions initiales

# ***Conclusion de la présentation***

## Ce que l'on a vu :

- Modélisation générale d'un robot mobile à roue
- Caractéristiques de quatre types de roue (fixe, centrée orientable, décentrée orientable, suédoise)
- Condition des degrés de mobilité, directionnalité et manoeuvrabilité
- Propriétés d'un robot (3,0)
- Degré de non holonomie et vecteur des données de configuration
- Simulation mettant en jeu différent modèle (sigmoïde, polynomial, quadratique et lineaire)
- Exemple d'application : le robot APR-02

## Pour approfondir :

- Modèle dynamique général d'un robot mobile à roues
- Etudier d'autres types de roues (roue mécanum ? )
- S'intéresser à d'autres structures de robots (robot omnidirectionnel à 4 roues suédoises)

.....



*Merci de votre  
attention !*



.....