Equazioni non lineari

Sandra Pieraccini

Politecnico di Torino, Dipartimento di Scienze Matematiche
sandra.pieraccini@polito.it
http://calvino.polito.it/~pieraccini

Calcolo Numerico e MATLAB

Ultimo aggiornamento: 28 novembre 2016

Argomenti trattati

$$f(x) = 0, \qquad f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

Soluzioni dette **zeri** o **radici**.

Quante soluzioni?

1. 0 ($x^2 + 1 = 0$)
2. 1 ($2x + 3 = 0$)
3. 1 con $m = 2$ ($x^2 - 4x + 4 = 0$)
4. 2 ($x^2 - 5x + 6 = 0$)
5. ∞ ($\frac{1}{x} + \sin(x) = 0$)
6. ...

In generale non esiste una formula risolutiva $\rightsquigarrow$ non esistono metodi diretti ma solo **iterativi**

Avremo due aspetti da analizzare:

1. Convergenza si/no
2. Velocità di convergenza

Qualunque metodo si intenda applicare, sarà sempre necessario effettuare uno studio preliminare della funzione in modo da **localizzare** le eventuali radici, i.e. determinare un intervallo (possibilmente piccolo) che contenga una e una sola radice.

Metodo di bisezione

Teorema (esistenza degli zeri per funzioni continue)

Se $f \in C[a,b]$ e $f(a)f(b) < 0$, $\exists c \in [a,b]$ t.c. $f(c) = 0$

Su questo teorema si basa il semplicissimo metodo di bisezione.
Sia $[a,b]$ l'intervallo in cui si è isolata la radice x^* e $m = \frac{a+b}{2}$.
Ho due possibilità (escludendo il caso fortuito $f(m) = 0$)

- Se $f(m)$ è discorde con $f(a)$, $x^* \in [a,m]$
- Se $f(m)$ è discorde con $f(b)$, $x^* \in [m,b]$

In entrambi i casi, ovviamente x^* continua ad essere l'unica radice nel nuovo intervallo di ampiezza dimezzata. E procedo iterativamente dimezzando ad ogni passo l'ampiezza dell'intervallo...

1. Dato $[a_0, b_0]$; $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$
2. Per $k = 0, 1, 2, ..., k_{\max}$
    1. Se $f(a_k)f(x_k) < 0$ poni $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_k$, altrimenti poni $a_{k+1} = x_k$, $b_{k+1} = b_k$
    2. Poni $x_{k+1} = \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$ (approx corrente soluzione)

Errore? x_k è il punto medio dell'intervallo corrente

$$e_k = |x_k - x_*| \leq \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{4} = \ldots = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}$$

Quindi $\lim_{k\to\infty} e_k = 0$ indipendentemente dall'intervallo iniziale $[a_0, b_0]$ (purchè contenga una e una sola radice).

Definizione

Il metodo di bisezione è globalmente convergente, poichè la convergenza è sempre garantita, qualunque sia la stima iniziale della soluzione.

Stima dell'errore

Supponiamo di voler garantire un errore assoluto inferiore ad una certa tolleranza ϵ.
Nel metodo di bisezione è possibile stabilire il numero massimo di iterazioni necessarie a soddisfare tale richiesta.
Infatti se garantiamo

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} < \epsilon \qquad \text{i.e. } k + 1 \geq \log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}\right)$$

avremo sicuramente anche $e_k \leq \epsilon$.

Velocità di convergenza

Definizione

Sia $\{x_k\}$ *una successione convergente a un limite* x^**. Sia* $e_k = |x_k - x^*|$*. Se esistono* $p \geq 1$ *e una costante* $c > 0$ *(*$c < 1$ *se* $p = 1$*) tale che*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = c$$

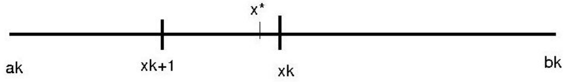
(i.e. asintoticamente $e_{k+1} = \mathcal{O}(e_k^p)$*) allora si dice che la successione converge con ordine p.*

1. $p = 1$ *convergenza lineare*
2. $p = 2$ *convergenza quadratica*
3. $1 < p < 2$ *convergenza superlineare*

Osservazione

Se c'è convergenza lineare, $\lim_{k\to\infty} e_{k+1}/e_k < 1$*. Quindi (teorema della permanenza del segno) asintoticamente l'errore deve diminuire monotonicamente* ($e_{k+1} < e_k$)*.*

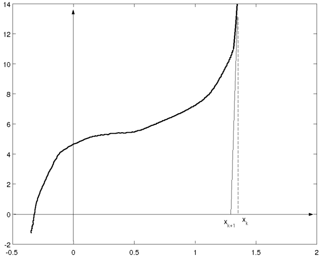
Metodo di bisezione non garantisce decrescita monotona dell'errore $\rightsquigarrow$ *velocità di convergenza meno che lineare! (sublineare)*

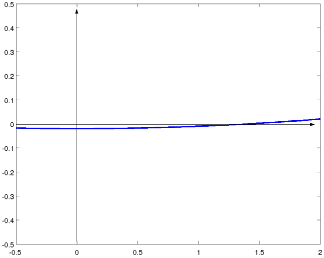


- Metodo bisezione quindi globalmente convergente ma molto lento
- Sfrutta solo il segno della funzione.

Test di arresto

1. $|f(x_k)| \leq \texttt{tol}_f$, con $\texttt{tol}_f$ tolleranza fissata dall'utente
2. $|f(x_k)| \leq \texttt{tol}_f |f(x_0)|$, per un criterio relativo
3. $|x_{k+1} - x_k| \leq \texttt{tol}_x |x_{k+1}|$, con $\texttt{tol}_x$ tolleranza fissata dall'utente





Esercizio proposto

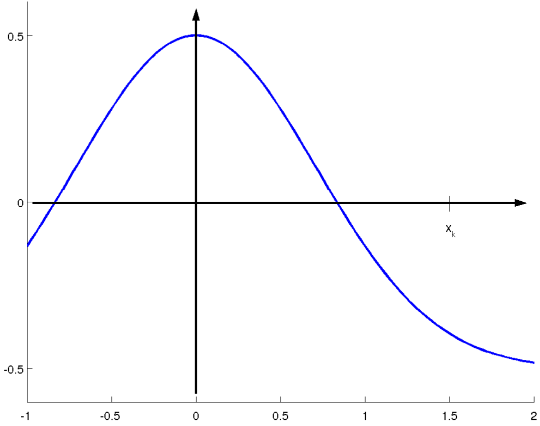
Implementare il metodo di bisezione in una `function`, arrestando le iterazioni quando il residuo è sceso sotto una tolleranza fissata. Applicarlo agli zeri della funzione $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x^3 + 4x^2 + 1$.

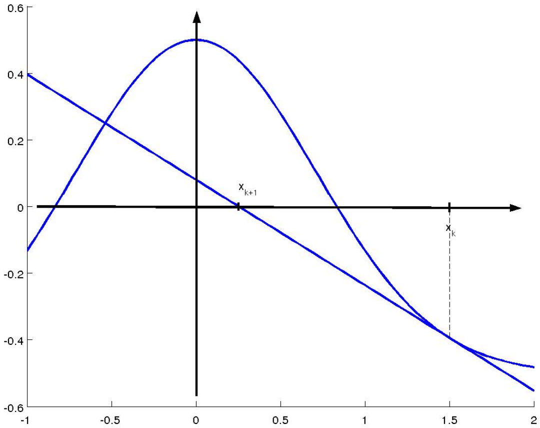
Metodo di Newton o delle tangenti

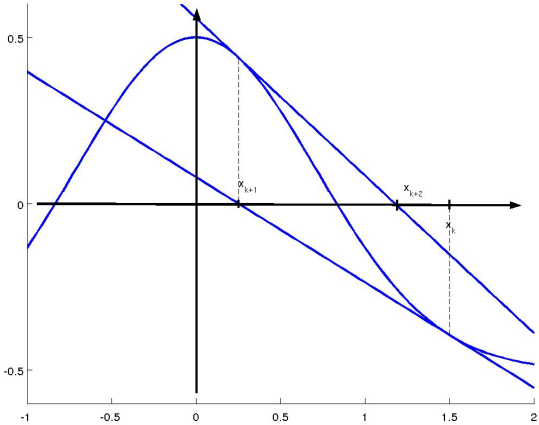
- Il metodo di Newton sfrutta informazioni sia sul valore di $f(x)$ che di $f'(x)$
- Sia x_k la stima corrente della soluzione di $f(x) = 0$
- Approssimiamo localmente f con la retta tangente passante per il punto $(x_k, f(x_k))$:

$$r_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

- Cerchiamo i punti in cui $r_k(x) = 0$


0.5
0
-0.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
x_k


0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
x_{k+1}
x_k


0.5
0
-0.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
x_{k+1}
x_{k+2}
x_k

x_{k+1} t.c. $r_k(x_{k+1}) = 0$:

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

- Richiede ad ogni passo $f(x_k)$ e $f'(x_k)$
- Se $f'(x_k) = 0$ per qualche k il procedimento si blocca

Velocità di convergenza

Teorema

Sia $f \in C^2$ in un intorno della soluzione x^*. **Se** *la successione $\{x_k\}$ generata dal metodo di Newton converge a x^* e $f'(x^*) \neq 0$, allora l'ordine di convergenza è (almeno) $p = 2$.*

Osservazione

$f'(x^*) = 0 \Rightarrow x^*$ *radice multipla. Se molteplicità m è nota, la seguente correzione del metodo di Newton ha ordine $p = 2$:*

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Esercizio proposto

Implementare il metodo di Newton in una `function`, arrestando le iterazioni quando il residuo è sceso sotto una tolleranza fissata. Applicarlo alla funzione $f(x) = x^2 - 7$ per trovarne la radice positiva. Confrontare con il risultato prodotto dal metodo di bisezione, e con il risultato esatto $\sqrt{7}$.

Esempio: Confronto bisezione/Newton

$x^2 - 2 = 0$, $x^* = \pm\sqrt{2}$. La radice positiva $\sqrt{2} = 1.41421356237310$ localizzata in $[1, 2]$.
Confrontiamo bisezione e Newton con $[a_0, b_0] = [1, 2]$ e $x_0 = 1$ rispettivamente

k	x_k^{bis}	e_k^{bis}	x_k^{New}	x_k^{New}
0	$\underline{1}.5$	$8.6e-02$	$\underline{1}.5$	$8.6e-02$
1	$\underline{1}.25$	$1.6e-01$	$\underline{1.41}666666666667$	$2.5e-03$
2	$\underline{1}.375$	$3.9e-02$	$\underline{1.414215}68627451$	$2.1e-06$
3	$\underline{1.4}375$	$2.3e-02$	$\underline{1.41421356237}469$	$1.6e-12$
4	$\underline{1.4}0625$	$7.9e-03$	$\underline{1.41421356237310}$	"0"
$\vdots$				
13	$\underline{1.4142}4560..$	$3.2e-05$		

È un procedimento globalmente convergente?

Esempio: La scelta del punto iniziale

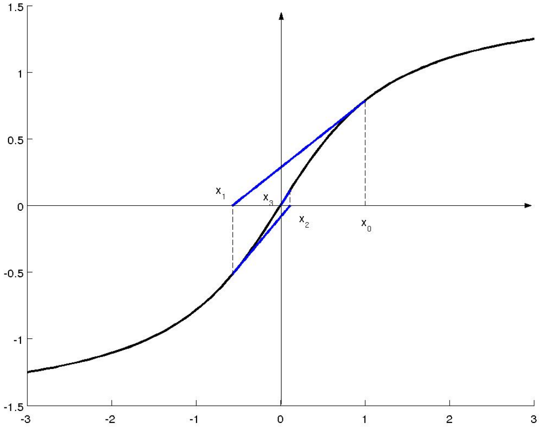
$$f(x) = \arctan(x)$$

Banalmente la soluzione è $x^* = 0$

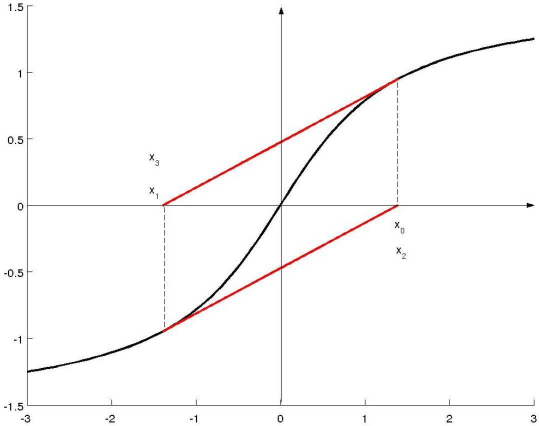
Applichiamo il metodo di Newton con tre stime iniziali diverse:

$$x_0 = 1, \qquad x_0 = 1.3917, \qquad x_0 = 1.46$$

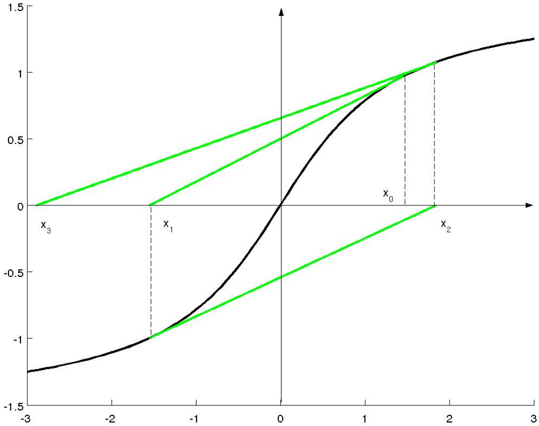
Apparentemente tutte e tre ragionevolmente vicine alla soluzione esatta.



$$x_0 = 1$$



$$x_0 = 1.3917$$



$$x_0 = 1.46$$

Metodi Netwon-like

Metodo di Newton molto costoso perché richiede ad ogni passo $f(x_k)$ e $f'(x_k)$

Varianti del metodo approssimano opportunamente la derivata

1. Newton alle differenze: $f'(x_k)$ approssimata con differenze in avanti/all'indietro
2. Metodo delle secanti:

$$f'(x_k) \simeq \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Metodo delle secanti:

- Vantaggio: sfrutta valutazioni di funzione già fatte. Costo a regime: solo valutazione di $f(x_k)$
- Svantaggio: richiede due stime iniziali x_0 e x_1
- "Svantaggio": $p = (1 + \sqrt{5})/2$

Esercizio proposto

Implementare il metodo delle secanti ed applicarlo all'equazione $x^2 - 7 = 0$.

Verifica sperimentale dell'ordine di convergenza

Come possiamo verificare *sperimentalmente* l'ordine di convergenza di un metodo?
Determinare p tale che $|e_{k+1}| \simeq c|e_k|^p$ (e quindi $|e_k| \simeq c|e_{k-1}|^p$).

$$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} \simeq \left(\frac{|e_k|}{|e_{k-1}|}\right)^p$$

Passando ai logaritmi:

$$p \simeq \frac{\log\left(\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}\right)}{\log\left(\frac{|e_k|}{|e_{k-1}|}\right)}$$

Ovviamente, la formula è applicabile solo se si può calcolare esattamente gli errori. In caso contrario, si può applicarla usando la differenza tra due iterate al posto dell'errore:

$$p \simeq \frac{\log\left(\frac{|x_{k+1}-x_k|}{|x_k-x_{k-1}|}\right)}{\log\left(\frac{|x_k-x_{k-1}|}{|x_{k-1}-x_{k-2}|}\right)}$$

Esercizio proposto

Verificare sperimentalmente l'ordine di convergenza del metodo di Newton e del metodo delle Secanti negli esempi indicati.

Verifica sperimentale dell'ordine di convergenza - II

Un altro modo per verificare sperimentalmente l'ordine di convergenza:
Determinare p tale che $|e_{k+1}| \simeq c|e_k|^p$.
Passando ai logaritmi:

$$\log(|e_{k+1}|) \simeq \log(c) + p\log(|e_k|)$$

Usando l'approssimazione nel senso dei minimi quadrati, si possono ricavare le costanti c e p.

Anche in questo caso, si può applicare la formula usando la differenza tra due iterate al posto dell'errore.

Esercizio proposto

Verificare sperimentalmente l'ordine di convergenza del metodo di Newton e del metodo delle Secanti negli esempi indicati.

Il caso dei sistemi

Il metodo di Newton è facilmente estendibile al caso di un sistema di equazioni non lineari

$$F(x) = 0, \qquad F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

Sviluppo di Taylor centrato in $x_k \in \mathbb{R}^n$ ed arrestato al primo ordine:

$$F(x) \simeq F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k)$$

con $F'(x_k)$ matrice jacobiana.

Cerco x_{k+1} tale che

$$F(x_k) + F'(x_k)(x - x_k) = 0$$

$$F'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -F(x_k)$$

$$F'(x_k)s = -F(x_k), \qquad s = x_{k+1} - x_k$$

$$x_{k+1} = x_k + s, \qquad F'(x_k)s = -F(x_k), \qquad k \geq 0$$

Comandi MATLAB

- `fzero`
- `fsolve` (Optimization toolbox)

Problema di punto fisso

Data $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ determinare x t.c.

$$\phi(x) = x$$

Osservazione

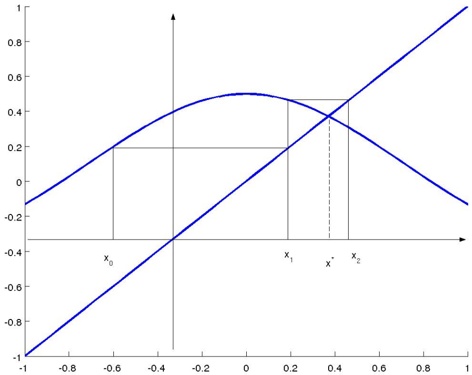
Il problema di punto fisso di presenta da solo in moltissime applicazioni. È comunque possibile ricondurre anche un'equazione nonlineare $f(x) = 0$ a un problema di punto fisso in infiniti modi:

$$\underbrace{f(x) + x}_{\phi} = x, \qquad \underbrace{\sqrt[3]{f(x) + x^3}}_{\phi} = x, \qquad \underbrace{\frac{f(x) + kx}{k}}_{\phi} = x, \qquad \dots$$

Metodo delle iterate successive o delle iterazioni di punto fisso

Dato x_0,

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \qquad k = 0, 1, \dots$$



Un risultato "locale"

Teorema

Se $|\phi'(x^*)| < 1$ *esiste un intorno* I *di* x^* *tale che la successione* $\{x_k\}$ *converge se* $x_0 \in I$. *Se viceversa* $|\phi'(x^*)| > 1$ *il metodo delle iterate successive non può convergere.*

- Se $|\phi'(x^*)| = 1$ il metodo delle iterate successive può convergere o non convergere.

Esercizio proposto

Applicare il metodo delle iterate di punto fisso al problema di punto fisso $\phi(x) = x$ con le funzioni ϕ di seguito indicate, illustrando graficamente la bisettrice I-III quadrante, la funzione ϕ e l'andamento delle iterazioni (si usi il comando pause per inserire le iterate una per volta nel grafico).

1. $\phi(x) = \exp(-\frac{x^2}{3})$
2. $\phi(x) = \log(x-1) + 3 \quad x > 1$ (per entrambi i punti fissi)
3. $\phi(x) = \sin(x)$

Un risultato "globale"

Teorema

Se

1. $\phi \in C^1[a, b]$
2. $\phi : [a, b] \mapsto [a, b]$
3. $\exists K < 1$ *tale che* $|\phi'(x)| \leq K \ \forall x \in [a, b]$

allora esiste uno e un solo punto fisso in $[a, b]$ *e il metodo delle iterate successive converge ad esso per ogni* $x_0 \in [a, b]$.

Velocità di convergenza

Sia $\phi \in C^m[a,b]$ per qualche $m > 1$.
Polinomio di Taylor di $\phi(x)$ centrato in x^* arrestato a ordine m:

$$\phi(x) = \phi(x^*) + \phi'(x^*)(x - x^*) + \frac{\phi''(x^*)}{2!}(x - x^*)^2 + \ldots + \frac{\phi^{(m)}(x^*)}{m!}(x - x^*)^m$$

Calcoliamo in $x = x_k$ e poniamo $e_k = x_k - x^*$ (errore al passo k):

$$\phi(x_k) = \phi(x^*) + \phi'(x^*)e_k + \frac{\phi''(x^*)}{2!}e_k^2 + \ldots + \frac{\phi^{(m)}(x^*)}{m!}e_k^m$$

Per analizzare ordine di convergenza, studiamo e_{k+1} in funzione di e_k ricordando che:

1. $x_{k+1} = \phi(x_k)$ (per costruzione)
2. $x^* = \phi(x^*)$ (perché x^* è il punto fisso)

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x^* = \phi(x_k) - \phi(x^*) \simeq \phi'(x^*)e_k + \frac{1}{2}\phi''(x^*)e_k^2 + \ldots + \frac{\phi^{(m)}(x^*)}{m!}e_k^m$$

1. Se $\phi'(x^*) \neq 0$, $e_{k+1} \simeq \phi'(x^*)e_k$ i.e. $\frac{e_{k+1}}{e_k} \simeq \phi'(x^*)$
2. Se $\phi^{(i)}(x_*) = 0$ per $i = 1, ..., m-1$ e $\phi^{(m)}(x_*) \neq 0$, $\frac{e_{k+1}}{e_k^m} \simeq \frac{\phi^{(m)}(x^*)}{m!}$

Teorema

Se:

1. $\phi^{(i)}(x_*) = 0$ *per* $i = 1, ..., m-1$
2. $\phi^{(m)}(x_*) \neq 0$

allora l'ordine di convergenza è m. *In particolare se* $m = 1$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = \phi'(x^*)$$

Esercizio proposto

Si considerino i seguenti problemi di punto fisso:

$$x^3 - 5 = x, \qquad \frac{2x^3 + 5}{3x^2 - 1} = x$$

Si applichi il metodo delle iterate di punto fisso calcolando sperimentalmente l'ordine di convergenza. Si verifichi poi teoricamente l'ordine di convergenza.