计数

- 本篇侧重于生成函数方向的计数，不过知识点上是由易到难的（大概
- 一些基础科技内容不会详细提及

组合数

计数里面最基本的部分

1.定义

排列：从n个物品中选出m个来，且考虑顺序，方案数记为A_n^m

组合：从n个物品中选出m个来，不考虑顺序，方案数记为C_n^m，又可记作$\binom{n}{m}$

（由于在计数题中出现的基本为组合，所以本文内容主要关于组合问题）

2.计算

$$A_n^m = n^{\underline{m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

同时，C_n^m也可通过公式$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$来计算，证明：考虑分是否选择第$n$个来计算。这也是我们的杨辉三角的递推公式，但由于复杂度较大，所以这个公式实际并不常用

3.一些简单的技巧

(1)多重集合

当$\sum n_i = n$时，有$\prod \binom{n}{n_i} = \frac{n}{\prod n_i!}$

证明：拆开就可以了

(2)范德蒙卷积

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

证明：考虑组合意义，实际就等价于在$n+m$个数中选出k个数的方案数，即$\binom{n+m}{k}$

(3)插板法

把n个相同的球分为m个不同的组，每组内至少有一个球，方案数为$\binom{n-1}{m-1}$

若每组内可以没有球，则方案数为$\binom{n+m-1}{m-1}$

(4)求一列组合数的和

$\sum_{i=n}^{m}\binom{i}{n}=\binom{m+1}{n+1}$

证明：仍然考虑组合意义，我们不妨令$\binom{i}{n}$表示在前i个球中任选n个，然后强制在第$i+1$个位置放一个球的方案，那么这个求和式的组合意义相当于是统计第$n+1$个球（也就是最后一个球）选择的是第$n+1\sim m+1$中每个位置的方案和，这也就是在$m+1$个球中任选$n+1$个球的方案数

4.二项式定理

(1)普通幂

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$$

特别的，当$a=b=1$时，有$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$

当$a=1$时，考虑到组合数的形式，有生成函数$F(x)=\sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}x^i=(1+x)^n$

由此还能得出多项式定理：

$$(a_1+a_2+\ldots+a_m)^n=\sum\frac{n!}{\prod n_i!}\prod a_i^{n_i}$$

(2)上升/下降幂

$$(a+b)^{\underline{n}}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{\underline{i}}b^{\underline{n-i}}$$

$$(a+b)^{\overline{n}}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{\overline{i}}b^{\overline{n-i}}$$

只证明第一条

$$(a+b)^{\underline{n}}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{\underline{i}}b^{\underline{n-i}}$$
$$\frac{(a+b)^{\underline{n}}}{n!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{a^{\underline{i}}b^{\underline{n-i}}}{i!(n-i)!}$$
$$\binom{a+b}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{a}{i}\binom{b}{n-i}$$

也就是上文的范德蒙卷积

5.广义二项式定理

我们定义牛顿二项式系数为$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}$，其中$n \in R$，$m$为自然数

那么有：（注意a, b, m为实数，且$|\frac{a}{b}| < 1$）

$$(a+b)^m = \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{m}{i} a^i b^{m-i}$$

其中，特殊的有（$m < 0$）

$$(1+x)^m = \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{m}{i} x^i$$

$$\begin{aligned}(1-x)^m &= \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{m}{i} (-x)^i \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{m^{\underline{i}}}{i!} x^i \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^{2i} \frac{(i-m-1)^{\underline{i}}}{i!} x^i \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(i-m-1)^{\underline{i}}}{i!} x^i\end{aligned}$$

6.k维差分与前缀和

给出一个长度为n的序列a，求它的k阶差分或k阶后缀和，对$p = 998244353$取模

其中$k \le 10^{23333}$

我们不妨把a看成一个多项式$F(x) = \sum a_i x^i$

那么求其一阶的前缀和的一个方法是，我们将$F(x)$卷上一个多项式$G(x) = \frac{1}{1-x}$

我们现在要求出$\frac{1}{(1-x)^k}$，不妨考虑将其写成$(1-x)^{-k}$的形式，由广义二项式定理可知道其为

$$(1-x)^{-k} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(i+k-1)^{\underline{i}}}{i!} x^i$$

然后卷就好了

现在要求k阶差分

同样的，我们有$G(x) = 1-x$，差分直接$F(x) \cdot G(x)$就好了

那么k阶即为

$$G^k(x) = (1-x)^k = \sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i \frac{k^{\underline{i}}}{i!} x^i$$

这个就是一个简单的二项式定理，然后中间$\frac{k^{\underline{i}}}{i}$那一项直接递推即可，那么$k$就可以直接 $\bmod p$了

7. $\binom{2n}{n}$

这是一个经典的数列，有一个简洁的生成函数形式

我们可以求出$\binom{n-\frac{1}{2}}{n}$的值

那么考虑这样一个东西$n^{\underline{n}}(n-\frac{1}{2})^{\underline{n}}$，我们给每一项都$\times 2$来拉大间隙，那么就等于$\frac{2n^{\underline{2n}}}{2^{2n}}$

也就是说

$$n^{\underline{n}}(n-\frac{1}{2})^{\underline{n}} = \frac{2n^{\underline{2n}}}{2^{2n}}$$

两边同时除以$(n!)^2$有

$$2^{2n} \times \binom{n-\frac{1}{2}}{n} = \binom{2n}{n}$$
$$(-4)^n \times \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \binom{2n}{n}$$

那么写成生产函数形式有

$$\begin{aligned}\sum_{i=0} \binom{2i}{i} x^i &= \sum_{i=0} (-4)^i \times \binom{-\frac{1}{2}}{i} x^i \\ &= \sum_{i=0} \binom{-\frac{1}{2}}{i} (-4x)^i\end{aligned}$$

运用广义二项式定理可得其等于$(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$

8.组合数构造卷积

$$i(n-i) = \binom{n}{2} - \binom{i}{2} - \binom{n-i}{2}$$
$$ij = \binom{i+j}{2} - \binom{i}{2} - \binom{j}{2}$$

对于出现幂上的乘积时，可以用这个技巧构造卷积

例:

【P6800】Chirp Z-Transform

给定一个n项多项式$P(x)$以及c,m请计算$P(c^0),P(c^1),P(c^2)\cdots,P(c^{m-1})$

对998244353取模

$1 \le n,m \le 10^6$

我们直接应用上面第二条柿子

$$
\begin{aligned}
P(c^t) &= \sum_{i=0}^{n-1} p_i c^{it} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} p_i c^{\binom{i+t}{2}-\binom{i}{2}-\binom{t}{2}} \\
&= c^{-\binom{t}{2}} \sum_{i=0}^{n-1} p_i c^{\binom{i+t}{2}-\binom{i}{2}}
\end{aligned}
$$

可以观察到后面是一个差卷积的形式，于是就做完了

二项式反演

由于去年的课件中各类反演都很齐全，所以这里就只对二项式反演做一些补充

1.反演推论

反演指的是两个函数之间的双向关系，如差分和前缀和

现在我们有一个关系矩阵A，以及两个函数f, g

同时$f = A * g$，即$f(n) = \sum_{i=0}^{n} A_{n,i} g(i)$

我们现在想要从f推出g

不难想到就是两边乘上A^{-1}

也就是说，反演关系中的两个矩阵互逆

由于一对互逆的矩阵转置后仍然互逆，我们可以得到反演的种种变形

2.二项式反演

(1)壹之型

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} g(i) \\
g(n) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} f(i)
\end{aligned}
$$

这里的关系矩阵$A_{n,i} = (-1)^i \binom{n}{i}$

可以使用代数证明，即证明$A * A = I$

也可以把上式移至下式（没错，其实是一样的

$$
\begin{aligned}
g(n) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}g(j) \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j g(j)\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^i \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j g(j)\sum_{i=j}^{n}\frac{n!i!(n-j)!}{i!(n-i)!j!(i-j)!(n-j)!}(-1)^i \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j g(j)\sum_{i=j}^{n}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}(-1)^i \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}g(j)\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^i \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}g(j)\sum_{i=0}^{n-j}\binom{n-j}{i}(-1)^{i+j} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}g(j)(1-1)^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}g(j)[n-j=0] \\
&= g(n)
\end{aligned}
$$

上面把组合数拆开，然后加入阶乘重新变形也是常用技巧

(2)贰之型

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}g(i) \\
g(n) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f(i)
\end{aligned}
$$

其实就是把$(-1)^i$和$g(i)$合并了

这个也就是经典容斥（可以想想错排数）

(3)叁之型

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{i=n}\binom{i}{n}g(i) \\
g(n) &= \sum_{i=n}(-1)^{i-n}\binom{i}{n}f(i)
\end{aligned}
$$

我们转置上面贰之型的矩阵，就能得到了

这个柿子主要的意义在于它优美的组合意义（从这个角度你也可以组合意义证明）：

$f(n)$表示至少n个，$g(n)$表示恰好n个

(4)肆之型

$$f(n)=\sum_{i=n}(-1)^i\binom{i}{n}g(i)$$
$$g(n)=\sum_{i=n}(-1)^i\binom{i}{n}f(i)$$

同理移动了$(-1)^i$

那么关于二项式反演的计算，展开来都可以观察到卷积形式，然后NTT加速

例：

【LOJ6503】Magic

有m种颜色，每种颜色有a_i个球（本质相同），一共n个球

求本质不同的n个球的排列数：满足相邻两个球颜色相同的位置恰好k个

对998244353取模

$1\le n\le 10^5, 1\le m\le 2*10^4$

样例

```
3 5 1
2 2 1
```

```
12
(AABCB ABBAC ABBCA...)
```

我们可以算出至少i个，然后再反演得到恰好k个

对应叁之型

于是枚举每个颜色形成多少个连续段

形成i个连续段的方案数是$\binom{a-1}{i-1}$，对应$a-i$个位置

于是写出生成函数（EGF）

$$\prod_{i=1}^m\sum_{j=1}^{a_i}\frac{\binom{a_i-1}{j-1}x^j}{j!}$$

于是最终$[x^i]$对应$n-i$个位置

我们有许多计算方式

1.直接分治NTT

每一层的总复杂度是$O(n\log n)$的，所以总复杂度就是$O(n\log^2 n)$的

2.用堆维护，每次找出长度最小的两个合并

这个跟哈夫曼树很像，可以自行查阅，也是$O(n\log^2 n)$的复杂度

3.多维反演

事实上，任何几种反演关系都可以组合起来，得到多维反演

证明比较简单（用矩阵角度），不再阐述

错排数

与置换、环等问题有着紧密联系的数列

1.递推

对于n个数的排列p，$\forall i \in [1, n], p_i \neq i$的$p$的个数叫错排数

那么我们可以轻松得到递推关系

$$f_n = (n-1)(f_{n-1} + f_{n-2})$$

即要么跟一个错位的数换位置，要么跟一个在自己位置上的数换位置

2.生成函数形式

可以发现，错排就是大小$\geq$ 2的置换的集合

于是我们可以得到其EGF

$$e^{-\ln(1-x)-x}$$

3.环

对于给定的排列p，每次可以交换两个数，求把这个排列变为升序的最小交换次数

可以这样考虑：

一次交换即在一个置换环上拆一条边，拆散一个环即交换环长减一次

于是有

$$ans = \sum_C len(C) - 1 = n - S(C)$$

$S(C)$即环的个数，注意自环也算

关于这一内容的题目，详见莫队去年出的【JZOJ7345】

卡特兰数

卡特兰数有多少种组合意义，你都知道吗？

1.生成函数形式

卡特兰数可以表示n个数的二叉树个数

于是有$C(x)=1+C(x)xC(x)$

即要么为空，要么由左儿子，根，右儿子组成

于是有

$$C(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

2.通项

可以展开$\sqrt{1-4x}$

$$\begin{aligned}C(x)&=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\\&=\frac{1-\sum_{i=0}^{+\infty}\binom{\frac{1}{2}}{i}(-4x)^i}{2x}\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}C[n]&=-\frac{\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-4)^{n+1}}{2}\\&=-\frac{(-4)^{n+1}\prod_{i=0}^{n}\frac{1-2i}{2}}{2(n+1)!}\\&=-\frac{2^n\prod_{i=0}^{n}(2i-1)}{(n+1)!}\\&=\frac{2^n\prod_{i=1}^{n}(2i-1)}{(n+1)!}\\&=\frac{2^n(2n)!}{(n+1)!\prod_{i=1}^{n}2i}\\&=\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}\end{aligned}$$

3.递推

(1)形式一

其实等价于二叉树的组合意义

$$C[0]=1,C[n]=\sum_{i=0}^{n-1}C[i]C[n-i-1]$$

(2)形式二

利用通项公式，有

$$\begin{aligned}C[n+1] &= \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{n+2} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)\binom{2n}{n}}{(n+1)^2(n+2)} \\ &= \frac{4n+2}{n+2}C[n]\end{aligned}$$

4.格路计数

请出我们今天的主角

(1)格路计数壹之型

在平面直角坐标系上，一个点初始位置在原点

令其坐标为(x,y)，每次可以走到$(x+1,y+1)$或$(x+1,y-1)$

问在$y\in[0,+\infty]$的情况下走到$(2n,0)$的方案数

我们考虑折线法

假设没有限制，那么就是在$2n$步中选出n步向右上，即$\binom{2n}{n}$

考虑加入限制，将第一次跨过x轴的位置以后的路径沿$y=-1$翻折，这一部分就是要减去的答案，即$\binom{2n}{n-1}$

也就是$C[n]=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$

这里同时涉及了另一种组合意义：合法括号序列计数

(2)格路计数贰之型

在平面直角坐标系上，一个点初始位置在原点

令其坐标为(x,y)，每次可以走到$(x+1,y+1)$或$(x+1,y-1)$

问在$y\in[0,m]$的情况下走到(n,a)的方案数

同样考虑折线法

对于跨过x轴的，我们沿$y=-1$翻折，对于跨过$y=m$的，我们沿$y=m+1$翻折

但是可以发现，一条路径可能同时跨过这两条线，

于是我们交替翻折，容斥就能得到答案，这个过程也叫反射容斥

那么，如果是对于一整列所有的情况都要算的话就可以平衡规划做到$O(n\sqrt{n})$

而若是单独求$(2n,0)$，就可以变成单位根反演

$$\sum_{i=0}^{2n}([i\equiv n\ (mod\ m)]-[i\equiv n-1\ (mod\ m)])\binom{2n}{i}$$

这个是由于翻折对m的余数的改变而整理出来的

(3)格路计数叁之型

在平面直角坐标系上，一个点初始位置在原点

令其坐标为(x,y)，每次可以走到$(x+1,y+1)$或$(x+1,y-1)$或$(x+1,y)$

问在$y\in[0,m]$的情况下走到$(n,0)$的方案数，$1\le n\le 10^7$

由于容斥实际上在求无限制情况下走到一个点的方案数

那么我们把无限制情况下，走到最后一列所有位置的方案数求出来，然后再容斥就能算了

于是乎就变成了算$(x^{-1}+1+x)^n$，ODE求解即可

实际上，上述几种形式本质上都是常系数其次线性递推，所以可以做更大的数据范围，这里就不展开了

斯特林数

这是极为重要的一类特殊计数序列，在涉及幂、集合、排列有关问题的推导时都有巨大用处

1.第一类斯特林数

设$s(n,m)$表示把n个互不相同的元素划分成互不区分的m个圆排列的方案数

有

$$s(n,m)=s(n-1,m-1)+(n-1)s(n-1,m)$$

(1)置换

$$\sum_{i=1}^{n}s(n,i)=n!$$

n个数的置换恰好有$n!$个，于是证得

(2)一个排列问题

n个数的排列，其中前缀最大值的个数恰好为k的排列数为

$$s(n,k)$$

可以这样分析：

我们先将数划分成k组，然后将它们按各组中的最大值排序

然后组内可以看成是钦定一个位置的排列（即最大值的位置），也就是环排列，故证得

(3)上升幂

$$x^{\overline{n}}=\sum_{i=0}^{n}s(n,i)x^i$$

归纳证明:

当$n=0$时，显然成立

同时有

$$\begin{aligned}x^{\overline{n+1}}&=(x+n)\cdot x^{\overline{n}}\\&=(x+n)\sum_{i=0}^{n}s(n,i)x^i\\&=\sum_{i=0}^{n}s(n,i)x^{i+1}+\sum_{i=0}^{n}ns(n,i)x^i\\&=\sum_{i=1}^{n+1}s(n,i-1)x^i+\sum_{i=0}^{n}ns(n,i)x^i\\&=\sum_{i=0}^{n+1}s(n+1,i)x^i\end{aligned}$$

(4)下降幂

$$x^{\underline{n}}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}s(n,i)x^i$$

结合上一条结论，运用$x^{\underline{n}}=(-1)^n(-x)^{\overline{n}}$即可

2.第二类斯特林数

设$S(n,m)$表示把n个互不相同的元素划分成互不区分的m个集合的方案数

有

$$S(n,m)=S(n-1,m-1)+mS(n-1,m)$$

(1)通项公式

$$S(n,m)=\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^{m-i}i^n}{i!(m-i)!}$$

考虑容斥

如果没有集合非空的限制，可以认为是m^n

那么我们枚举空集合的数量，最后因为集合互不区分，再除掉一个$m!$即可

(2)普通幂

$$x^n=\sum_{i=0}^{n}S(n,i)x^{\underline{i}}$$

可以组合意义

给n个有标号小球用x种颜色染色，就是x^n

可以考虑先将小球分成i个集合，然后每个集合染一种颜色，即$S(n,i)\binom{x}{i}i!$

由于第二类斯特林数中集合不区分，再乘回一个$i!$

3.斯特林数的四种求法

(1)行·第一类斯特林数

观察

$$x^{\overline{n}}=\sum_{i=0}^{n}s(n,i)x^i$$

那么要求的就是$x^{\overline{n}}$

考虑到$x^{\overline{2n}}=(x+n)^{\overline{n}}x^{\overline{n}}$

可以倍增FFT

(2)列·第一类斯特林数

考虑它的EGF

一个环为$-\ln(1-x)$

那么n个环为

$$\frac{(-\ln(1-x))^n}{n!}$$

(3)行·第二类斯特林数

可以用通项公式

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{(-1)^{m-i}i^n}{i!(m-i)!}$$

观察到这是卷积形式，于是直接做完了

(4)列·第二类斯特林数

同样考虑EGF

一个非空集合是e^x-1

那么n个集合就是

$$\frac{(e^x-1)^n}{n!}$$

4.斯特林反演

基本柿子

$$f[n]=\sum_{i=0}^{n}S(n,i)g[i]\iff g[n]=\sum_{i=0}^{n}s(n,i)(-1)^{n-i}f[i]$$

证明如下：

令$F(x)$为f的EGF，$G(x)$为g的EGF

$$\begin{aligned}
F(x)&=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{f[i]x^i}{i!}\\
&=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^i}{i!}\sum_{j=0}^{i}S(i,j)g[j]\\
&=\sum_{j=0}^{+\infty}g[j]\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^iS(i,j)}{i!}\\
&=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{g[j](e^x-1)^j}{j!}\\
&=G(e^x-1)\\
G(x)&=F(\ln(1+x))\\
&=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{f[i](\ln(1+x))^i}{i!}\\
&=\sum_{i=0}^{+\infty}f[i](-1)^i\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{s(j,i)(-x)^j}{j!}\\
&=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{x^j}{j!}\sum_{i=0}^{j}S(j,i)(-1)^{j-i}f[i]
\end{aligned}$$

第四步和倒数第二步运用了一列的EGF

其它形式可以类比二项式反演得到

那么幂的转换我们也可以用这种方式轻松得到了

例1：

【清华集训2016】如何优雅地求和

典中典，不讲了，建议推一推线性做法锻炼一下

例2：

【CF961G】Partitions

给出n个物品，每个物品有一个权值w_i，定义一个集合S的权值$W(S)=|S|\sum\limits_{x\in S}w_x$

定义一个划分的权值为$W'(R)=\sum\limits_{S\in R}W(S)$

求将n个物品划分成k个集合的所有方案的权值和，答案对10^9+7取模。

$1\le n,k\le 2*10^5$

首先可以发现，答案一定有个$\sum w_i$做因子，可以通过思考每个数单独的贡献得出

于是答案可写成$c\sum w_i$

于是我们转化成求c，也就是每个数贡献的常数

(1)Sol1

$$c=\sum_{i=1}^{n} i\binom{n-1}{i-1}S(n-i,k-1)$$

然后可以MTT，不必多说

(2)Sol2

大力推上面的柿子直到不需要MTT为止，留作练习

(3)Sol3

考虑组合意义

对于一个数来说，贡献的系数相当于它和所在集合里所有的数配对，每次配对一个就$+1$

那么第一种情况是和自己配对，在所有的情况下都成立，即$S(n,k)$

第二种是和别的数配对，即$(n-1)S(n-1,k)$，于是用通项公式计算斯特林数就可以了

伯努利数

一个简洁有力的处理自然数幂和的工具

1.基本形式

这里用的是cmd给出的非经典伯努利数

不过笔者在使用中发现这样更简洁，所以借此安利一下

我们考虑自然数幂和的EGF

即

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} i^k &= k![x^k]\sum_{i=0}^{n-1} e^{ix}\\ &= k![x^k]\frac{e^{nx}-1}{e^x-1}\\ &= k![x^k]\frac{e^{nx}-1}{x}\frac{x}{e^x-1}\end{aligned}$$

最后面的部分$\frac{x}{e^x-1}$就是伯努利数，因为求逆的需要，我们才给了一个x上去

于是用这个卷积形式推下去

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^k = k!\sum_{i=0}^{k}\frac{n^{i+1}B_{k-i}}{(i+1)!}$$

可以发现，在多个k的情况下，伯努利数可以在一次卷积内完成计算

2.递推

我们令$n=1$，$k>0$，特别地，$B_0=1$

于是有

$$0=\sum_{i=0}^{k}\frac{B_{k-i}}{(i+1)!}$$
$$B_k=-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{B_i}{(k-i+1)!}$$

分拆数

由于出现还算频繁，所以也是很重要的一类计数序列呢

1.生成函数

我们定义一个数的拆分数为，将这个数用正整数拆分的不同集合的个数

即：$1+2+3$和$1+3+2$视为同一种

你也可以理解为$MSET(\mathbb{N}^+)$

那么枚举每个数选多少次，可以得到

$$\prod_{i=1}\frac{1}{1-x^i}$$

2.爆算

即先取$\ln$再$\exp$

比较通用，缺点是模数不是NTT模数时会比较痛苦

3.五边形数定理

我们可以利用五边形数定理

这个定理由欧拉给出：

$$\prod_{i=1}(1-x^i)=1+\sum_{i=1}(-1)^i x^{\frac{i(3i\pm1)}{2}}$$

具体的证明有些复杂，可以自行查阅

这里给出一个参考：[五边形数定理的一种证明]

有了这个定理，就可以发现有用的项只有$O(\sqrt{n})$个，于是我们可以$O(n\sqrt{n})$暴力求逆计算

4.Ferrers图

如$10=1+3+6$

其对应的$Ferrers$图为

■ ■ ■ ■ ■ ■

■ ■ ■

■

即从大到小排列

有了这个图我们可以做很多问题

(1)限制拆分个数

我们将一个$Ferrers$图翻转，可以得到另一个$Ferrers$图

如上图变为

■ ■ ■

■ ■

■ ■

■

■

■

记$F_{n,m}$为将n拆分为不超过m个数的方案数

那么$F_{n,m}$就等价于用大小不超过m的数进行拆分

例：

【P5824】十二重计数法

留作练习

(2)每个数至多选一个

给出一个$Ferrers$图（这里是竖着放的）

■ ■ ■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■

■ ■ ■

■ ■

■

■

我们找到最大的45°三角，设长度为h（这里就为6）

删掉之后就会变成

■ ■ ■ ■

■

于是就变成了（横着看）大小不超过h的$Ferrers$图

于是有

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x^i)=\sum_{h=1}^{+\infty}x^{\frac{h(h+1)}{2}}\prod_{i=1}^{h}\frac{1}{1-x^i}$$

我们还可以对此扩展

$$\prod_{i=k+1}^{n}(1+x^i)=\sum_{h=1}^{+\infty}x^{kh}\cdot x^{\frac{h(h+1)}{2}}\prod_{i=1}^{h}\frac{1}{1-x^i}$$

(3)分拆数的第三种计算方式

结合以上两种我们可以得到El给出的第三种计算方式

■ ■ ■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■

■ ■ ■ ■

■ ■ ■

■ ■

■

■

还是这个图

我们从原点引$y=-x$的直线

可以得到一个正方形，设大小为h（这里就是4）

删去正方形后，由翻转的性质，剩下的就是两个大小不超过h的整数拆分

于是

$$\prod_{i=1}\frac{1}{1-x^i}=\sum_{h\geq 1}x^{h^2}(\prod_{i=1}^{h}\frac{1}{1-x^i})^2$$

由于$h\leq\sqrt{n}$，所以我们可以快速计算

分治与倍增

分治ntt实际是一种思想，基本上就是正常的分治上用ntt维护转移之类的

同样的，倍增ntt也是一样的思想，一般我们的目标能够使用一个多项式的前n快速计算出$n+1\sim 2n$项，所以重点还是在公式的推导

1.分治NTT

给出一个序列$g_{1\ldots n-1}$，求出$f_{0\ldots n-1}$，其中$f_i=\sum_{j=1}^{i}f_{i-j}g_j$。

初始时有$f_0=1$，对998244353取模

考虑分治求解f的过程

不妨假设我们目前要求的是$l\sim r$间的f，且$l\sim mid$之间的f已经求完了

那么我们可以求出$l\sim mid$的f对$mid+1\sim r$的贡献

具体的，有$w_x=\sum_{i=l}^{mid}f_ig_{x-i}$，其中$x$有效的范围是$mid+1\sim r$，可以发现这样我们贡献的来源和要求的东西之间是没有影响的，每次直接NTT一下就可以了

然后可以继续分治下去做$mid+1\sim r$

时间复杂度$T(n)=2T(\frac{n}{2})+O(n\log n)=O(n\log^2 n)$

2.倍增NTT

求$x^{\overline{n}}$

不妨考虑倍增：假设我们现在有$x^{\overline{n}}$，要求$x^{\overline{2n}}$，问题变为如何用$x^{\overline{n}}$快速求出$(x+n)^{\overline{n}}$

不妨设其为$f(x)$，设$f_i=[x^i]f(x)$，那么

$$\begin{aligned}f(x+k)&=\sum_{i=0}^{n}f_i(x+k)^i\\&=\sum_{i=0}f_i\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}x^jk^{i-j}\\&=\sum_{j=0}^{n}x^j\sum_{i=j}^{n}f_i\frac{i!}{j!(i-j)!}k^{i-j}\\&=\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}\sum_{i=j}^{n}f_i\frac{i!}{(i-j)!}k^{i-j}\end{aligned}$$

然后我们就得到了$f(x+k)$的式子，最后把$f(x)$与$f(x+k)$卷一下就好了

时间复杂度$T(n)=T(\frac{n}{2})+O(n\log n)=O(n\log n)$

分式分解

由于笔者碰到的分式分解题比较少，所以这里只对最基础的分式分解讲解

其扩展有兴趣可以查阅资料

1.单个二次式的分式分解

一个经典的例子是斐波拉契数列

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x-x^2}&=[x^{n-1}](\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b})\\&=A[x^{n-1}]\frac{1}{x-a}+B[x^{n-1}]\frac{1}{x-b}\\&=-Aa^{-n}-Bb^{-n}\\&=\frac{\sqrt{5}}{5}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]\end{aligned}$$

其中的A,B,a,b都可以通过列方程解出

来看道运用

例：

【CF755G】PolandBall and Many Other Balls

有一排n个球，定义一组可以只包含一个球或包含两个相邻的球。现在每个球只能分到一个组里面，求从这些球中选出$[1,k]$组的方案数对998244353取模的结果

$1\leq n\leq 10^9,1\leq k\leq 2^{15}$

样例

```
3 3
```

```
5 5 1
```

设前n个球分组的生成函数为$F_n(x)$

则有

$$F_n(x)=(1+x)F_{n-1}(x)+xF_{n-2}(x)$$

设$G(x,y)$表示$\sum_{i=0}^{+\infty}y^iF_i(x)$

$$\begin{aligned}(1+x)yG+xy^2G+1=G\\G=\frac{1}{1-y-xy-xy^2}\end{aligned}$$

当然用SEQ构造可以更快得到

然后套用上面的做法

虽然解出的根是根式，但是发现它是一个$\sqrt{1+6x+x^2}$，可以通过ODE线性计算，也可以多项式开根

2.多个不同一次式的分式分解

形如

$$\frac{P(x)}{\prod_{i=1}^{n}(a_ix+b_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{a_ix+b_i}$$

将两边同时乘上$\prod_{i=1}^{n}(a_ix+b_i)$

有

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n}K_i\prod_{j\neq i}(a_jx+b_j)$$

代入$-\frac{b_i}{a_i}$（这也就是为什么要求因式不同）

$$P(-\frac{b_i}{a_i})=K_i\prod_{j\neq i}(-\frac{a_jb_i}{a_i}+b_j)$$

令$A(x)=\prod_{i=1}^{n}(a_ix+b_i)$，则

$$\begin{aligned}K_i&=\lim_{x\to-\frac{b_i}{a_i}}\frac{P(x)(a_ix+b_i)}{A(x)}\\&=\frac{P(-\frac{b_i}{a_i})a_i}{A'(-\frac{b_i}{a_i})}\end{aligned}$$

这一步运用了洛必达法则

于是我们可以多点求值在$O(n\log^2 n)$内完成

例：

【JZOJ7567】傅里叶与矩阵

~~属于基础运用，就不讲了~~

3.重一次式的分式分解

形如

$$\frac{P(x)}{(ax+b)^n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{(ax+b)^i}$$

将$(ax+b)^n$乘过去

有

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n}K_i(ax+b)^{n-i}$$

只需对两边都求$n-1,n-2,n-3\cdots1$阶导，对比系数，然后一个个算出来

积和变换

对于多个形式类似的式子的和或积，我们可以运用对数，导数等相关性质使得其能在二者间转换

这类问题往往靠经验积累，所以我们多以实际题目讲解

1.和化积

例：

【P4705】玩游戏

对于一次游戏，给出长为n的序列a，长为m的序列b。从两个序列里随机取出一个数，分别设为a_x，b_y

定义这次游戏的k价值为 $(a_x+b_y)^k$

计算对于$k=1,2,\cdots,t$，游戏价值的期望模998244353的结果

$1\le n,m,t\le 10^5,0\le a_i,b_i<998244353$

容易写出答案

$$\begin{aligned}\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_i+b_j)^k&=\frac{1}{nm}\sum_{p=0}^{k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\binom{k}{p}a_i^pb_j^{k-p}\\&=\frac{k!}{nm}\sum_{p=0}^{k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{a_i^pb_j^{k-p}}{p!(k-p)!}\end{aligned}$$

设$A(x)=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^i}{i!}\sum_{j=1}^{n}a_j^i,B(x)=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{x^i}{i!}\sum_{j=1}^{n}b_j^i$

于是要算的就是二者的卷积

我们先把阶乘去掉，最后再乘回来

$$\begin{aligned}A(x)&=\sum_{i=0}^{+\infty}x^i\sum_{j=1}^{n}a_j^i\\&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{+\infty}a_j^ix^i\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1-a_jx}\end{aligned}$$

这个时候已经可以分治NTT计算了，但是常数巨大，考虑优化

观察：

$$[\ln(1-a_jx)]'=\frac{-a_j}{1-a_jx},[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$$

于是可以改写上面的柿子

$$\begin{aligned}A(x)&=-x\sum_{j=1}^{n}[\ln(1-a_jx)]'+n\\&=-x[\ln(\prod_{i=1}^{n}(1-a_ix))]'+n\end{aligned}$$

2.积化和

例1：

【P5850】calc加强版

对于$n=1,2,3\dots m$，求出所有合法序列的权值对998244353取模的结果

其中，合法的定义为每个元素都为$[1,k]$中的整数，同时每个元素都不相同，同时，权值为所有元素的乘积

两个序列不同当且仅当他们任意一位不一样

$1\le m\le 5*10^5$，$1\le k\le 998244353$

不难发现，对于一个n

答案就是

$$n![x^n]\prod_{i=1}^{k}(1+ix)$$

先取对数后exp

$$\begin{aligned}n![x^n]\prod_{i=1}^{k}(1+ix)&=n![x^n]\exp\left(\sum_{i=1}^{k}\ln\left(1+ix\right)\right)\\&=n![x^n]\exp\left(\sum_{i=1}^{k}-\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-ix)^j}{j}\right)\\&=n![x^n]\exp\left(-\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^jx^j}{j}\sum_{i=1}^{k}i^j\right)\end{aligned}$$

自然数幂和可以伯努利数求解

例2：

【JZOJ7514】萌萌计数题

对于所有长度为n的排列，求逆序对数量的k次方的期望对998244353取模的结果

$1\le n\le 998244350,1\le k\le 10^5$

如果$k=1$

将数字从小到大插入序列，可以写出生成函数

$$\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1-x^{i+1}}{1-x}$$

加入k次方，实际上是一个类似这样的过程

有n个数$a_1\dots a_n$，即值为i的产生的逆序对个数

求$(\sum_{i=1}^{n}a_i)^k$

对其使用多元二项式定理

即$\sum_{b_1+\dots b_n=k}\binom{k}{b_1\dots b_n}\prod_{i=1}^n a_i^{b_i}$

于是我们可以把上式的x改写为e^x

$$\begin{aligned}\frac{k!}{n!}[x^k]\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1-e^{(i+1)x}}{1-e^x}&=\frac{k!}{n!}[x^k](\frac{x}{e^x-1})^n\prod_{i=1}^n\frac{e^{ix}-1}{x}\\&=k![x^k](\frac{x}{e^x-1})^n\prod_{i=1}^n\frac{e^{ix}-1}{ix}\end{aligned}$$

观察右边的乘积，是一个复合的形式

于是设$F(x)=\ln\frac{e^x-1}{x}$

于是柿子变为

$$\begin{aligned}k![x^k]\exp(\sum_{i=1}^n F(ix)-nF(x))&=k![x^k]\exp(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{+\infty}f_j(ix)^j-nF(x))\\&=k![x^k]\exp(\sum_{j=1}^{+\infty}f_jx^j\sum_{i=1}^n i^j-nF(x))\end{aligned}$$

同样可以伯努利数求解

牛顿级数与下降幂多项式

这是两类在推导组合数有关柿子时十分有用的多项式

1.下降幂多项式

对于一个多项式$F(x)=\sum_{i=0}^n f_ix^i$

其下降幂多项式定义为$G(x)=\sum_{i=0}^n g_ix^{\underline{i}}$

考虑怎么求

(1)点值转下降幂多项式

若给出了$n+1$个连续点值

令其为a，即$a_i=F(i)$

那么有

$$\begin{aligned}a_i&=\sum_{j=0}^n g_ji^{\underline{j}}\\&=\sum_{j=0}^n g_j\frac{i!}{(i-j)!}\\\frac{a_i}{i!}&=\sum_{j=0}^n\frac{g_j}{(i-j)!}\end{aligned}$$

令a的EGF为$A(x)$

于是有$A(x)=G(x)e^x$，即$G(x)=A(x)e^{-x}$

(2)普通多项式转下降幂多项式

如果允许$O(n^2)$

则

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n f_i x^i &= \sum_{i=0}^n f_i \sum_{j=0}^i x^{\underline{j}} S(i,j) \\ &= \sum_{j=0}^n x^{\underline{j}} \sum_{i=j}^n S(i,j) f_i\end{aligned}$$

如果不允许，则可以先多点求值求出连续点值，然后再卷积

(3)下降幂多项式转普通多项式

可以直接乘上一个e^x转成点值的EGF，然后再快速插值

2.牛顿级数

对于一个多项式$F(x)=\sum_{i=0}^n f_i x^i$

其牛顿级数定义为$G(x)=\sum_{i=0}^n g_i \binom{x}{i}$

那么它跟下降幂多项式有着非常明显的关系，只要乘除$i!$就能在二者间进行转换

拉格朗日反演

在用各种变形得到最后的生成函数时，我们可能会因为其诡异的形式而不知如何计算

而拉格朗日反演在复合逆可以快速求解的情况下给了我们一条捷径

1.复合逆

对于两个多项式$F(x),G(x)$

若$F(G(x))=x$，则F,G互为复合逆

由定义可知F,G没有常数项且一次项非0（一般是1）

所以在求解复合逆的时候，若原函数无复合逆，要对其进行变换，如求逆，次方等

2.拉格朗日反演

对于互为复合逆的F,G

有

$$[x^n]G(x) = \frac{1}{n}[x^{-1}]F(x)^{-n}$$

或者说为了计算，有

$$[x^n]G(x) = \frac{1}{n}[x^{n-1}](\frac{F(x)}{x})^{-n}$$

- $Claim:$

对于常系数为0，且一次项非0的整式（即不存在负指数幂项）$F(x)$

有

$$[x^{-1}]F'F^k = [k=-1]$$

证明：

当$k \neq -1$，$F'F^k = (\frac{1}{k+1}F^{k+1})'$，由于多项式求导之后没有$-1$次项，故这时为0

当$k=-1$，$[x^{-1}]F'F^{-1} = [x^{-1}]\frac{F(x)'}{F(x)} = [x^0]\frac{F(x)'}{x^{-1}F(x)} = 1$

于是对于拉格朗日反演：

$$\begin{aligned} G(F(x)) &= x \\ G'(F)F' &= 1 \\ \sum_{i=0}^{+\infty} iG[i]F^{i-1}F' &= 1 \\ \sum_{i=0}^{+\infty} iG[i]F^{i-n-1}F' &= F^{-n} \\ [x^{-1}]\sum_{i=0}^{+\infty} iG[i]F^{i-n-1}F' &= [x^{-1}]F^{-n} \\ \sum_{i=0}^{+\infty} iG[i][i-n-1=-1] &= [x^{-1}]F^{-n} \\ nG[n] &= [x^{-1}]F^{-n} \\ G[n] &= \frac{1}{n}[x^{-1}]F^{-n} \end{aligned}$$

类似地我们还能得到

$$G^k[n] = \frac{k}{n}[x^{-k}]F^{-n}$$

3.扩展拉格朗日反演

对于互为复合逆的F,G，以及另一个无要求的H

令$T(x) = H(G(x))$

有

$$T[n] = \frac{1}{n}[x^{-1}]H'F^{-n}$$

证明：

$$
\begin{aligned}
H(G(F(x))) &= H(x) \\
T(F) &= H \\
T'(F)F' &= H' \\
\sum_{i=0}^{+\infty} iT[i]F^{i-1}F' &= H' \\
[x^{-1}]\sum_{i=0}^{+\infty} iT[i]F^{i-1-n}F' &= [x^{-1}]H'F^{-n} \\
\sum_{i=0}^{+\infty} iT[i][i-n-1=-1] &= [x^{-1}]H'F^{-n} \\
nT[n] &= [x^{-1}]H'F^{-n} \\
T[n] &= \frac{1}{n}[x^{-1}]H'F^{-n}
\end{aligned}
$$

例：

【P7439】「KrOI2021」Feux Follets 弱化版

设cyc_π表示将长度为n的排列π当成置换时能分解的循环置换个数。给定n,k和一个$k-1$次多项式$F(x)$

求$\sum_\pi F(cyc_\pi)$对998244353取模的结果，其中π是长度为n的错排列

$1 \le n,k \le 10^5$

一个长度≥ 2的环的EGF是$G(x)=\sum_{i\ge 2}\frac{x^i}{i}=-\ln(1-x)-x$

那么要求的就是$\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{G^i(x)}{i!}[x^n]n!F(i)$

设$P_k(x)=G^k(x)$

于是可以施扩展拉格朗日反演

但是我们发现G的最低次数是2，而且系数为2^{-1}，不满足复合逆的要求

不妨设$\frac{g^2}{2}=-\ln(1-x)-x$，那么复合逆存在，设为$f$

那么柿子改写成

$$
\begin{aligned}
P_k(x) &= \frac{g^{2k}}{2^k} \\
&= \frac{1}{n}[x^{-1}]\frac{2k\cdot x^{2k-1}}{2^k}f^{-n} \\
&= \frac{1}{n}[x^{n-2k}]\frac{1}{2^{k-1}}(\frac{f}{x})^{-n}
\end{aligned}
$$

牛顿迭代求出来然后多点求值即可

关于幂次上的应用，还有一些扩展：

【P7857】「EZEC-9」Meltel（by Alpha1022）

4.另类拉格朗日反演

当$k \neq 0$时，有

$$\begin{aligned} G^k[n] &= \frac{k}{n}[x^{-k}]F^{-n} \\ &= \frac{k}{n}\frac{1}{-k}[x^{-k-1}](-n)F^{-n-1}F' \\ &= [x^{-k-1}]F^{-n-1}F' \end{aligned}$$

在$n = 0$时有奇效

例:

【P7445】「EZEC-7」线段树

给出一个长n的序列，对其建出一颗线段树

有m次操作，每次在序列的所有子区间中等概率选出一个，然后在$[-1, V]$中等概率选出一个整数C

对选出的区间在线段树上执行区间加上C的操作

线段树有懒标记，但是是在所有操作做完之后一起下传

若线段树上一个非叶子节点的tag不为0，就会$pushdown$，求期望的$pushdown$次数

对998244353取模

$1 \le n \le 10^5, 1 \le m \le 10^5$

样例

```
2 1 0
```

```
166374059(1/6)
```

我们对一个点进行考虑

计算它最终为0的概率，再用1减去，然后求和就是答案

我们不需要考虑操作具体到了哪些点上，因为只要是其子区间就会被下传到

设$p(a)$表示线段树上一个点对应区间$[l, r]$在一次操作中被覆盖到的概率，即$\frac{l(n-r+1)}{\frac{n(n+1)}{2}}$

于是可以写出为0的概率

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}p(a)^i(1-p(a))^{m-i}[x^0](\frac{\frac{x^{V+1}-1}{x-1}+x^{-1}}{V+2})^i$$

注意到我们最后是求和的，于是我们可以考虑先计算出中间部分$p(a)^i(1-p(a))^{m-i}$对于所有i的和

由于$p(a)^i(1-p(a))^{m-i} = (1-p(a))^m(\frac{p(a)}{1-p(a)})^i$

所以可以写成生成函数加和的形式，分治NTT计算

然后考虑算后面部分

设$F(x) = \frac{x^{V+1}-1}{x-1} + x^{-1}$

于是要对于$\forall i\in[0,m]$，计算$[x^0]F^i(x)$

这时候可以使用另类拉格朗日反演了

但是我们注意到F显然没有复合逆，但是F^{-1}有

于是设$G(x)=F^{-1},G(P(x))=x$

那么$[x^0]F^i(x)=[x^0]G^{-i}(x)=[x^{i-1}]P'P^{-1}$

把P代入G有

$$\begin{aligned}x&=G(P(x))\\x&=\frac{1}{\frac{P^{V+1}-1}{P-1}+P^{-1}}\\x&=\frac{P^2-P}{P^{V+2}-1}\\xP^{V+2}-x&=P^2-P\\xP^{V+2}-P^2+P-x&=0\end{aligned}$$

牛顿迭代求解即可

ODE

ODE，即常微分方程，~~也就是万能的求导大法~~，可以帮助解决一类线性递推有关的题目

这里介绍的只是ODE的冰山一角，更多的姿势可以在具体的题目中学习

1.幂

(1)壹之型

最经典的ODE

$$\begin{aligned}G(x)&=F(x)^k\\G'&=kF^{k-1}F'\\FG'&=kGF'\end{aligned}$$

那么在F是特殊多项式（如短多项式）时，可以快速得到递推形式

(2)贰之型

$$\begin{aligned}G(x)&=(x+1)^n(x-1)^m\\G'(x)&=\frac{nG}{x+1}+\frac{mG}{x-1}\\(x^2-1)G'(x)&=n(x-1)G+m(x+1)G\end{aligned}$$

当然，这里不是$(x+1),(x-1)$时也是类似的

2.阶乘

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \sum_{i=0}^{+\infty} i! x^i \\
G'(x) &= \sum_{i=0}^{+\infty} (i+1)!(i+1)x^i \\
x^2G'(x) &= \sum_{i=2}^{+\infty} (i-1)!(i-1)x^i \\
&= \sum_{i=2}^{+\infty} i! x^i - \sum_{i=2}^{+\infty} (i-1)! x^i \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} i! x^i - x\sum_{i=0}^{+\infty} i! x^i - x - 1 + x \\
&= (1-x)G(x) - 1
\end{aligned}
$$

可以做一些复合问题

3.二项式

(1)原初之型

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} x^i \\
G'(x) &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i+1} (i+1) x^i \\
nG(x) - (1+x)G'(x) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} (n-i) x^i - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i+1} (i+1) x^i \\
&= \binom{n}{k} (n-k) x^k
\end{aligned}
$$

(2)扩展

$$
\begin{aligned}
T(x) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} A^i \\
G(x) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} x^i \\
T(x) &= G(A) \\
T'(x) &= G'(A)A' \\
nG(A) - (1+A)G'(A) &= \binom{n}{k} (n-k) A^k \\
nA'T(x) - (1+A)T'(x) &= \binom{n}{k} (n-k) A^k A'
\end{aligned}
$$

(3)再扩展

$$G(x)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}A^iB^{n-i}$$
$$=B^n\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}(\frac{A}{B})^i$$
$$T(x)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}(\frac{A}{B})^i$$
$$n(\frac{A}{B})'T-(1+\frac{A}{B})T'=\binom{n}{k}(n-k)(\frac{A}{B})^k(\frac{A}{B})'$$
$$G=TB^n,G'B=T'B^{n+1}+nGB'$$

于是可以表示出T,T'

$$n(\frac{A}{B})'\frac{G}{B^n}-(1+\frac{A}{B})\frac{G'B-nGB'}{B^{n+1}}=\binom{n}{k}(n-k)(\frac{A}{B})^k(\frac{A}{B})'$$
$$\frac{n(A'B-AB')G-G'B^2+nGB'B-G'BA+nGB'A}{B^{n+2}}=\binom{n}{k}(n-k)\frac{A^k}{B^k}\frac{A'B-AB'}{B^2}$$
$$n(A'B-AB')G-G'B^2+nGB'B-G'BA+nGB'A=\binom{n}{k}(n-k)A^kB^{n-k}(A'B-AB')$$
$$n(A'B+B'B)G-(B^2+BA)G'=\binom{n}{k}(n-k)A^kB^{n-k}(A'B-AB')$$
$$n(A'+B')G-(A+B)G'=\binom{n}{k}(n-k)(A'B^{n-k}A^k-A^{k+1}B'B^{n-k-1})$$

同样可以做一些复合问题

关于ODE的一个应用：Binomial Sum（见EI博客）

转置原理

处理生成函数的重要技巧

1.定理

设有一个矩阵V，将其分解为几个初等矩阵$E_1\cdots E_k$

即

$$V=E_1E_2\cdots E_k$$

则

$$V^T=E_k^TE_{k-1}^T\cdots E_1^T$$

矩阵的转置：$V_{j,i}^T=V_{i,j}$，即沿对角线翻折

其中，初等矩阵分为三种：

(1)将I的第i行，第j行交换的矩阵

(2)将$I_{i,i}$从1改为c的矩阵

(3)将$I_{i,j}$从0改为c的矩阵

（I为单位矩阵）

左乘向量的效果分别为：

(1)交换第i,j位

(2)将第i位乘上c

(3)将第j位乘c，然后加到第i位上

对应的转置的效果：

(1)、(2)跟原来一样

(3)将第i位乘c，然后加到第j位上

手画一下应该很好理解

于是转置原理的用处就可以发现了：

在原变换不易计算时，可以计算转置，然后将整个过程倒过来再算

2.多点求值

这是一个经典的科技应用

规避了多项式取模，获得常数极小的做法

在rqy的博客里有非常详细的介绍

[$E为什么可以5e5多点求值(详细揭秘)]

3.计算多元函数

对于一个多元函数$F(x,y)$

如果我们要求$[y^n]$，我们可以将F转置，于是变成了求$[x^n]$

于是只要我们知道求$[x^n]F(x,y)$的方法，将其转置过来就是原问题的答案

例：

【P7440】「KrOI2021」Feux Follets

设cyc_π表示将长度为n的排列π当成置换时能分解的循环置换个数。给定n,k和一个$k-1$次多项式$F(x)$

对于$\forall m\in[1,n]$

求$\sum_\pi F(cyc_\pi)$对998244353取模的结果，其中π是长度为n的错排列

$1\le n,k\le 10^5$

这个问题要求我们算每一项，所以原先的拉格朗日反演不管用了

考虑改成较为简洁的形式

$$G(x) = -\ln(1-x) - x$$
$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{G^i(x)}{i!} \sum_{j=0}^{i-1} f_j i^j$$

注意到右边有i^j不好处理

于是可以将$F(x)$改写成牛顿级数$\sum_{i=0}^{k-1} f_j^* \binom{x}{j}$

于是组合意义就是要从i个中选j个

用二元生成函数改写一下

于是就等价于

$$\sum_{j=0}^{k-1} f_j^*[y^j] \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{((1+y)G(x))^i}{i!} = \sum_{j=0}^{k-1} f_j^*[y^j] e^{(1+y)(-\ln(1-x)-x)}$$

令$F(x,y) = e^{(1+y)(-\ln(1-x)-x)}$

我们先算出

$$\sum_{j=0}^{k-1} f_j^*[x^j]F(x,y)$$

这时我们使用求导大法

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}F &= (\frac{1}{1-x} - 1)(1+y)F \\ &= \frac{x(1+y)}{1-x}F \\ (1-x)\frac{\partial}{\partial x}F &= x(1+y)F\end{aligned}$$

令$f_n = [x^n]F(x,y)$

提取系数

$$(n+1)f_{n+1} - nf_n = (1+y)f_{n-1}$$
$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{n}{n+1} & 1 \\ \frac{1+y}{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$
$$(f_{n+1} \quad f_n) = (f_n \quad f_{n-1})A_{n+1}$$

于是可以分治NTT计算，转置的时候只要一点点地转过来就可以了（汗