Proyecto Final - Optimización Lineal

Alejandro Niño and Juan Nicolás Salazar

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

11 de Mayo de 2018

Resumen

El siguiente es un documento que explica el método del elipsoide para determinar si un poliedro $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\}$ es o no vacío. Además, dado $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ se explica como se puede utilizar el método para encontrar una solución óptima al problema, min $\mathbf{c}^\intercal \mathbf{x}$ s.a. $\mathbf{x} \in P$.

1. Preliminares

Definición 1. Sea $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz cuadrada con entradas reales. $\mathbf{M}$ se dice definida positiva si $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^\intercal \mathbf{M}\mathbf{x} > 0$.

Definición 2. Sean $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva, y $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. $E(\mathbf{z}, \mathbf{M}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x}-\mathbf{z})^\intercal \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{z}) \leq 1\}$ se denomina elipsoide con centro en $\mathbf{z}$.

Veamos por qué es necesario definir un elipsoide haciendo uso de una matriz simétrica y definida positiva. Esta condición es equivalente a que todos los valores propios de la matriz sean positivos, luego dada $\mathbf{M}$ que cumpla esto, existen $\mathbf{Q}, \mathbf{D}$ matrices tal que $\mathbf{Q}$ es ortogonal, $\mathbf{D}$ es diagonal con todas sus entradas de la diagonal iguales a los valores propios de $\mathbf{M}$ y $\mathbf{M} = \mathbf{Q}^\intercal \mathbf{D}\mathbf{Q}$. Entonces dado $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^\intercal \mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\intercal \mathbf{Q}^\intercal \mathbf{D}\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\intercal \mathbf{D}\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \leq 1$, tomando $\mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{x}$ (transformación lineal invertible pues $\mathbf{Q}$ es una rotación), es la ecuación de un elipsoide en dimensión n centrado en el origen con semiejes alineados a los vectores canónicos ($\mathbf{x}^\intercal \mathbf{M}\mathbf{x} \leq 1$ es el mismo elipsoide pero rotado). No se obtendría la fórmula de un elipsoide si la matriz no fuera definida positiva, pues todos los coeficientes son distintos de cero y además positivos, luego tienen raíz cuadrada real y se pueden calcular las longitudes de los semiejes. Finalmente la inversa de una matriz simétrica y definida positiva también tiene estas dos propiedades, de modo que la forma en que se definieron los elipsoides tiene sentido.

A continuación se presenta un lema que permite la implementación el algoritmo.

Lema 1. *Sea $E := E(\mathbf{z}, \mathbf{M}) \subset \mathbb{R}^n$ elipsoide y $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Considere el medioespacio $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\intercal \mathbf{x} \geq \mathbf{a}^\intercal \mathbf{z}\}$. Sean*

$$\mathbf{z}' = \mathbf{z} + \frac{1}{n+1}\frac{\mathbf{M}\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^\intercal \mathbf{M}\mathbf{a}}},$$

$$\mathbf{M}' = \frac{n^2}{n^2-1}\Big(\mathbf{M} - \frac{2}{n+1}\frac{\mathbf{M}\mathbf{a}\mathbf{a}^\intercal \mathbf{M}}{\mathbf{a}^\intercal \mathbf{M}\mathbf{a}}\Big).$$

Entonces $\mathbf{M}'$ es simétrica y definida positiva, luego $E' := E(\mathbf{z}', \mathbf{M}')$ es un elipsoide. Además tenemos $E \cap H \subset E'$ y $Vol(E') < e^{-\frac{1}{2(n+1)}} Vol(E)$, con $Vol(\cdot)$ el volumen.

Demostración. Primero veamos que $E \cap H \subset E'$:
Asumamos inicialmente $\mathbf{z} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{I}$, y $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 = [1, 0, \ldots, 0]$, el primer vector canónico, de modo que $E_0 = \mathbb{D}^n$, la bola unitaria centrada en el origen y $H_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$. El conjunto $E_0' = E\Big(\frac{\mathbf{e}_1}{n+1}, \frac{n^2}{n^2-1}\Big(\mathbf{I} - \frac{2}{n+1}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^\intercal\Big)\Big)$ es un elipsoide, pues la matriz es diagonal con entradas positivas, es decir simétrica y definida positiva. Ahora bien, $\mathbf{x} \in E_0' \iff$

$$\Big(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{e}_1}{n+1}\Big)^\intercal \Big(\frac{n^2}{n^2-1}\Big(\mathbf{I} - \frac{2}{n+1}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^\intercal\Big)\Big)^{-1} \Big(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{e}_1}{n+1}\Big) \leq 1 \iff$$
$$\Big(x_1 - \frac{1}{n+1}\Big)^2 \Big(\frac{n^2-1}{n^2}\Big)\Big(\frac{n+1}{n-1}\Big) + \frac{n^2-1}{n^2}\sum_{i=2}^n x_i^2 \leq 1 \iff$$
$$\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^2 \Big(-\frac{2x_1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\Big) + \frac{2(n+1)}{n^2}x_1^2 + \frac{n^2-1}{n^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \iff$$
$$\frac{1}{n^2} + \frac{2(n+1)}{n^2}x_1(x_1-1) + \frac{n^2-1}{n^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1.$$

Dado $\mathbf{x} \in E_0 \cap H_0$, $0 \leq x_1 \leq 1$, luego $x_1(x_1-1) \leq 0$ y como $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1$ se obtiene,

$$\frac{n^2-1}{n^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2(n+1)}{n^2}x_1(x_1-1) \leq \frac{n^2-1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = 1,$$

Es decir, $\mathbf{x} \in E_0'$ y tenemos para este caso $E_0 \cap H_0 \subset E_0'$. Ahora tomamos el elipsoide arbitrario $E = E(\mathbf{z}, \mathbf{M})$ y construimos una transformación afín $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $T(E) = E_0$, $T(H) = H_0$ y $T(E') = E_0'$. Como las transformaciones de este tipo conservan inclusión y en particular T^{-1} también es afín, al tener $E_0 \cap H_0 \subset E_0' \implies T^{-1}(E_0) \cap T^{-1}(H_0) \subset T^{-1}(E_0') \iff E \cap H \subset E'$. Por propiedades de $\mathbf{M}$ existe $\mathbf{M}^{1/2}$ simétrica y definida positiva (entonces tiene inversa) tal que $(\mathbf{M}^{1/2})^2 = \mathbf{M}$. Tomamos la matriz de rotación $\mathbf{R}$ (matriz ortogonal que preserva la norma) tal que $\mathbf{R}\mathbf{M}^{\mathbf{1/2}}\mathbf{a} = \|\mathbf{M}^{1/2}\mathbf{a}\|\mathbf{e}_1$, y definimos la transformación que nos servirá para demostrar la primera parte del lema, $T(\mathbf{x}) := \mathbf{R}\mathbf{M}^{-1/2}(\mathbf{x} - \mathbf{z})$. Es afín pues es de la forma $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ con $\mathbf{A}$ invertible. Ahora bien,

$$\mathbf{x} \in E \iff (\mathbf{x} - \mathbf{z})^\intercal \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \leq 1 \iff$$
$$(\mathbf{x} - \mathbf{z})^\intercal \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{R}^\intercal\mathbf{R}\mathbf{M}^{-1/2}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \leq 1 \iff \mathbf{R}\mathbf{M}^{-1/2}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \in E_0 \iff T(\mathbf{x}) \in E_0$$

Es decir, $T(E) = E_0$. Por otra parte,

$$\mathbf{x} \in H \iff \mathbf{a}^\intercal\mathbf{x} \geq \mathbf{a}^\intercal\mathbf{z} \iff \mathbf{a}^\intercal(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \geq 0 \iff \mathbf{a}^\intercal\mathbf{M}^{1/2}\mathbf{R}^\intercal\mathbf{R}\mathbf{M}^{-1/2}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \geq 0 \iff$$
$$\|\mathbf{M}^{1/2}\mathbf{a}\|\mathbf{e}_1^\intercal T(\mathbf{x}) \geq 0 \iff \mathbf{e}_1^\intercal T(\mathbf{x}) \geq 0 \iff T(\mathbf{x}) \in H_0$$

Es decir, $T(H) = H_0$. La demostración de que $\mathbf{M}'$ es simétrica y definida positiva, y $T(E') = E_0'$ se omite. Como ya se explicó esto prueba la primera afirmación del lema.

Ahora veamos que $Vol(E') < e^{-\frac{1}{2(n+1)}} Vol(E)$:
Dado $C \subset \mathbb{R}^n$, sabemos que $Vol(C) = \int_C d\mathbf{x}$. Además, si $U(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ es una transformación afín, $Vol(U(C)) = |\det A|\, Vol(C)$. En particular,

$$\frac{Vol(E')}{Vol(E)} = \frac{Vol(U(E'))}{Vol(U(E))} = \frac{Vol(E_0')}{Vol(E_0)}$$

Esta vez consideramos la transformación $S(\mathbf{x}) := \left(\frac{n^2}{n^2-1}\left(\mathbf{I} - \frac{2}{n+1}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^\intercal\right)\right)^{-1/2}\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{e}_1}{n+1}\right)$, de modo que,

$$\mathbf{x} \in E_0' \iff \left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{e}_1}{n+1}\right)^\intercal \left(\frac{n^2}{n^2-1}\left(\mathbf{I} - \frac{2}{n+1}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^\intercal\right)\right)^{-1}\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{e}_1}{n+1}\right) \leq 1 \iff$$

$$\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{e}_1}{n+1}\right)^\intercal \left(\frac{n^2}{n^2-1}\left(\mathbf{I} - \frac{2}{n+1}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^\intercal\right)\right)^{-1/2}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\left(\mathbf{I} - \frac{2}{n+1}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^\intercal\right)\right)^{-1/2}\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{e}_1}{n+1}\right) \leq 1 \iff$$

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\left(\mathbf{I} - \frac{2}{n+1}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^\intercal\right)\right)^{-1/2}\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{e}_1}{n+1}\right) \in E_0 \iff S(\mathbf{x}) \in E_0$$

Obteniendo $S(E_0') = E_0$. Entonces,

$$\frac{Vol(E_0)}{Vol(E_0')} = \left|\det\left(\left(\frac{n^2}{n^2-1}\left(\mathbf{I} - \frac{2}{n+1}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^\intercal\right)\right)^{-1/2}\right)\right| \iff$$

$$\frac{Vol(E')}{Vol(E)} = \frac{Vol(E_0')}{Vol(E_0)} = \sqrt{\det\left(\frac{n^2}{n^2-1}\left(\mathbf{I} - \frac{2}{n+1}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^\intercal\right)\right)} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n/2}\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{n}{n+1}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} < e^{-\frac{1}{n+1}}\left(e^{-\frac{1}{n^2-1}}\right)^{\frac{n-1}{2}} = e^{-\frac{1}{2(n+1)}}$$

Es decir, $Vol(E') < e^{-\frac{1}{2(n+1)}} Vol(E)$.

□

2. Algoritmo del elipsoide

Dado un poliedro $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$, el problema de determinar si este es o no vacío es de gran importancia. Idealmente quisiéramos tener un algoritmo que responda la pregunta para poliedros arbitrarios, no obstante, el método presentado solo se aplica a poliedros acotados, y que son o bien vacíos, o full-dimensional (de volumen positivo). Por esta razón, además de la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{b}$, el método necesita que le brinden cotas superior e inferior del volumen del poliedro, $v < Vol(P) < V$. A continuación la explicación detallada del algoritmo:

Input:

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ que determinan al poliedro P.
- $v > 0$ tal que P es vacío o $Vol(P) > v$.
- $\mathbf{x}_0, r > 0$ que determinan una bola $E_0 = E(\mathbf{x}_0, r^2\mathbf{I}) \supset P$ y de volumen a lo más V.

Algoritmo:
El número máximo de iteraciones será $t^* := 2(n+1)\lceil \ln(\frac{V}{v})\rceil$ e inicialmente se tiene $E_0, \mathbf{M}_0 := r^2\mathbf{I}, t = 0$.

- Si $t = t^*$, retorna el mensaje, P es vacío, y termina el método.

- Si $\mathbf{x}_t \in P$, retorna $\mathbf{x}_t$ y termina el método pues P es no vacío.
- Si $\mathbf{x}_t \notin P$, busca $i \in [m]$ tal que $\mathbf{a}_i^\intercal \mathbf{x}_t < b_i$.
- Sea $H_t \coloneqq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\intercal \mathbf{x} \geq \mathbf{a}_i^\intercal \mathbf{x}_t\}$. Aplicando el lema 1 se puede obtener $E_{t+1} \coloneqq E(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{M}_{t+1}) \supset E_t \cap H_t$, donde,
$$\mathbf{x}_{t+1} \coloneqq \mathbf{x}_t + \frac{1}{n+1} \frac{\mathbf{M}_t \mathbf{a}_i}{\sqrt{\mathbf{a}_i^\intercal \mathbf{M}_t \mathbf{a}_i}},$$
$$\mathbf{M}_{t+1} \coloneqq \frac{n^2}{n^2-1}\Big(\mathbf{M}_t - \frac{2}{n+1} \frac{\mathbf{M}_t \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^\intercal \mathbf{M}_t}{\mathbf{a}_i^\intercal \mathbf{M}_t \mathbf{a}_i}\Big).$$
- $t \coloneqq t+1$.

Output:
$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_t \in P$ si P es no vacío, o un mensaje, P es vacío.

Teorema 1. *Sea P poliedro acotado, vacío o full-dimensional, y los inputs restantes del algoritmo $\mathbf{x}_0, r, v, V$. El método del elipsoide determina correctamente si el poliedro es vacío o no (es decir, $\mathbf{x}_{t^*-1} \notin P$ luego P es vacío).*

Demostración. Dada una iteración tal que $t < t^*$, si $\mathbf{x}_t \in P$, el algoritmo termina y es correcto. Asuma por el contrario $\mathbf{x}_{t^*-1} \notin P$. Queremos ver $P \subset E_k$, $\forall k = 0, 1, \ldots, t^*$. Procedemos por inducción. El caso $k = 0$ es cierto por hipótesis. Asumamos que se cumple $\forall k < t^*$. Sea $\mathbf{a}_i$ la fila de la matriz correspondiente a la desigualdad que no se cumple, encontrada por el algoritmo al ver que $\mathbf{x}_k \notin P$, entonces $\forall \mathbf{x} \in P$, $\mathbf{a}_i^\intercal \mathbf{x} \geq b_i > \mathbf{a}_i^\intercal \mathbf{x}_k$, de modo que $P \subset H_k$ y a su vez obtenemos $P \subset E_k \cap H_k$. Por construcción obtenemos $P \subset E_{k+1}$, que termina la inducción. De nuevo haciendo uso del lema obtenemos,

$$\frac{Vol(E_{t^*})}{Vol(E_0)} < e^{-\frac{t^*}{2(n+1)}} \iff Vol(E_{t^*}) < Ve^{-\frac{2(n+1)\lceil \ln(\frac{V}{v})\rceil}{2(n+1)}} \leq Ve^{-\ln \frac{V}{v}} = v.$$

Por hipótesis, el algoritmo concluye correctamente que el poliedro es vacío pues $Vol(P) < v$. □

3. Relajación de las hipótesis

Se debe modificar el método para poder usarlo con poliedros no acotados y no full-dimensional. Primero veamos el caso en el que el poliedro es no acotado, para el cual se tendrá en cuenta el siguiente lema.

Lema 2. *Sean $\mathbf{A}$ una matriz m x n con entradas enteras y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Sea U el máximo valor de las entradas con valor absoluto de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{b}$, entonces, todo punto extremo del poliedro*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \geq b\}$$

cumple con

$$|x_i| \leq (nU)^n, i = 1, ..., n$$

Demostración. Dada la matriz A tomamos n restricciones que sean linealmente independientes, tomamos $\hat{A}x = \hat{b}$ como las restricciones que son lineal mente independientes,con A una submatriz invertible de $\hat{A}$ y $\hat{b}$ un subvector de b, de aquí se puede concluir que la solución de este nuevo sistema se puede hacer usando regla de Cramer, la cual nos dice que $X_j = \frac{|\hat{A}_j|}{|\hat{A}|}$ donde $\hat{A}_j$ es la matriz $\hat{A}$ cambiando la columna $j - esima$ por b.
Así se obtiene que

$$|\hat{A}_j| = \sum_{\sigma}(-1)^{|\sigma|}\prod_{i=1}^{n}|a_{i,\hat{\sigma(i)}}|$$

Por un lado se tiene que

$$|\hat{A}_j| \leq |\hat{A}_j| = \sum_{\sigma}\prod_{i=1}^{n}|a_{i,\hat{\sigma(i)}}$$

como n es el numero de permutaciones posibles entonces hay n! funciones σ, y se tiene que $|a_{\hat{i,\sigma i}}| \leq U$, entonces,

$$|\hat{A}_j| \leq \sum_{\sigma} U^n = n!U^n \leq (nU)^n$$

Por otra parte tenemos que al ser entradas enteras se cumple con que $|det(\hat{A})| \geq 1$ esto implica que $|x_j| \leq (nU)^n$

□

Dado el lema anterior, se puede observar que si x es un punto extremo entonces $x \in P_B = \{x \in R^n||x_i| \leq (nU)^n, i = 1, ..., n\}$, por otra parte, dado que P_B está acotado, se puede hallar una bola de radio R en R^n en la cual esté contenido P_B. El radio de está bola lo vamos a tomar tal que se cumpla la siguiente hiperesfera $E = (0, n(nU)^{2n}I)$ siendo I la matriz identidad de nxn, ahora, veamos que el volumen de una hiperesfera va a a estar acotado por $(2R)^2)^n$, de lo cual se concluye que para nuestro caso $Vol(E) < (2n(nU)^{2n})^n$. De esta manera, se obtiene que el primer paso del método va a ser una hiperesfera $E = (0, n(nU)^{2n}I)$ ya que todos los óptimos factibles ya están contenidos en este.
Segundo, es posible encontrar politopos con volumen cero pero no vacios, por ejemplo, si se considera un politopo con dimensión menor que n este tiene volumen 0, por lo cual tenemos que si se usa el método para estos politopos el método concluye que es vacio. Para estos casos se debe considerar una pequeña perturbación de un poliedro no vacio me produce un poliedro full-dimensional, lo que nos lleva a plantear el siguiente lema.

Lema 3. *Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n|Ax \geq b\}$ con las mismas condiciones del lema anterior, se obtiene que el poliedro definido por*

$$P_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n|Ax \geq b - \epsilon\}$$

con $\epsilon = \frac{1}{2(n+1)((n+1)U)^{n+1}} * e$ con e un vector con uno en cada entrada se da que

- *Si P es vacio, entonces P_ϵ*
- *Si P es no vacio, entonces P_ϵ*

Finalmente para poder usar el método en cualquier politopo falta hallar un v tal que $Vol(p) > v$, lo cual nos lleva al siguiente lema

Lema 4. *Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n|Ax \geq b\}$ un politopo full-dimensional con **A** y b con entradas enteras, entonces*

$$Vol(P) > \frac{1}{n^n(nU)^{n^2(n+1)}}$$

4. Problemas de optimización

En conclusión, para resolver problemas de optimización como el siguiente

$$min. \quad c^t x$$

$$s.a \quad Ax \geq b$$

con su respectivo dual

$$max. \quad b^t p$$

$$s.a \quad A^t p = c$$

$$p \geq 0$$

Dado que estos problemas tienen solución sii el siguiente problema tiene solución factible

$$b^t p = c^t x$$

$$Ax \geq b$$

$$A^t p = c$$

$$p \geq 0$$

Lo que nos lleva a plantear el siguiente politopo $Q = \{z \in R^{n+m} | Cz \geq h\}$ donde C esta descrito como

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A^t \\ \hline 0 & A^t \\ \hline c^t & -b^t \\ \hline -c^t & b^t \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right]$$

con z igual a

$$z = \left[\begin{array}{c} \vec{x} \\ \hline \vec{p} \end{array}\right]$$

con h igual a

$$h = \left[\begin{array}{c} \vec{b} \\ \hline \vec{c} \\ \hline -\vec{c} \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \vec{0} \end{array}\right]$$

De esta manera, si se usa el método elipsoide para resolver este politopo se va tener que la solución factible $(\vec{x*}, \vec{p*})$ obtenida por el algoritmo,represta el primer vector $\vec{x*}$ como una solución del problema primal y $\{\vec{p*}$ como solución del problema Dual.

Referencias

[1] Bertsimas, D., Tsitsiklis, N. (1997). *Introduction to Linear Optimization* (2nd. print., pp. 359-379). Belmont, Massachusetts: Athena Scientific.