ANALISI MATEMATICA II

ESERCITAZIONE 4

Argomenti: equazioni non lineari

1. Si implementi il metodo di Newton per la determinazione delle radici reali di un'equazione non lineare $f(x) = 0$. Si fissino un numero massimo di iterazioni $nmax$ ed una tolleranza relativa $toll$ per definire i seguenti criteri d'arresto: $n < nmax$ e $|x_{n+1} - x_n| < toll\,|x_{n+1}|$, ove x_{n+1} e x_n sono due iterate successive.

   Si applichi il metodo di Newton (scegliendo $nmax = 100$ e $toll = 1.0e - 10$) all'equazione $f(x) = 0$ con:

   1. $f(x) = x^2 - a$ con $a > 0$, per il calcolo della radice positiva di f;
   2. $f(x) = x^3 - x - 1$, per il calcolo dell'unica radice reale di f;
   3. $f(x) = (x - 2^{-x})^3$, per il calcolo delle radici di f;
   4. $f(x) = \exp(x) - 2x^2$, per il calcolo della radice negativa di f.

   Si osservi l'andamento dell'ordine sperimentale di convergenza e se ne dia una giustificazione per ciascuna funzione assegnata.

2. Si implementi il metodo iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ per la ricerca di un punto fisso della funzione $g(x)$. Si fissino un numero massimo di iterazioni $nmax$ ed una tolleranza relativa $toll$ per definire i seguenti criteri d'arresto: $n < nmax$ e $|x_{n+1} - x_n| < toll\,|x_{n+1}|$, ove x_{n+1} e x_n sono due iterate successive.

   Si applichi il metodo di punto fisso scegliendo $nmax = 100$, $toll = 1.0e - 10$ e

   1. $g(x) = -\sqrt{\dfrac{\exp(x)}{2}}$ per il calcolo della radice negativa di $f(x) = \exp(x) - 2x^2$;
   2. $g(x) = \dfrac{2x^3 + 4x^2 + 10}{3x^2 + 8x}$ per il calcolo dell'unica radice reale di $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ appartenente all'intervallo $[1, 2]$.

   Si osservi l'andamento dell'ordine sperimentale di convergenza e se ne dia una giustificazione per ciascuna funzione assegnata.

3. Determinare la radice $\xi \approx 0.5$ dell'equazione $x + \log(x) = 0$, utilizzando le seguenti formule iterative:

   i) $x_{n+1} = -\log(x_n)$;

   ii) $x_{n+1} = \exp(-x_n)$;

   iii) $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \exp(-x_n)}{2}$

   Quale di queste tre formule produce una successione convergente? Quale delle tre è da preferirsi? Costruirne una quarta migliore di quelle date.

Esercizi facoltativi

1. Supponiamo che si investano all'inizio di ogni anno v euro in un fondo e che alla fine dell'ennesimo anno si abbia accumulato un montante pari a M euro. Indicato con I il tasso medio di rendita del fondo, si ha
$$M = v \sum_{k=1}^{n} (1+I)^k = v \frac{1+I}{I} \left[(1+I)^n - 1\right]$$
da cui si deduce che I è la radice dell'equazione non lineare
$$f(x) = 0 \quad \text{dove} \quad f(x) = M - v \sum_{k=1}^{n} (1+I)^k = M - v \frac{1+I}{I} \left[(1+I)^n - 1\right].$$
Supponendo che $v = 1000$ euro e che, dopo 5 anni, $M = 6000$ euro, calcolare con il metodo di Newton il tasso di interesse I con una tolleranza $toll = 10^{-12}$.

2. L'equazione di stato di un gas, ossia l'equazione che lega il volume V occupato da un gas a una temperatura T e soggetto a una pressione p, è
$$\left[p + a\left(\frac{N}{V}\right)^2\right](V - Nb) = kNT$$
ove a e b sono dei coefficienti che dipendono dallo specifico tipo di gas, N è il numero di molecole di gas contenute nel volume V e k è la costante di Boltzmann. Per l'anidride carbonica si ha:
$$a = 0.401 \text{ Pa } m^6, \; b = 42.7 \cdot 10^{-6} \; m^3$$
Si trovi il volume occupato da 1000 molecole di anidride carbonica poste a una temperatura $T = 300K$ e a una pressione $p = 3.5 \cdot 10^7$ Pa, sapendo che $k = 1.3806503 \cdot 10^{-23}$ Joule K^{-1}.