CALCOLO NUMERICO E MATLAB

Docenti: C. Canuto, S. Falletta, S. Pieraccini

Esercitazione

Argomento: Equazioni differenziali ordinarie

1. Implementare in due *m-file* di tipo *function*, denominati `eulero_esp.m` e `heun.m`, il metodo di Eulero esplicito e il metodo di Heun, rispettivamente, per risolvere il problema. di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x) + x + 1, \quad x \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

la cui soluzione è $y(x) = x + e^{-x}$.

Strutturare le *function* in modo tale che, ricevendo in input la funzione $f(x, y)$ (definita mediante un'altra *function*), i valori x_0 ed y_0 della condizione iniziale, il punto x_N fino al quale si vuole integrare il problema ed il valore N con il quale si controlla l'ampiezza del passo d'integrazione ($h = (x_N - x_0)/N$), restituisca in output i vettori x ed y contenenti rispettivamente i nodi dell'intervallo di integrazione (equidistanti con passo h) e le corrispondenti approssimazioni della funzione incognita $y(x)$.

Approssimare la soluzione nel punto $x = x_N = 1$, scegliendo $N = 10^k$ con $k = 1, 2, 3$. Indicata con y_N la soluzione approssimata fornita dal metodo in x_N, calcolare per ciascun valore di k l'errore assoluto $|y(x) - y_N|$ e disegnare all'interno della medesima finestra grafica la curva soluzione e le curve approssimanti.

2. Modificare le *function* `eulero_esp` e `heun.m` in modo tale che possano integrare il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \ldots, y_m(x)), \quad x \geq x_0, \\ \vdots \\ y_m'(x) = f_m(x, y_1(x), \ldots, y_m(x)), \\ y_1(x_0) = y_{1,0}, \\ \vdots \\ y_m(x_0) = y_{m,0}, \end{cases}$$

costituito da un sistema di m equazioni differenziali del primo ordine nelle incognite $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_m(x)$ e da m condizioni iniziali nel punto x_0.

3. Trasformare il seguente problema

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 1,$$

la cui soluzione è $y(x) = e^x$, in un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine ed applicare ad esso il metodo di Eulero esplicito. In particolare, approssimare la soluzione nel punto $x = x_N = 1$, scegliendo $N = 10^k$ con $k = 1, 2, 3$. Indicata con y_N la soluzione approssimata fornita dal metodo in x_N, calcolare per ciascun valore di k l'errore assoluto $|y(x) - y_N|$.

4. Risolvere il problema

$$y'' = 0.1(1 - y^2)y' - y, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1,$$

utilizzando il metodo di Eulero esplicito e il metodo di Heun.

5. Risolvere i problemi di Cauchy degli esercizi 1 e 3 mediante le *function* di Matlab `ode45` e `ode23`. Utilizzare fra le opzioni possibili `stats=on` per ricevere informazioni sul costo computazionale dell'esecuzione, e `AbsTol=tolla`, `RelTol=tollb` per imporre i valori `tolla` e `tollb` alla tolleranza assoluta e relativa, rispettivamente.

6. Applicare i metodi di Eulero esplicito e implicito all'equazione

$$y' = -10^3 y,$$

con condizione iniziale $y(0) = 1$ e passo di integrazione $h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$. Confrontare i risultati.

7. Applicare il metodo di Heun al problema

$$\begin{cases} y'(x) = -10^3(y(x) - cos(x)) - sin(x), & x \geq 0, \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

la cui soluzione è $y(x) = e^{-10^3 x} + cos(x)$. Approssimare la soluzione nel punto $x_N = 1$, scegliendo $N = 10^k$ con $k = 1, 2, 3, 4$. Indicata con y_N la soluzione approssimata in x_N, calcolare per ciascun valore di k l'errore assoluto $|y(x_N) - y_N|$. Commentare i risultati.