CALCOLO NUMERICO E MATLAB

Docenti: C. Canuto, S. Falletta, S. Pieraccini

Esercitazione 5

Argomento: Minimi quadrati e calcolo di autovalori

1. Si consideri il polinomio trigonometrico

$$P(x) = 2 + \tfrac{1}{3}\cos x - \tfrac{2}{5}\sin x - \tfrac{7}{100}\cos 2x + \tfrac{3}{200}\sin 2x - \tfrac{9}{1000}\cos 3x + \tfrac{11}{3000}\sin 3x.$$

   (a) Calcolare i suoi valori nei 128 punti equispaziati $x_j = \frac{\pi}{128}$, $0 \le j \le 127$ contenuti nell'intervallo $[0, \pi]$.

   (b) Usare questi valori per costruire un polinomio trigonometrico della forma

   $$Q(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \cos 2x + \alpha_4 \sin 2x.$$

   che approssima i dati sopra calcolati nel senso dei minimi quadrati.

   (c) Stimare l'errore tra i polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ sull'intervallo $[0, \pi]$.

2. Si consideri la matrice $\boldsymbol{A}$ di ordine 10 i cui elementi sono $a_{ij} = \max(i^2, j^2)$.

   (a) Ridurre la matrice a forma di Hessemberg;

   (b) eseguire le iterazioni del metodo QR per il calcolo degli autovalori di tale matrice, generando la successione di matrici $\boldsymbol{A}_k$;

   (c) arrestare le iterazioni quando la norma euclidea della prima sottodiagonale di $\boldsymbol{A}_k$ diventa $< 10^{-6}$;

   (d) calcolare l'errore massimo tra gli autovalori approssimati così calcolati e quelli "esatti" di $\boldsymbol{A}$.

3. Si consideri la matrice tridiagonale $\boldsymbol{A}$ di ordine 10 i cui elementi sono $a_{ii} = 4$ e $a_{i,i\pm1} = 1$.

   (a) Partendo da un vettore $\boldsymbol{z}$ di ordine 10 pseudo-casuale, applicare a tale matrice il metodo della potenza inversa con shift per calcolare l'autovalore più vicino al numero $\sigma = 3$.

   (b) Ripetere l'esperimento numerico con diversi vettori iniziali pseudo-casuali, e stimare quante iterazioni in media sono necessarie per stabilizzare le prime 8 cifre decimali dell'approssimazione.

   (c) Ripetere l'esperimento numerico partendo dal vettore iniziale $\boldsymbol{z}$ i cui elementi sono $z_i = (-1)^i$.

   Quante iterazioni sono ora necessarie per stabilizzare le prime 8 cifre decimali dell'approssimazione?

RISPOSTE

1. Il vettore $\boldsymbol{\alpha}$ contenente i coefficienti α_i è dato da

$$\boldsymbol{\alpha} = (1.9884 \;\; 0.3194 \;\; -0.3805 \;\; -0.0588 \;\; 0.0314)^T.$$

L'errore tra i valori di $P(x)$ e $Q(x)$ nei nodi, valutato rispettivamente in norma euclidea o in norma del massimo, è dato da

$$err_2 = 0.0198, \qquad err_\infty = 0.0053.$$

[Vedasi script Es5_1.m]

2. Il numero di iterazioni del metodo QR necessarie è $iter = 66$. Il massimo errore tra gli autovalori così calcolati e quelli forniti dal comando `eig` è $err_\infty = 3.7659e-13$.

[Vedasi script Es5_2.m]

3. Mediamente, partendo da un vettore iniziale pseudocasuale, ci vogliono circa 15 iterazioni per ottenere l'autovalore approssimato $\lambda_4 = 3.1691699...$.

Invece, partendo dal vettore iniziale $\boldsymbol{z}$ del punto *c)*, apparentemente l'algoritmo sembra convergere dopo 12 iterazioni verso $\lambda_3 = 2.6902785...$, ma se si eseguono circa 80 iterazioni si converge verso λ_4.

Il motivo è che il vettore $\boldsymbol{z}$ è ortogonale all'autovettore $\boldsymbol{w}_4$ relativo all'autovalore λ_4, e dunque in aritmetica esatta il metodo iterativo convergerebbe verso l'autovalore più vicino a 3, ma diverso da λ_4, e dunque λ_3. Ma gli errori di arrotondamento introducono a poco a poco in $\boldsymbol{z}$ una componente secondo l'autovettore $\boldsymbol{w}_4$, che si amplifica e porta alla convergenza verso λ_4.

[Vedasi script Es5_3.m]