ANALISI MATEMATICA II

ESERCITAZIONE 1

Argomenti: vettori, matrici, grafici, aritmetica del calcolatore

1. Definire il vettore `x=[1:-0.1:0]` e comprendere il significato dei seguenti comandi MATLAB:

   a) `x([1 4 3]);`

   b) `x([1:2:7 10])=zeros(1,5);`

   c) `x([1 2 5])=[0.5*ones(1,2) -0.3];`

   d) `y=x(end:-1:1)`.

2. Definire la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$
e comprendere il significato dei seguenti comandi MATLAB:

   a) `size(A);`

   b) `B=A.*A;`

   c) `B=A*A;`

   d) `B=A'*A;`

   e) `B=A*A';`

   f) `A(1:2,4), A(:,3), A(1:2,:), A(:,[2 4]), A([2 3 3],:);`

   g) `A(3,2)=A(1,1);`

   h) `A(1:2,4)=zeros(2,1);`

   i) `A(2,:)=A(2,:)-A(2,1)/A(1,1)*A(1,:)`.

3. Definire la matrice tridiagonale B di dimensione 10×10, i cui elementi della diagonale principale sono tutti uguali a 5 e quelli delle codiagonali inferiore e superiore sono rispettivamente uguali a -1 e a 3. Quindi porre uguale a 2 gli elementi $B_{5,6}$, $B_{5,9}$, $B_{8,6}$, $B_{8,9}$.

4. Definire la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$
Successivamente generare le matrici
$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
con $\lambda = 10$, e calcolare i prodotti

   a) $L_1 = P_1\, A$ e $R_1 = A\, P_1$;

b) $L_2 = P_2\,A$ e $R_2 = A\,P_2$;

c) $L_3 = P_3\,A$ e $R_3 = A\,P_3$.

Commentare i risultati. Generare infine le matrici L_i e R_i, $i = 1, 2, 3$, a partire dalla matrice A, senza utilizzare le matrici P_i, $i = 1, 2, 3$.

5. Utilizzare il comando MATLAB più appropriato per rappresentare graficamente le seguenti funzioni:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \tan(x), \text{ in } [0, \pi/4] \\
f_2(x) &= \tan(x), \text{ in } [\pi/4, \pi/2) \\
f_3(x) &= \sqrt{\frac{100(1-0.01x^2)^2 + 0.02x^2}{(1-x^2)^2 + 0.1x^2}}, \text{ in } [0.1, 100].
\end{aligned}
$$

6. Utilizzare il comando MATLAB più appropriato per rappresentare graficamente un'elica circolare, la cui equazione parametrica è

$$x = a\cos(t); y = a\sin(t); z = bt;$$

dove a è il raggio del cerchio dell'elica e b è una costante che determina la "densità dei passi" dell'elica. Si scelga i) $t \in [0, 10\pi]$, $a = 1, b = -0.1$; ii) $t \in [0, 20\pi]$, $a = 1, b = 0.1$.

7. Utilizzare i comandi `mesh` e `surf` per il grafico delle funzioni

$$
\begin{aligned}
f_1(x, y) &= x(x-1)y(y-1) \\
f_2(x, y) &= x(x-1)\sin(8x)y(y-1)\cos(8y)
\end{aligned}
$$

sul quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

8. I seguenti numeri vengono introdotti in un calcolatore nel quale i numeri vengono rappresentati in aritmetica floating-point, con base $N = 10$ e $t = 5$ cifre riservate alla mantissa (tecnica di arrotondamento (ii)):

$$
\begin{aligned}
a &= 1.483593, \\
b &= 1.484111.
\end{aligned}
$$

Utilizzare il comando `chop` di MATLAB per determinare il risultato $\bar{s} = \bar{a} \ominus \bar{b}$, ove $\bar{x}$ denota il numero di macchina corrispondente ad x e $\ominus$ denota l'operazione di macchina corrispondente all'operazione aritmetica della sottrazione. Confrontare $\bar{s}$ con $c = a - b$ e calcolare l'errore relativo corrispondente.

9. Valutare le espressioni

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{1-\cos(x)}{x^2}, \\
f_2(x) &= \frac{1-e^x}{x}, \\
f_3(x) &= 1 - \sqrt{1-x^2}, \\
f_4(x) &= \frac{(x+1)^2 - 1}{x}
\end{aligned}
$$

in $x = 10^{-n}$ per $n = 1, 2, ..., 16$. Successivamente riformulare le funzioni assegnate al fine di evitare il fenomeno della cancellazione numerica e, assumendo come valori esatti quelli che si ottengono mediante la riformulazione proposta, calcolare i corrispondenti errori relativi e confrontarli con la precisione di macchina. Stampare e rappresentare graficamente per ogni valore di x l'errore relativo corrispondente.

Esercizi facoltativi

1. Calcolare i termini delle successioni $\{x_n\}$, $\{z_n\}$, $\{u_n\}$:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \qquad x_{n+1} = 2^{n-1/2}\sqrt{1-\sqrt{1-4^{1-n}x_n^2}}$$

$$z_1 = 1, \quad z_2 = 2, \qquad z_{n+1} = 2^{n-1/2}\frac{\sqrt{4^{1-n}z_n^2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-4^{1-n}z_n^2}}}$$

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1+\tfrac{1}{4}, \quad u_{n+1} = \sqrt{6y_{n+1}} \text{ con } y_1 = 1,\ y_2 = 1+\frac{1}{4}, y_{n+1} = y_n + \frac{1}{(n+1)^2}$$

tutte convergenti a π. Disegnare in un unico grafico il logaritmo dell'errore relativo associato a x_n, z_n, u_n, per $n = 1, ..., 100$ e commentare i risultati.

2. Posto $h = 10^{-1}, 10^{-2}, ..., 10^{-15}$, si approssimi la derivata di $\exp(x)$ in $x = 1$ con il rapporto incrementale
$$\frac{\exp(1+h)-\exp(1)}{h}$$
e quindi si valuti l'errore assoluto associato a quest'ultimo utilizzando il valore esatto $\exp(1)$. L'approssimazione migliora al diminuire di h?

3. Sia data la serie geometrica $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ di ragione $q = \frac{1}{3}$. Si calcoli in aritmetica floating-point, con base $N = 10$ e $t = 4$ cifre riservate alla mantissa (tecnica di arrotondamento (ii)), la somma parziale $S_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} q^k$ per $m = 30$, utilizzando il ciclo `for i=1:m` e il ciclo inverso `for i=m:-1:1`. Si confrontino i risultati ottenuti con il valore esatto $S_m = \dfrac{1-q^{m+1}}{1-q}$, dandone una spiegazione.

4. Rappresentare graficamente il moto di una particella espresso in forma parametrica mediante le equazioni
$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ \\ y(t) = -4\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$
e i vettori velocità e accelerazione (utilizzando la *function* `quiver`) in 20 punti della traiettoria.