Recherche Maths

Mathys Fillinger

February 2025

1 Équation équivalente

1.1 Notation et définition

Soit M un ensemble d'entiers tel que :

$$M = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 3\} \tag{1}$$

Soit D un ensemble d'entiers défini par :

$$D = \{d = 10a + b \mid (a, b) \in \mathbb{N} \times \{1, 3, 7, 9\},\ d \in \mathbb{N}^*\} \tag{2}$$

On appellera cet ensemble "l'ensemble des diviseurs".

Enfin, notons $\mathbb{N}_{10}$ un ensemble d'entiers défini par :

$$\mathbb{N}_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \tag{3}$$

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}_{10}$. Soit $m \in M$, on peut donc écrire

$$m = 10a + b \tag{4}$$

Si m est divisible par $d \in D$, il vient

$$m = 0[d] \tag{5}$$

<u>Proposition 1</u>: *Pour tout $d \in D$, il existe un critère de divisibilité permettant de savoir si $m \in M$ est divisible par d.*

démonstration 1: Soit $m \in M$ et $d \in D$ tel que $m = 0[d]$, alors on a :

$$m = 10a + b = 0[d]$$

Or, si l'on définit $\frac{dk_{\min}+1}{10}$, où $k_{\min} = \min\left\{\frac{dk+1}{10} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$, on obtient l'équation suivante :

$$10qa + qb = 0[d]$$

En réarrangeant cette équation, on obtient :

$$a + qb = 0[d]$$

Ainsi, on a la naissance d'une nouvelle expression équivalente à (5) étant

$$a + qb = 0[d] \tag{6}$$

On s'intéresse maintenant à la valeur de ce nombre spécial q donnant un nouveau moyen d'étudier la divisibilité entre tout nombre $m \in M$ et $d \in D$ si, bien sûr, $m > d$.

Considérons $a_d \in \mathbb{N}$ et $b_d \in \{1, 3, 7, 9\}$ tels que $d = 10a_d + b_d$. Alors, la valeur de q apparaît dans le tableau suivant :

	1	**3**	**7**	**9**
0	1	1	5	1
1	10	4	12	2
2	19	7	19	3
...	...	...	...	...
p	9p+1	3p+1	7p+5	p+1

Table 1: q en fonction des valeurs de d

On a donc l'apparition d'une distinction selon la valeur de b_d.
Soit $n \in \mathbb{N}$, si l'on ordonne les éléments de D par ordre croissant, on peut créer une bijection entre les éléments de $\mathbb{N}$ et ceux de D.
De cette manière, on aurait : n=0 correspond à d=1 , n=1 correspond à d=3, n=2 correspond à d=7, n=3 correspond à d=9...
Avec cette notation, on observe que b_d est lié à la modularité par 4 de n. Notons alors les fonctions δ_i suivantes où $i \in \{0, 1, 2, 3\}$:

$$\delta_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n[4], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{7}$$

Bien plus que de simples fonctions binaires, elles permettent de traduire des conditions algébriques portant sur la nature du diviseur. Par la suite, on restera dans le cas général et on notera le vecteur ligne suivant :

$$\delta = (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3) \tag{8}$$

Ainsi, on peut écrire, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$d_n = 10 \cdot \frac{n - n[4]}{4} + d_0 \tag{9}$$

Avec :

$$d_0 = \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} \tag{10}$$

On remarque alors l'expression suivante:

$$d_{n+4} = d_n + 10 \tag{11}$$

Maintenant que l'on a fixé de nouvelles notations, on peut s'intéresser de nouveau à l'expression de q formulée lors de la démonstration 1. On peut remarquer que q existe si et seulement si $dk_{min}+1 = 0[10]$ autrement dit si le produit dk_{min} se termine par le chiffre 9. Cette condition n'est remplie que si :

$$k_{min} = c = \delta \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Il en résulte l'expression suivante

$$q_n = \frac{c.d_n + 1}{10} \tag{13}$$

On remarque alors l'expression équivalente $10q_n - 1 = cd_n$ et, par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}$, d_n divise $10q_n - 1$

Proposition 2: $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$q_n = c\frac{n - n[4]}{4} + q_0 \tag{14}$$

Avec :

$$q_0 = \delta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

démonstration 2: Partons de la relation (13), on a

$$q_n = c\frac{n - n[4]}{4} + q_0$$

Or, d'après (9),

$$d_n = 10 \cdot \frac{n - n[4]}{4} + d_0$$

Donc, il vient,

$$q_n = c\frac{n - n[4]}{4} + \frac{cd_0 + 1}{10}$$

et

$$\frac{cd_0 + 1}{10} = q_0$$

provient de la formule (13) appliquée pour $n = 0$ ce qui confirme la proposition 2

1.2 Equations matricielles

Ainsi, grâce aux relations (5) et (6), on peut désormais écrire le système suivant:

$$\begin{cases} 10a + b = k_m d_n \\ a + q_n b = k_q d_n \end{cases} \tag{S1}$$

En posant $X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, on peut résoudre matriciellement pour en déduire des expressions de a et de b. On en déduit:

$$a = \frac{1}{c}(k_m q_n - k_q) \tag{16}$$

$$b = \frac{1}{c}(10k_q - k_m) \tag{17}$$

Maintenant, intéressons-nous plus particulièrement à la 1ère équation du système (S1). En isolant k_m, on obtient l'expression $k_m = \frac{10a+b}{d_n}$. Il y a donc divisibilité si et seulement si $k_m \in \mathbb{Z}$. A n fixé, il y a donc des conditions à satisfaire sur (a, b) pour qu'il y ait divisibilité. On remarque que, grâce à la relation (13) :

- si (a, b) satisfait l'appartenance alors $(a + kd_n, b)$ la satisfait également.

- si (a, b) satisfait l'appartenance alors $(a - kq_n, b + k)$ la satisfait aussi.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que 0 est divisible par d_n. Par conséquent, il suffit de partir de $(a + b) = (0, 0)$ pour déduire tous les autres couples. On obtient alors le tableau suivant :

d_n	$2d_n$	$3d_n$	...
$d_n - q_n$	$2d_n - q_n$	$3d_n - q_n$	...
$d_n - 2q_n$	$2d_n - 2q_n$	$3d_n - 2q_n$	...
$d_n - 3q_n$	$2d_n - 3q_n$	$3d_n - 3q_n$	...
$d_n - 4q_n$	$2d_n - 4q_n$	$3d_n - 4q_n$	...
$d_n - 5q_n$	$2d_n - 5q_n$	$3d_n - 5q_n$	...
$d_n - 6q_n$	$2d_n - 6q_n$	$3d_n - 6q_n$	...
$d_n - 7q_n$	$2d_n - 7q_n$	$3d_n - 7q_n$	...
$d_n - 8q_n$	$2d_n - 8q_n$	$3d_n - 8q_n$	...
$d_n - 9q_n$	$2d_n - 9q_n$	$3d_n - 9q_n$	...

Table 2: Tableau montrant les différentes valeurs possibles de a

Cette représentation est choisie pour des nombres positifs. Cependant, la condition d'appartenance étant sur $\mathbb{Z}$, on peut très bien continuer le tableau de droite à gauche également.

Cette représentation donne alors naissance à deux axes, un axe que l'on note i, vertical descendant et un axe j horizontal dont le sens positif est pris de gauche à droite. Lorsque l'on parle d'un terme, on fera réference à la ième ligne et la jième colonne. On prendra comme convention que la case contenant d_n sera située sur la 1ère ligne et sur la 1ère colonne (donc à $i = 1$ et $j = 1$). Par conséquent, on obtient:

$$a_{n_{ij}} = jd_n + (1 - i)q_n \tag{18}$$

$$b_{n_{ij}} = b_i = i - 1 \tag{19}$$

On note, pour la suite, ce tableau sous la forme d'une matrice infinie de taille 10x$\mathbb{Z}$ nommée A_n

Proposition 3:

$$k_{m_{ij}} = 10j + (1-i)c \tag{20}$$

démonstration 3: Si $10a+b$ est divisible par d_n, alors on peut écrire $10a_{n_{ij}} + b_i = k_{m_{ij}} d_n$. En utilisant alors les relations (18) et (19), il vient:

$$10jd_n + 10(i-1)q_n + i - 1 = k_{m_{ij}} d_n$$

devenant, avec la relation (13) et en factorisant

$$k_{m_{ij}} = 10j + (1-i)c$$

Avec un raisonnement similaire, on peut montrer que k_q de la seconde équation du système (S1) peut se réécrire de la manière suivante:

$$k_{q_{ij}} = k_{q_j} = j \tag{21}$$

Ces relations sont intéressantes car elles ne dépendent pas de n (à l'exception de la modularité n[4] pour le terme c). De plus, k_q ne dépend pas non plus de i et donc du choix de b d'après la relation précédente. Par conséquent, il est possible de dresser 4 matrices $K_{m_{n[4]}}$ dont une partie de chacune d'entre elles est représentée ci-après.

K_{m_0} est la matrice obtenue pour tous les diviseurs se finissant par 1. Son expression est partiellement établie ici:

$$K_{m_0} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 & 100 \\ 1 & 11 & 21 & 31 & 41 & 51 & 61 & 71 & 81 & 91 \\ -8 & 2 & 12 & 22 & 32 & 42 & 52 & 62 & 72 & 82 \\ -17 & -7 & 3 & 13 & 23 & 33 & 43 & 53 & 63 & 73 \\ -26 & -16 & -6 & 4 & 14 & 24 & 34 & 44 & 54 & 64 \\ -35 & -25 & -15 & -5 & 5 & 15 & 25 & 35 & 45 & 55 \\ -44 & -34 & -24 & -14 & -4 & 6 & 16 & 26 & 36 & 46 \\ -53 & -43 & -33 & -23 & -13 & -3 & 7 & 17 & 27 & 37 \\ -62 & -52 & -42 & -32 & -22 & -12 & -2 & 8 & 18 & 28 \\ -71 & -61 & -51 & -41 & -31 & -21 & -11 & -1 & 9 & 19 \end{bmatrix} \tag{22}$$

K_{m_1} est la matrice obtenue pour tous les diviseurs se finissant par 3. Un extrait de son expression est donnée ci-après:

$$K_{m_1} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 & 100 \\ 7 & 17 & 27 & 37 & 47 & 57 & 67 & 77 & 87 & 97 \\ 4 & 14 & 24 & 34 & 44 & 54 & 64 & 74 & 84 & 94 \\ 1 & 11 & 21 & 31 & 41 & 51 & 61 & 71 & 81 & 91 \\ -2 & 8 & 18 & 28 & 38 & 48 & 58 & 68 & 78 & 88 \\ -5 & 5 & 15 & 25 & 35 & 45 & 55 & 65 & 75 & 85 \\ -8 & 2 & 12 & 22 & 32 & 42 & 52 & 62 & 72 & 82 \\ -11 & -1 & 9 & 19 & 29 & 39 & 49 & 59 & 69 & 79 \\ -14 & -4 & 6 & 16 & 26 & 36 & 46 & 56 & 66 & 76 \\ -17 & -7 & 3 & 13 & 23 & 33 & 43 & 53 & 63 & 73 \end{bmatrix} \tag{23}$$

K_{m_2} est la matrice obtenue pour tous les diviseurs se finissant par 7. Une partie de sa représentation est notée :

$$K_{m_2} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 & 100 \\ 3 & 13 & 23 & 33 & 43 & 53 & 63 & 73 & 83 & 93 \\ -4 & 6 & 16 & 26 & 36 & 46 & 56 & 66 & 76 & 86 \\ -11 & -1 & 9 & 19 & 29 & 39 & 49 & 59 & 69 & 79 \\ -18 & -8 & 2 & 12 & 22 & 32 & 42 & 52 & 62 & 72 \\ -25 & -15 & -5 & 5 & 15 & 25 & 35 & 45 & 55 & 65 \\ -32 & -22 & -12 & -2 & 8 & 18 & 28 & 38 & 48 & 58 \\ -39 & -29 & -19 & -9 & 1 & 11 & 21 & 31 & 41 & 51 \\ -46 & -36 & -26 & -16 & -6 & 4 & 14 & 24 & 34 & 44 \\ -53 & -43 & -33 & -23 & -13 & -3 & 7 & 17 & 27 & 37 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Enfin, K_{m_3} est la matrice obtenue pour tous les diviseurs se finissant par 9. Voici une partie de son expression :

$$K_{m_3} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 & 100 \\ 9 & 19 & 29 & 39 & 49 & 59 & 69 & 79 & 89 & 99 \\ 8 & 18 & 28 & 38 & 48 & 58 & 68 & 78 & 88 & 98 \\ 7 & 17 & 27 & 37 & 47 & 57 & 67 & 77 & 87 & 97 \\ 6 & 16 & 26 & 36 & 46 & 56 & 66 & 76 & 86 & 96 \\ 5 & 15 & 25 & 35 & 45 & 55 & 65 & 75 & 85 & 95 \\ 4 & 14 & 24 & 34 & 44 & 54 & 64 & 74 & 84 & 94 \\ 3 & 13 & 23 & 33 & 43 & 53 & 63 & 73 & 83 & 93 \\ 2 & 12 & 22 & 32 & 42 & 52 & 62 & 72 & 82 & 92 \\ 1 & 11 & 21 & 31 & 41 & 51 & 61 & 71 & 81 & 91 \end{bmatrix} \tag{25}$$

On notera alors, pour rester dans le cas général,

$$K_m = \delta_0 K_{m_0} + \delta_1 K_{m_1} + \delta_2 K_{m_2} + \delta_3 K_{m_3} \tag{26}$$

D'après la relation (21), il ne suffit que d'une seule matrice, notée J, permettant d'écrire la relation (6) sous forme matricielle:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Il ne nous reste plus qu'à considérer une matrice pour représenter B. En utilisant la relation (19), notons :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Nous pouvons alors réécrire ces équations sous forme matricielle. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$10A_n + B = d_n K_m \tag{29}$$

$$A_n + q_n B = d_n J \tag{30}$$

Et donc, pour un n donné, visualiser tous les entiers m divisibles par d_n en écrivant

$$M_n = 10A_n + B \tag{31}$$

<u>Proposition 4</u>: Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \frac{n - n[4]}{4} K_m + A \tag{32}$$

avec

$$A = \delta_0 A_0 + \delta_1 A_1 + \delta_2 A_2 + \delta_3 A_3 \tag{33}$$

démonstration 4: Initialisation : Évident pour n=0, n=1, n=2, n=3

Hérédité : Supposons qu'il existe un n dans $\mathbb{N}$ pour lequel cette relation est vraie. Montrons alors que la relation est vraie pour $n + 4$.
En utilisant la relation (18), on peut écrire :

$$a_{n+4_{ij}} = jd_{n+4} + (1 - i)q_{n+4}$$

qui, avec (11), permet d'établir

$$a_{n+4_{ij}} = 10j + jd_n + (1 - i)q_n + (1 - i)c$$

On obtient, avec (18) et (20)

$$a_{n+4_{ij}} = a_{n_{ij}} + k_{m_{ij}}$$

Ce qui , en utilisant l'hypothèse de récurrence, permet d'achever la démonstration

Par conséquent, en utilisant cette dernière expression de A_n dans la relation (29), on obtient une nouvelle expression pour K_m

$$K_m = \frac{1}{d_0}(10A + B) \tag{34}$$

Cela prouve bien que K_m est une matrice qui ne dépend que de la modularité de n par 4.

1.3 Vers une approche géométrique

Considérons désormais que $n \in \mathbb{Z}$. On aurait alors, via la relation (11),

$d_{-1} = -1$,

$d_{-2} = -3$

$d_{-3} = -7$,

$d_{-4} = -9$ etc

On remarque alors une certaine inversion due à l'utilisation de (11) et des nombres négatifs. Cette nouvelle définition de n implique inévitablement que $p \in \mathbb{Z}$ (cf table 1). On rappelle ici le changement de variable existant entre n et p :

$$p = \frac{n + n[4]}{4} \tag{35}$$

De plus, la relation (32) n'est rien d'autre que la définition du terme général d'une suite arithmétique matricielle définie. comme suit :

$$\begin{cases} A_{p+1} = A_p + K_m \\ A_0 = A \end{cases} \tag{S2}$$

De cela, vient alors l'idée de représenter graphiquement les matrices A_p le long d'un axe p. Pour obtenir la matrice p+1, il suffirait alors d'additionner la matrice présente à la position p par la matrice K_m.

On obtient alors le rendu suivant:

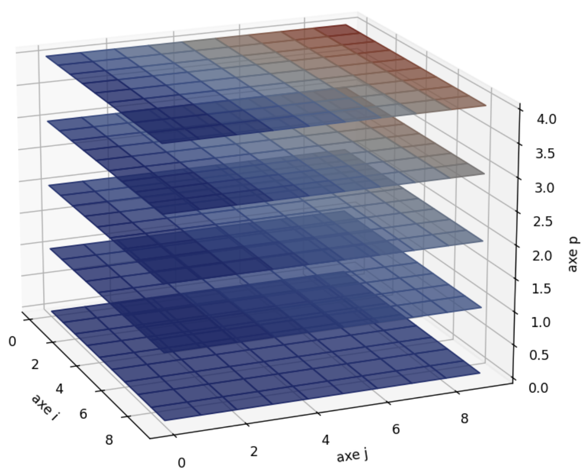

Figure 1: Représentation des matrices A_p le long de l'axe p avec p allant de 0 à 4. Les cases plus rouges représentent un coefficient $a_{p_{ij}}$ élevé

Cet empilement est donc infini car $p \in \mathbb{Z}$. On se retrouve avec une véritable tour de matrices A_p empilées les unes sur les autres. En reprenant, cette fois-ci, la relation (34), on peut écrire une relation équivalente étant :

$$A - \frac{d_0}{10} K_m = -\frac{1}{10} B \tag{36}$$

Nous savons qu'il faut additionner 1 à p pour obtenir la matrice A_{p+1}. Inversement, on peut soustraire 1 pour obtenir A_{p-1}. Plus généralement, additionner un nombre $k \in \mathbb{Z}$ permet d'obtenir A_{p+k}. Dans ce cas, l'équation précédente permet d'obtenir l'emplacement de la matrice $-\frac{1}{10}B$ sur l'axe p. Comme A est en p=0, celle-ci serait donc située en $p = -\frac{d_0}{10}$. Or, $p \in \mathbb{Z}$ ce qui nous oblige donc à changer une nouvelle fois la définition pour $p \in \mathbb{Q}$ afin de lever l'absurdité.

Cependant, en optant pour cette définition de p, l'ensemble D n'est plus valable. On considérera alors l'ensemble $D_{\mathbb{Q}}$ suivant, où $D \subset D_{\mathbb{Q}}$:

$$D_{\mathbb{Q}} = \{10p + d_0 / p \in \mathbb{Q}\} \tag{37}$$

Avec, $d_p \in D_{\mathbb{Q}}$ signifiant que d_p s'exprime sous la forme :

$$d_p = 10p + d_0 \tag{38}$$

Enfin, les nombres q_p relatifs aux d_p conservent leurs définitions mais la proposition 1 ne reste valide que sur D.

$$q_p = cp + q_0 \tag{39}$$

Nous obtenons toute une infinité de nouvelles matrices A_p, dont les termes sont définis, pour une condition delta fixée, par:

$$a_{p_{ij}} = pk_{m_ij} + a_{ij} \tag{40}$$

dont il est possible de retrouver q_p ,via la relation (18), en soustrayant un terme d'une colonne j par le terme de la colonne j immédiatement situé en-dessous de celui-ci, ou encore:

$$q_p = a_{p_{ij}} - a_{p_{i+1j}} \tag{41}$$

Jusqu'à maintenant, on utilisait d_p par abus de langage mais la bonne notation est $d(p)$ car il s'agit de la fonction d définie sur $D_{\mathbb{Q}}$. De même pour $q(p)$ ou bien pour $a_{ij}(p)$. Traçons, dans ce cas, les fonctions $d(p)$ et $q(p)$ dans toutes les conditions:

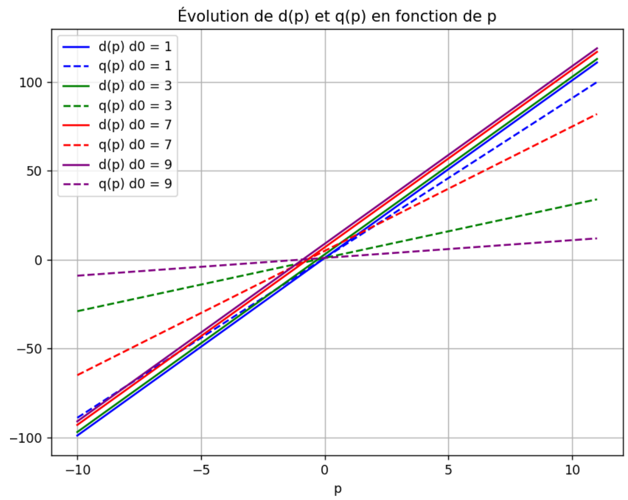

Figure 2: Evolution de q et de d en fonction de p

Ici, les valeurs de p sont représentées sur un axe semblant réel pour des simplicités informatiques mais nous ne tiendrons compte que des valeurs relatives de p

Pour chaque condition, les droites se coupent en un unique p obtenu avec la relation:

$$p_{inter} = \frac{q_0 - d_0}{10 - c} \tag{42}$$

Il s'agit d'un point spécial, unique pour chaque condition, pour lequel $d_{inter} = q_{inter}$. D'ailleurs, les relations (6) et (19) entraînent l'équation suivante permettant d'obtenir des matrices antisymétriques:

$$a_{inter} = (j - i + 1)d_{inter} \tag{43}$$

Voici ci-après les valeurs obtenues pour chacune des conditions:

	δ_0	δ_1	δ_2	δ_3
p_{inter}	0	-0.286	-0.667	-0.889
q_{inter}	1	0.143	0.333	0.111
d_{inter}	1	0.143	0.333	0.111

Table 3: Tableau résumant, en valeur arrondie au millième, les valeurs de p_{inter}, q_{inter} et d_{inter}

On peut alors remarquer qu'à l'exception de δ_1, les trois autres conditions satisfont l'équation :

$$p_{inter} + q_{inter} = 1 \tag{44}$$

Si l'on considère de nouveau les axes de la figure 2 et que l'on nomme respectivement les points du tableau 3, P_0, P_1, P_2 et P_3, alors, cette équation (44) a pour incidence d'aligner les points P_0, P_2 et P_3. La figure résultante, si l'on relie tous ces points deux à deux, n'est rien d'autre que deux triangles ayant le segment P_2P_3 en commun (voir figure 3).

Nous cherchons alors un point sur lequel s'appuyer, qui aurait un lien avec toutes ces conditions. Pour cela, traçons le cercle pour chacun de ces triangles. Nous obtenons alors de nouveaux points étant les centres de chacun des cercles circonscrits obtenus. Le point recherché est donc le centre du cercle circonscrit du nouveau triangle obtenu.

Les centres de tous les cercles circonscrits obtenus sont donnés dans le tableau ci-après:

	$P_0P_1P_3$	$P_0P_1P_2$	$P_1P_2P_3$	**Triangle résultant**
abscisse	-0.620	-0.286	-0.582	-0.551
ordonnée	0.731	0.619	0.026	0.381

Table 4: Tableau résumant, en valeur arrondie au millième, les coordonnées des centres des cercles circonscrits obtenus

De plus, en allant un peu plus loin, on peut relever les intersections entre deux conditions delta différentes. Si on les regroupe dans un tableau, voici ce que l'on obtient:

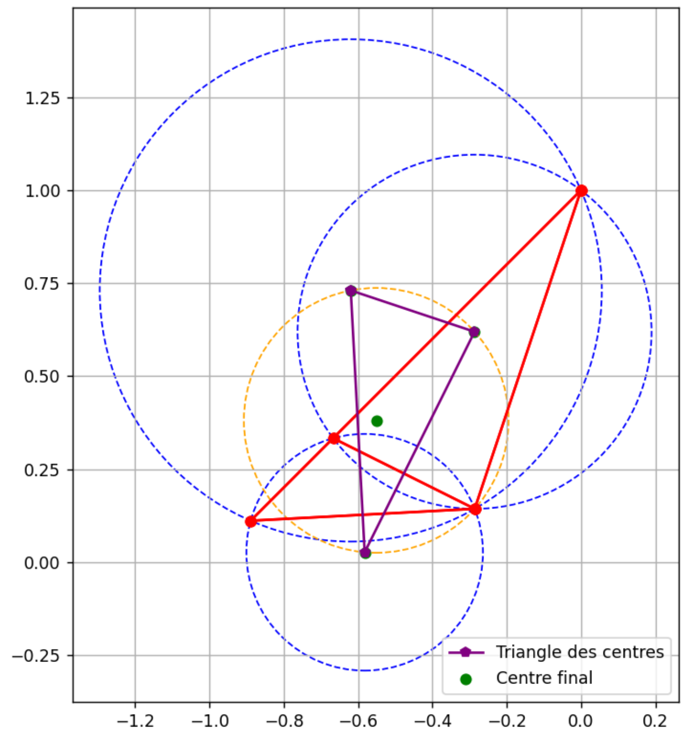

Figure 3: Construction géométrique pour obtenir un centre qui serait commun à toute condition δ

	δ_0	δ_1	δ_2	δ_3
δ_0	(0,1)	(0,1)	(1.33,14.33)	(0,1)
δ_1	(-2,-17)	(-0.29,0.14)	(0.67,9.67)	(-0.22,0.78)
δ_2	(-6,-53)	(-0.86,-1.57)	(-0.67,0.33)	(-0.67,0.33)
δ_3	(-8,-71)	(-1.14,-2.43)	(-1.33,-4.33)	(-0.89,0.11)

Table 5: Tableau résumant, en valeur arrondie au centième, les coordonnées des intersections obtenues entre d(p) et q(p) selon les différentes conditions

On notera le point d'intersection entre la droite d(p) de la condition δ_i (lignes) et q(p) de la condition δ_j (colonne) P_{ij} . Ainsi, on peut remarquer plusieurs éléments intéressants :

1. P_{00},P_{01} et P_{03} sont confondus
2. P_{22} et P_{23} sont confondus
3. Toutes les coordonnées de la colonne δ_0 sont relatives. Cela est du au dénominateur de la formule (42).