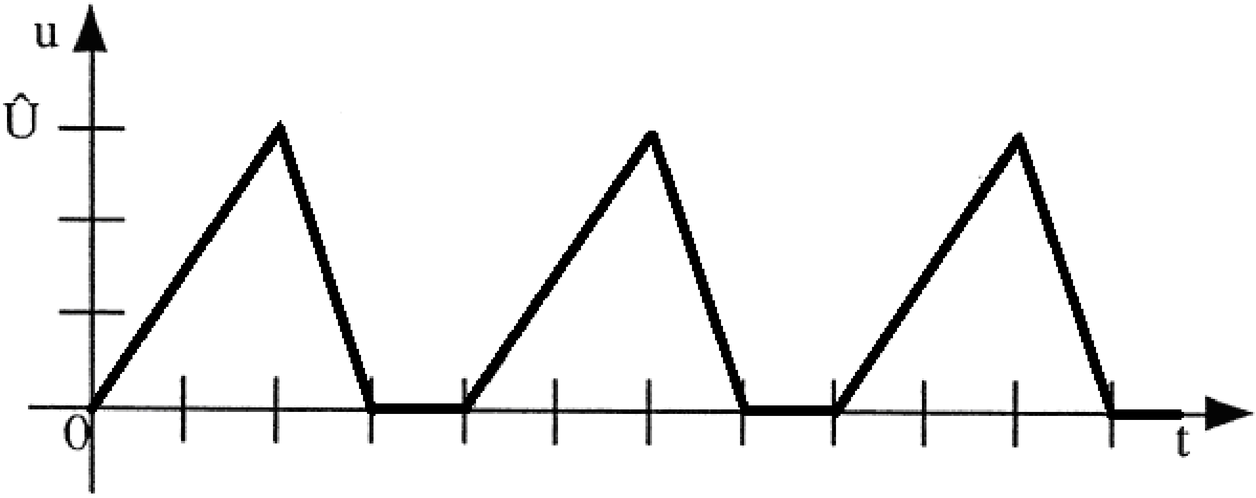
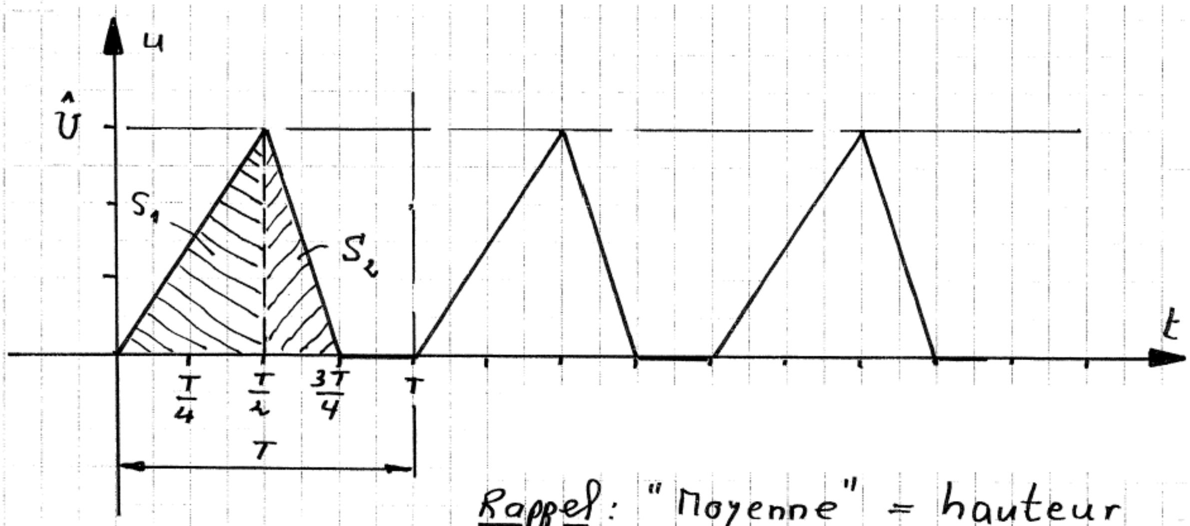
AC: Exercices valeurs moyennes et efficaces
Corrigé

Exercice 1

Trouver la valeur moyenne du signal ci-dessous.



AC: Exercices valeurs moyennes et efficaces
Corrigé



Rappel : "Moyenne" = hauteur du rectangle de même surface que celle sous la courbe dans l'intervalle

Méthode simple : si le calcul de la surface sous la courbre, dans l'intervalle choisi (ici, 1 période), est aisé, on procédera comme suit :

$$S = S_1 + S_2 \; ; \quad S = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{T}{2} \cdot \hat{U}}_{S_1} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{T}{4} \cdot \hat{U}}_{S_2} = \frac{3T\hat{U}}{8}$$

"Hauteur" du rectangle de "surface" $= \frac{3T\hat{U}}{8}$:

$$\bar{U} = \frac{3T\hat{U}/8}{T} = \underline{\underline{\frac{3\hat{U}}{8}}}$$

haute école neuchâtel berne jura arc ingénierie www.he-arc.ch

Méthode plus "mathématique" :

$\bar{U} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot dt$; il s'agit de définir, sous la forme d'équations, la fonction $u(t)$ dans l'intervalle $0 < t < T$.

$0 < t < \frac{T}{2}$: $u(t) = \alpha \cdot t$; en $t = \frac{T}{2}$, $u(t) = \hat{U}$

$$\rightarrow \hat{U} = \alpha \cdot \frac{T}{2} \rightarrow \alpha = \frac{2\hat{U}}{T}$$

$$\rightarrow 0 < t < \frac{T}{2} : \quad u(t) = \frac{2\hat{U}}{T}\cdot t$$

$\frac{T}{2} < t < \frac{3T}{4}$: $u(t) = \beta t + \gamma$; en $t = \frac{T}{2}$, $u(t) = \hat{U}$ (1)

en $t = \frac{3T}{4}$, $u(t) = 0$ (2)

$$(1) : \quad \hat{U} = \beta \cdot \frac{T}{2} + \gamma$$

$$(2) : \quad 0 = \beta \cdot \frac{3T}{4} + \gamma \quad \cdot(-1)$$

$$\hat{U} = \beta\left(\frac{T}{2} - \frac{3T}{4}\right) = -\beta \cdot \frac{T}{4} \rightarrow \beta = -\frac{4\hat{U}}{T}$$

$$\rightarrow (2) : \quad 0 = -\frac{4\hat{U}}{T}\cdot\frac{3T}{4} + \gamma \rightarrow \gamma = 3\hat{U}$$

$$\frac{T}{2} < t < \frac{3T}{4} : \quad u(t) = -\frac{4\hat{U}}{T}\cdot t + 3\hat{U}$$

$\frac{3T}{4} < t < T$: $u(t) = 0$

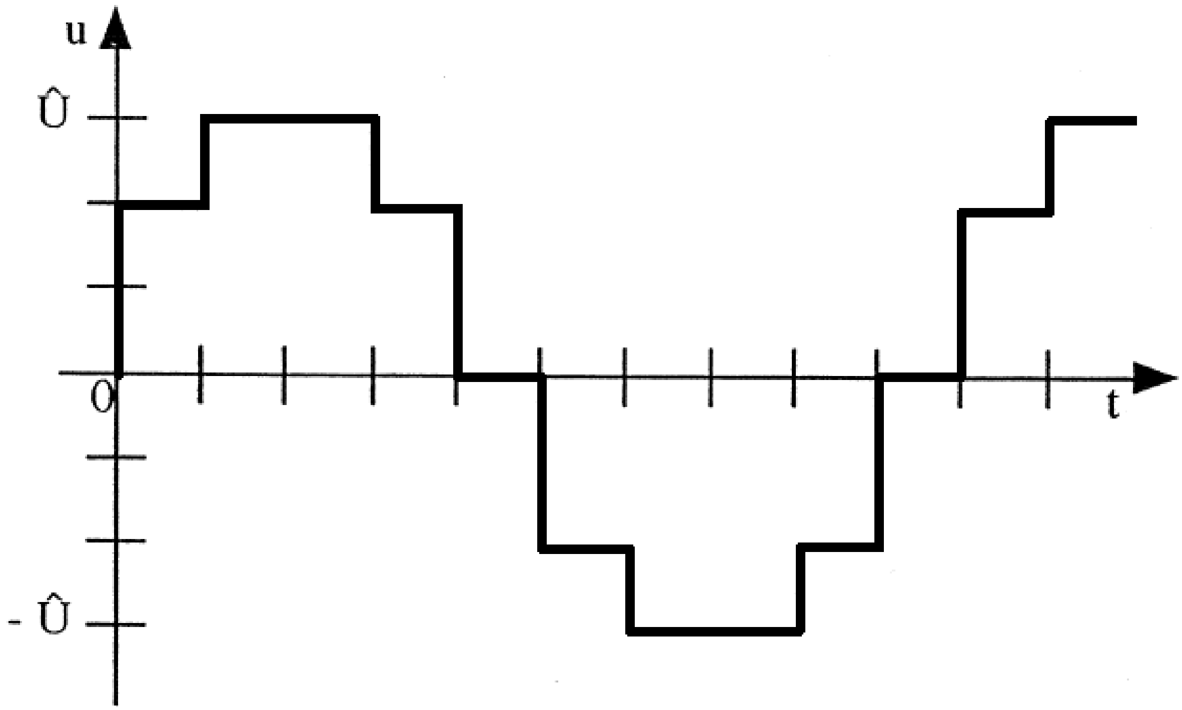
$$\bar{U} = \frac{1}{T}\left\{\int_0^{T/2}\frac{2\hat{U}}{T}\cdot t\,dt + \int_{T/2}^{3T/4}\left(-\frac{4\hat{U}}{T}\cdot t + 3\hat{U}\right)dt + \int_{3T/4}^{T} 0\,dt\right\}$$

$$\bar{U} = \frac{1}{T}\left\{\frac{2\hat{U}}{T}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{T^2}{4} - \frac{4\hat{U}}{T}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{9T^2}{16} - \frac{T^2}{4}\right) + 3\hat{U}\left(\frac{3T}{4} - \frac{T}{2}\right)\right\}$$

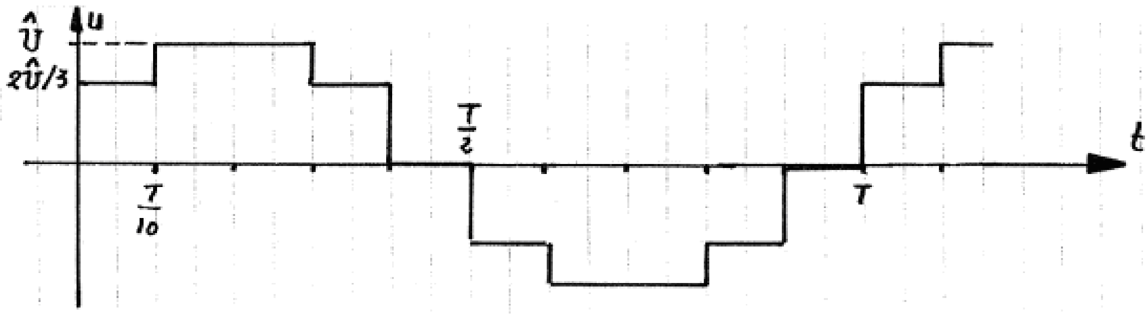
$$= \frac{1}{T}\left\{\frac{\hat{U}\cdot T}{4} - \frac{5\hat{U}T}{8} + \frac{3\hat{U}T}{4}\right\} = \frac{1}{T}\cdot\frac{3\hat{U}T}{8} = \underline{\underline{\frac{3\hat{U}}{8}}}$$

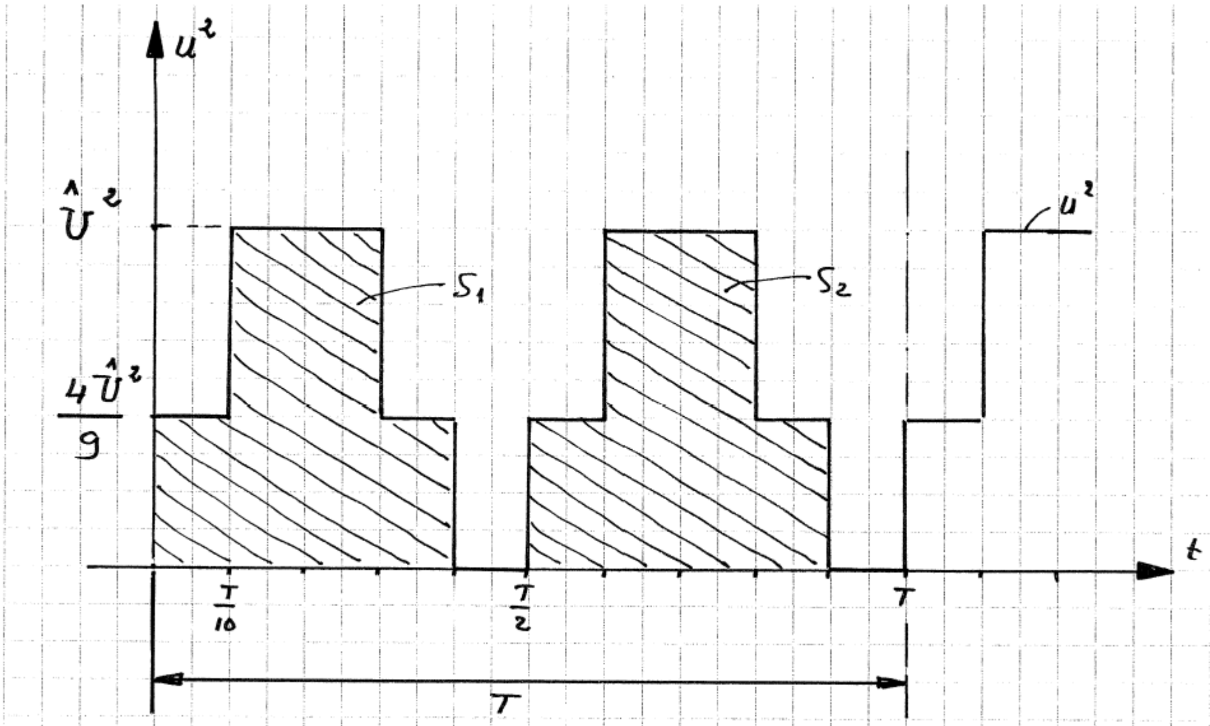
Exercice 2

Trouver la valeur efficace du signal ci-dessous.



AC: Exercices valeurs moyennes et efficaces
Corrigé





$$S = S_1 + S_2 \; ; \quad S_1 = S_2 \longrightarrow S = 2\,S_1$$

$$S_1 = \left(\frac{4\,\hat{U}^2}{9} \cdot \frac{T}{10}\right) \cdot 2 + \hat{U}^2 \cdot \frac{2T}{10} = \frac{13\,\hat{U}^2 \cdot T}{45}$$

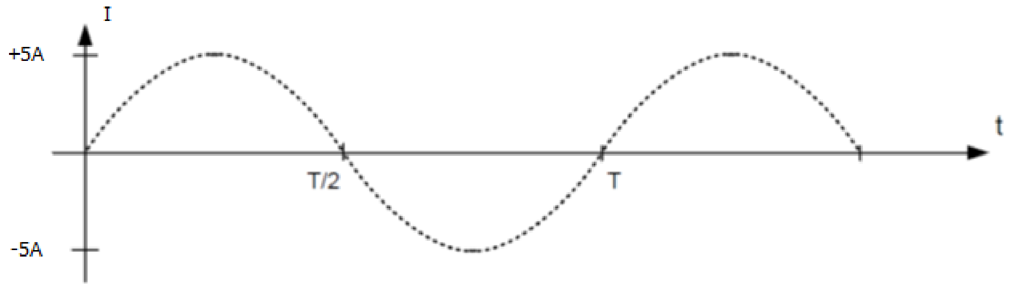
$$\longrightarrow S = 2\,S_1 = \frac{26\,\hat{U}^2 \cdot T}{45} = \int_0^T u^2\,dt$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \frac{26\,\hat{U}^2 \cdot T}{45}} \cong \underline{\underline{0{,}76\,\hat{U}}}$$

AC: Exercices valeurs moyennes et efficaces
Corrigé

Exercice 3

Trouver les valeurs moyenne et efficace du signal ci-dessous.



Valeur moyenne (I)

Forme générale :

$$A_{|m|} = \frac{1}{T}\int_0^T |a(t)|\,dt$$

Pour un sinusoïde :

$$I_{|m|} = \frac{1}{T}\int_0^T \left|\hat{I}\cdot \sin(\omega t)\right| dt$$

$$I_{|m|} = \frac{\hat{I}}{T}\int_0^T |\sin(\omega t)|\,dt$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a}$$

$$I_{|m|} = \frac{\hat{I}}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sin(\omega t)|\,dt$$

$$= \frac{\hat{I}}{2\pi}\left[\left|\left(-\frac{\cos 2\pi}{1}\right) - \left(-\frac{\cos 0}{1}\right)\right|\right]$$

$$= \frac{\hat{I}}{2\pi}\left[\left|-1 + 1\right|\right]$$

$$[0]$$

$$\underline{\underline{I_{|m|} = 0}}$$

haute école arc ingénierie
neuchâtel berne jura www.he-arc.ch

AC: Exercices valeurs moyennes et efficaces
Corrigé

Valeur efficace (I)

→ Valeur moyenne quadratique

Forme générale :

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T a^2(t)\cdot dt}$$

Valable pour toute fonction périodique de période T

→ Courant sinusoïdal :

$$i = \hat{I}\cdot \sin(\omega t + \beta)$$

Sans diphasage : $i = \hat{I}\cdot \sin(\omega t)$

→ Courant sinusoïdal efficace :

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \hat{I}^2\cdot \sin^2(\omega t)\cdot d(\omega t)}$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{I}^2\cdot \sin^2(\omega t)\cdot d(\omega t)}$$

$$I = \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2(\omega t)\cdot d(\omega t)} \qquad \int a\cdot f(x)\cdot dx = a\int f(x)\,dx$$

$$I = \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{2\pi}\left[\left(\frac{2\pi}{2}-\frac{\sin 4\pi}{4}\right)-\left(\frac{0}{2}-\frac{\sin 0}{4}\right)\right]} \qquad \int \sin^2 ax\cdot dx = \frac{x}{2}-\frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$[(\pi - 0) - (0 - 0)]$$

$$[\pi]$$

$$I = \sqrt{\frac{\hat{I}^2}{2}}$$

$$I_{eff} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \quad \text{ou} \quad \hat{I} = \sqrt{2}\cdot I_{efficace}$$

Application

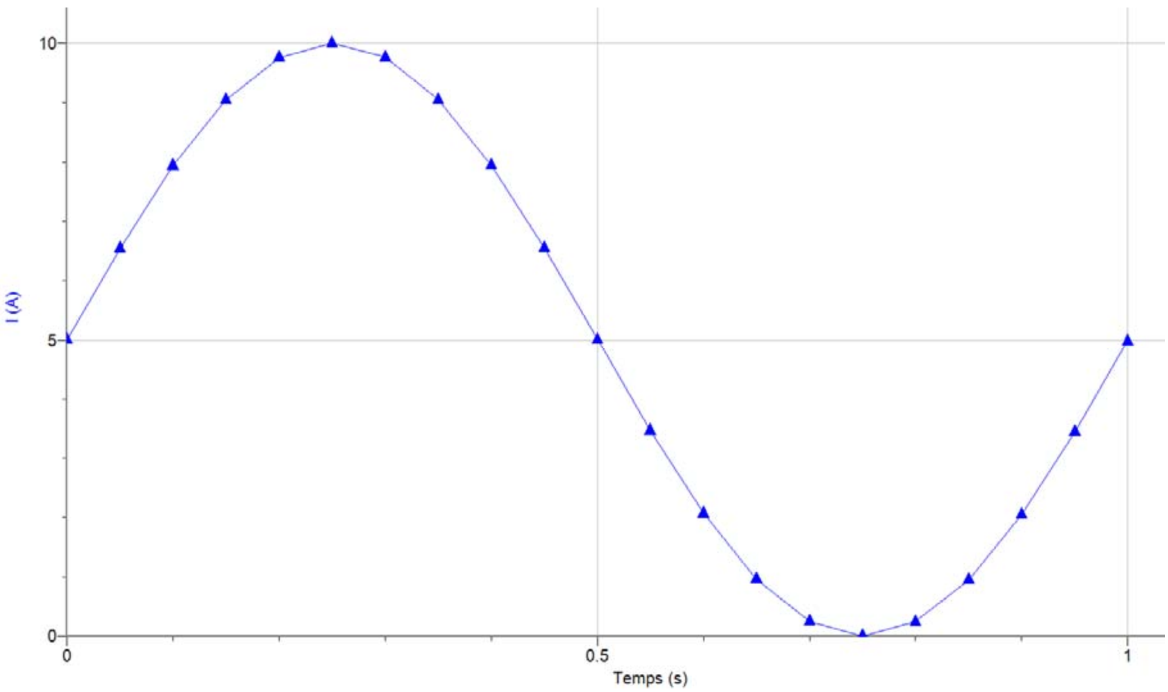
$$I_{eff} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3{,}54\,V$$

Hes·so
Haute Ecole Spécialisée
de Suisse occidentale

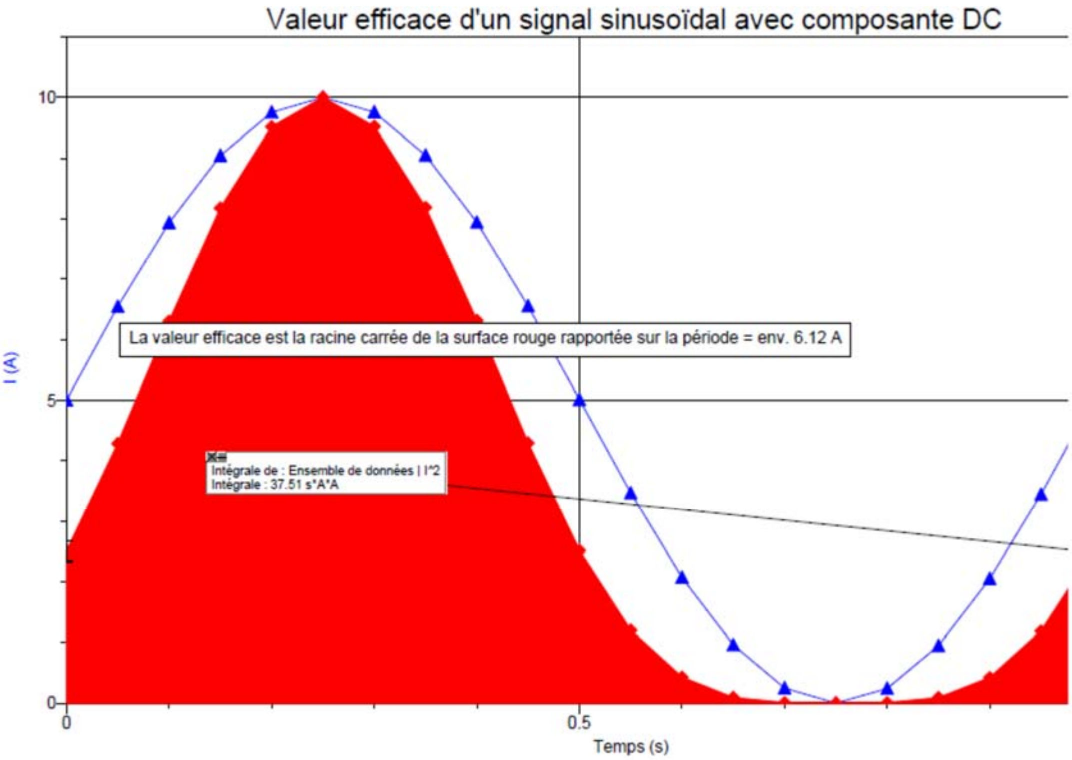
AC: Exercices valeurs moyennes et efficaces Corrigé

Exercice 4

Sans développement mathématique, déterminer avec Loger Pro à l'aide de la fonction « Intégrale » , la valeur efficace du signal ci-dessous.



Temps (s)	I (A)	I^2 (A*A)
0	5.000	25.0
0.05	6.544	42.8
0.1	7.938	63.0
0.15	9.044	81.7
0.2	9.754	95.1
0.25	10.000	100.0
0.3	9.757	95.1
0.35	9.048	81.8
0.4	7.944	63.1
0.45	6.552	42.9
0.5	5.008	25.0
0.55	3.463	11.9
0.6	2.069	4.2
0.65	0.961	0.9
0.7	0.248	0.0
0.75	0.000	0.0
0.8	0.241	0.0
0.85	0.947	0.8
0.9	2.049	4.2
0.95	3.441	11.8
1	4.984	24.8



haute école neuchâtel berne jura arc ingénierie www.he-arc.ch

AC: Exercices valeurs moyennes et efficaces
Corrigé

Valeur efficace d'un signal sinusoïdal avec composante DC

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T u^2(t)\,dt} \quad \text{avec} \quad u(t) = \hat{U}\cdot\sin(\omega t) + U_0$$

$$u^2(t) = \underbrace{\hat{U}^2\sin^2(\omega t)}_{①} + \underbrace{2\hat{U}U_0\cdot\sin(\omega t)}_{②} + \underbrace{U_0^2}_{③}$$

① $\Rightarrow \hat{U}^2\cdot\frac{1}{2}\left(1-\cos(2\omega t)\right)$

$$\int_T \hat{U}^2\frac{1}{2}\left(1-\cos(2\omega t)\right)dt = \hat{U}^2\frac{1}{2}\left[\underbrace{\int_T dt}_{T} - \underbrace{\int_T \cos(2\omega t)\,dt}_{=0\,*}\right]$$

$$= \hat{U}^2\frac{T}{2}$$

② $\int_T 2\hat{U}U_0\cdot\sin(\omega t)\,dt = 0^*$

③ $\int_T U_0^2\,dt = U_0^2\cdot T$

$$\Rightarrow \int_T u^2(t)\,dt = \hat{U}^2\frac{T}{2} + U_0^2\,T$$

① ② ③

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[\hat{U}^2\frac{T}{2} + U_0^2 T\right]}$$

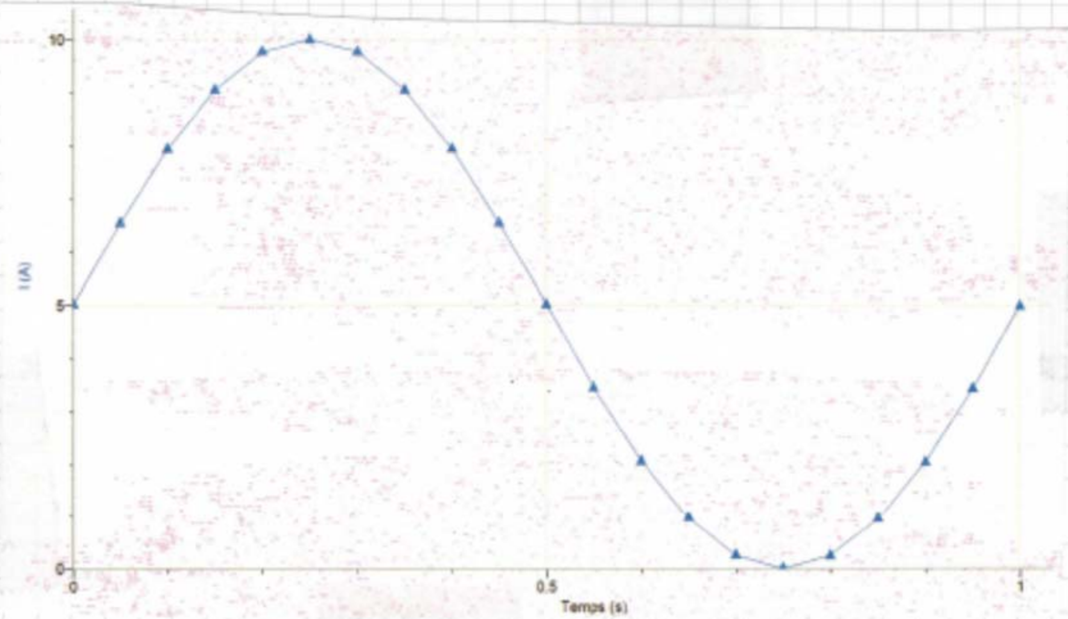
$$U_{eff} = \sqrt{\frac{\hat{U}^2}{2} + U_0^2}$$

* L'intégrale d'un sin ou cos sur une période T vaut 0 !
→ Surface sous la courbe + et − s'annulent.

Hes·so Haute Ecole Spécialisée de Suisse occidentale

AC: Exercices valeurs moyennes et efficaces
Corrigé

Application au signal ci-dessous :



Avec : $\hat{U} = 5V$ signal ∼

$U_0 = 5V$ composante DC

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{5^2}{2} + 5^2} = \sqrt{\frac{25}{2} + 25} = \sqrt{37{,}5} = \underline{\underline{6{,}12\ V}}$$

∼