ANALISI MATEMATICA II

ESERCITAZIONE 5

Argomenti: integrali

1. Implementare in due *m-file* di tipo *function*, denominati `trapezi.m` e `simpson.m`, la formula di quadratura composta dei trapezi

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2m}\left[f(a_1) + 2\sum_{i=2}^{m} f(a_i) + f(a_{m+1})\right]$$

   e di Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6m}\left[f(a_1) + 4\sum_{i=1}^{m} f(a_{2i}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(a_{2i+1}) + f(a_{2m+1})\right]$$

   rispettivamente. In entrambi i casi suddividere l'intervallo di integrazione in $m = 2^n$ sottointervalli, con $n = 1, \ldots, 10$.

   Strutturare le *function* `trapezi` e `simpson` in modo tale che, ricevendo in input la funzione integranda $f(x)$, gli estremi dell'intervallo di integrazione a e b e il numero m di sottontervalli restituisca in output l'approssimazione t dell'integrale.

   Successivamente utilizzare le suddette formule per approssimare i seguenti integrali

$$I_1 = \int_{-5}^{5} \tfrac{1}{1+x^2}\,dx = 2\arctan(5) \qquad I_2 = \int_0^2 x^2 e^{-x}\,dx = 2 - 10e^{-2},$$

$$I_3 = \int_1^3 \log(x)\,dx = 3\log(3) - 2, \qquad I_4 = \int_0^\pi e^{-x}\sin(4x)\,dx = \tfrac{4}{17}(1 - e^{-\pi}),$$

$$I_5 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi/2, \qquad I_6 = \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{\sqrt{3}}{4} + \tfrac{\pi}{6}$$

   Stampare l'approssimazione dell'integrale e il corrispondente errore relativo per ogni valore di m.

   Confrontare i risultati ottenuti a parità di costo computazionale tenendo conto che, se m denota il numero dei sottointervalli, il numero di valutazioni di funzione è $m + 1$ nel caso della formula composta dei trapezi e $2m + 1$ nel caso della formula composta di Simpson. Commentare i risultati.

2. Utilizzare la *function* `trapezi` dell'esercizio 1 per approssimare l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} xe^{-x}\cos(2x)\,dx \approx -0.122122604618968$$

   suddividendo l'intervallo di integrazione in $m = 2^n$, $n = 1, \ldots, 12$, sottointervalli. Osservare gli errori delle approssimazioni calcolate e commentarli.

Esercizi facoltativi

1. Si consideri la funzione degli errori

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2)\, dt$$

che interviene spesso nel calcolo delle probabilità, nella statistica e nelle equazioni differenziali alle derivate parziali. Calcolare $\mathrm{erf}(x)$ per $x = 1, 5, 10$ con il corrispondente sviluppo in serie di Maclaurin

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

e con la formula dei trapezi. Variare il numero n dei termini della somma parziale di ordine n e il numero m dei sottointervalli della formula composta. Commentare i risultati.

2. Sia data una particella di massa $m = 10$ kg, che si muove attraverso un fluido soggetto a una resistenza viscosa R, che è funzione della velocità v. La relazione tra resistenza R, velocità v e tempo t è data dall'equazione

$$t = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m}{R(v)}\, dv$$

Supponendo che $R(v) = -v\sqrt{v}$ N e $v(t_0) = 10$ m/s, quanto tempo occorre perché la particella rallenti fino ad arrivare a una velocità 5 m/s?