CALCOLO NUMERICO E MATLAB

Docenti: C. Canuto, S. Falletta, S. Pieraccini

Esercitazione 4

Argomento: Fattorizzazioni di Choleski, riflessioni di Householder e fattorizzazioni QR

1. Siano $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ tre vettori colonna di ordine n, linearmente indipendenti tra loro (ad esempio, generati casualmente).

   Trovare tre combinazioni lineari di tali vettori

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_1 &= c_{11}\boldsymbol{v}_1 + c_{21}\boldsymbol{v}_2 + c_{31}\boldsymbol{v}_3 \\
\boldsymbol{w}_2 &= c_{12}\boldsymbol{v}_1 + c_{22}\boldsymbol{v}_2 + c_{32}\boldsymbol{v}_3 \\
\boldsymbol{w}_3 &= c_{13}\boldsymbol{v}_1 + c_{23}\boldsymbol{v}_2 + c_{33}\boldsymbol{v}_3
\end{aligned}$$

   che formino un sistema ortonormale, ossia tali che ${\boldsymbol{w}_p}^T\boldsymbol{w}_q = \delta_{pq}$ per $1 \le p, q \le 3$.

2. Dati due vettori non nulli $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ di ordine n, costruire una matrice $\boldsymbol{A}$ che trasformi $\boldsymbol{v}$ in $\boldsymbol{w}$ (cioè tale che $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$) usando una opportuna matrice di riflessione di Householder.

3. (a) Generare una matrice pseudo-casuale $\boldsymbol{A}$ di ordine n;
   (b) calcolare la fattorizzazione $\boldsymbol{QR}$ della matrice $\boldsymbol{A}$;
   (c) usare i fattori $\boldsymbol{Q}$ ed $\boldsymbol{R}$ per risolvere un sistema lineare $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$;
   (d) facendo variare l'ordine della matrice, valutare la differenza di costo computazionale tra il calcolo della fattorizzazione $\boldsymbol{LU}$ di $\boldsymbol{A}$ e quello della fattorizzazione $\boldsymbol{QR}$.

4. Se $\boldsymbol{A}$ è una matrice a banda (per esempio tridiagonale, pentadiagonale, etc.), che struttura hanno i suoi fattori $\boldsymbol{Q}$ ed $\boldsymbol{R}$?

   Fare qualche esperimento con Matlab per capire come vanno le cose...

RISPOSTE

1. Poniamo $\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$, $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3)$ e sia $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ la matrice incognita dei coefficienti. Si ha $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{C}$.

   La condizione di sistema ortonormale equivale a
   $$\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{W} = \boldsymbol{I},$$
   ossia
   $$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}.$$
   La matrice $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V}$ di ordine 3 è simmetrica e definita-positiva (grazie alla lineare indipendenza dei vettori $\boldsymbol{v}_i$), dunque possiamo fattorizzare la matrice in forma di Choleski $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}$. Abbiamo quindi
   $$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{R}\boldsymbol{C})^T(\boldsymbol{R}\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{I},$$
   ed è dunque sufficiente imporre $\boldsymbol{R}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$, ossia definire $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}^{-1}$.

   Si noti che $\boldsymbol{C}$ è triangolare superiore in quanto inversa della triangolare superiore $\boldsymbol{R}$, dunque $\boldsymbol{w}_1$ è un multiplo di $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ è una combinazione lineare di $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$, mentre $\boldsymbol{w}_3$ è una combinazione lineare di tutti e tre i vettori $\boldsymbol{v}_i$. La procedura indicata rappresenta dunque la formulazione matriciale del procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

   [Vedasi script Es4_1.m]

2. Una riflessione di Householder lascia invariata la norma del vettore riflesso, mentre $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ potrebbero avere norme diverse. Bisogna quindi considerare il multiplo di $\boldsymbol{w}$
   $$\widetilde{\boldsymbol{w}} = \frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{w}\|}\,\boldsymbol{w},$$
   che ha la stessa norma di $\boldsymbol{v}$. A questo punto, si può riflettere $\boldsymbol{v}$ su $\widetilde{\boldsymbol{w}}$, mediante la matrice di Householder
   $$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T \qquad \text{con} \quad \boldsymbol{u} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{w}} - \boldsymbol{v}}{\|\widetilde{\boldsymbol{w}} - \boldsymbol{v}\|}.$$
   Infine, si ottiene il vettore desiderato $\boldsymbol{w}$ moltiplicando il risultato per $\frac{\|\boldsymbol{w}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}$, ossia in definitiva si pone
   $$\boldsymbol{A} = \frac{\|\boldsymbol{w}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}\,\boldsymbol{H}.$$

   [Vedasi script Es4_2.m]

3. Gli esperimenti mostrano che la fattorizzazione $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$ è da 2 a 3 volte più costosa della fattorizzazione $\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$ (anche se i risultati ottenuti con il `toc-tic` sono molto aleatori...), ma fornisce risultati mediamente più precisi quando la matrice diventa malcondizionata.

   [Vedasi script Es4_3.m]

4. Se $\boldsymbol{A}$ è tridiagonale, allora $\boldsymbol{Q}$ risulta avere forma di Hessemberg (tutte le sottodiagonali nulle tranne la prima) mentre $\boldsymbol{R}$ ha tre diagonali non nulle (la diagonale principale e le prime due sopradiagonali).

   Se invece $\boldsymbol{A}$ è pentadiagonale, allora $\boldsymbol{Q}$ risulta avere tutte le sottodiagonali nulle tranne la prima e la seconda, mentre $\boldsymbol{R}$ ha cinque diagonali non nulle (la diagonale principale e le prime quattro sopradiagonali).