ANALISI MATEMATICA II

ESERCITAZIONE 2

Argomento: sistemi lineari

1. Selezionare il formato di output `format long e` e risolvere i sistemi lineari $Ax = b$ con A matrice di Hilbert di ordine $n = 5, 10, 15$ e b definito in modo tale che il corrispondente vettore soluzione x coincida con il vettore unitario. Per ciascun valore di n, calcolare l'errore relativo della soluzione in norma euclidea e il numero di condizionamento. Commentare i risultati.

2. Generare la seguente matrice
$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$
Determinare le matrici P, L e U della fattorizzazione $PA = LU$ della matrice A mediante la *function* `lu` di MATLAB. Successivamente utilizzare i suddetti fattori per risolvere il sistema lineare $Ax = b$, con b definito in modo tale che la corrispondente soluzione x coincida con il vettore unitario.

3. Generare una matrice A di numeri pseudo-casuali, non singolare e di ordine 3, e determinare le matrici P, L e U della fattorizzazione $PA = LU$ della matrice A mediante la *function* `lu` di MATLAB. Successivamente utilizzare i suddetti fattori per invertire la matrice A. Utilizzare la *function* `inv` di MATLAB per verificare la correttezza del risultato.

4. Generare una matrice B di numeri pseudo-casuali, non singolare e di ordine 5. Verificare che la matrice $A = B^T B$ è simmetrica e definita positiva ed utilizzare la *function* `chol` di MATLAB per determinare la decomposizione di Choleski $A = R^T R$.

   Successivamente utilizzare la suddetta decomposizione per calcolare la matrice inversa di A e per risolvere il sistema lineare $Ax = b$, con b definito in modo tale che la corrispondente soluzione x coincida con il vettore unitario.

5. Risolvere in modo efficiente, minimizzando il numero di operazioni aritmetiche, i seguenti sistemi
$$\begin{cases} Ax_1 = b_1 \\ Ax_2 = b_2 \\ Ax_3 = b_3 \\ Ax_4 = b_4 \end{cases}$$
aventi tutti la stessa matrice dei coefficienti A, non singolare, di ordine 6 e costituita da numeri pseudo-casuali; inoltre il termine noto b_1 è definito in modo tale che la corrispondente soluzione x coincida con il vettore unitario e $b_i = b_{i-1}/i$, $i = 2, 3, 4$.

6. Risolvere in modo efficiente il sistema
$$A^4 z = b$$
ove A è non singolare, di ordine 5 e costituita da numeri pseudo-casuali e b è definito in modo tale che la corrispondente soluzione z coincida con il vettore unitario.

7. Implementare in due *m-file* di tipo *function*, denominati `jacobi.m` e `gauss_seidel.m`, i metodi iterativi di Jacobi e di Gauss-Seidel rispettivamente, per la risoluzione di un sistema lineare $Ax = b$.

Strutturare le *function* `jacobi` e `gauss_seidel` in modo tale che, ricevendo in input la matrice dei coefficienti A, il termine noto b, un numero massimo di iterazioni $itermax$, una tolleranza relativa $toll$ ed un vettore colonna iniziale $x^{(0)}$, restituiscano in output il vettore soluzione $x = x^{(k)}$ tale che $||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_\infty \leq toll\,||x^{(k)}||_\infty$ e il numero di iterazioni $iter$ eseguite per raggiungere la tolleranza richiesta. Costruire gli algoritmi utilizzando la formula iterativa dei suddetti metodi in forma matriciale. Infine, dopo aver selezionato il formato di output `format long e`, confrontare i suddetti metodi nella risoluzione dei sistemi $A_i x = b_i$, $i = 1, \ldots, 4$, con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2/5 \\ 0 & 5 & 2/5 \\ 5/2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

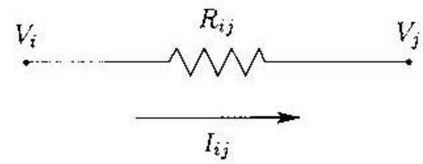
e b_i definito in modo tale che la corrispondente soluzione x coincida con il vettore unitario. Per ciascuno di essi richiedere la tolleranza relativa $toll = 1.0\text{e} - 7$, un numero massimo di iterazioni $itermax = 100$ e fornire il vettore nullo come vettore iniziale $x^{(0)}$. Infine, calcolare e stampare in ciascuna *function* il raggio spettrale della corrispondente matrice di iterazione e commentare i risultati.

Esercizi facoltativi

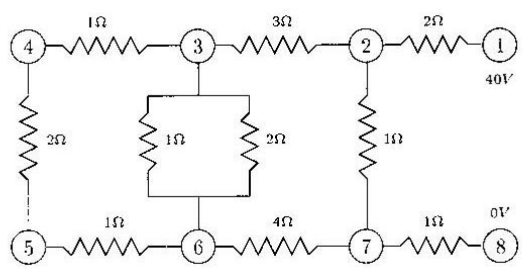
1. Si consideri il circuito elettrico illustrato in figura. Le resistenze sono indicate in ohm e il voltaggio applicato al generico nodo i è rappresentato da V_i volt. L'intensità di corrente che fluisce dal nodo i al nodo j è indicata con I_{ij} ampere. Per ottenere la differenza di potenziale tra due nodi, si applicano le seguenti due leggi:

   (a) La legge di Ohm, che mette in relazione l'intensità di corrente che fluisce in una resistenza con la differenza di potenziale agli estremi

$$I_{ij} = \frac{V_i - V_j}{R_{ij}}$$



   b) La legge di Kirchhoff , che stabilisce che la somma algebrica di tutte le correnti che entrano in un nodo deve essere uguale a zero.



Osserviamo che la resistenza R_{36} è calcolata mediante la relazione

$$\frac{1}{R_{36}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow R_{36} = \frac{2}{3}$$

Applicando le due leggi, successivamente ai nodi 2,3,...,7,

$$\text{nodo 2,} \quad I_{32} + I_{72} + I_{12} = \tfrac{V_3 - V_2}{3} + \tfrac{V_7 - V_2}{1} + \tfrac{40 - V_2}{2} = 0;$$

$$\text{nodo 3,} \quad I_{23} + I_{63} + I_{43} = \tfrac{V_2 - V_3}{3} + \tfrac{V_6 - V_3}{2/3} + \tfrac{V_4 - V_3}{1} = 0;$$

$$\text{nodo 4,} \quad I_{34} + I_{54} = \tfrac{V_3 - V_4}{1} + \tfrac{V_5 - V_4}{2} = 0;$$

$$\text{nodo 5,} \quad I_{45} + I_{65} = \tfrac{V_4 - V_5}{2} + \tfrac{V_6 - V_5}{1} = 0;$$

$$\text{nodo 6,} \quad I_{56} + I_{36} + I_{76} = \tfrac{V_5 - V_6}{1} + \tfrac{V_3 - V_6}{2/3} + \tfrac{V_7 - V_6}{4} = 0;$$

$$\text{nodo 7,} \quad I_{67} + I_{27} + I_{87} = \tfrac{V_6 - V_7}{4} + \tfrac{V_2 - V_7}{1} + \tfrac{0 - V_7}{1} = 0;$$

si ottiene il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 11V_2 & -2V_3 & & & & -6V_7 & = 120 \\ -2V_2 & +17V_3 & -6V_4 & & -9V_6 & & = 0 \\ & -2V_3 & +3V_4 & -V_5 & & & = 0 \\ & & -V_4 & +3V_5 & -2V_6 & & = 0 \\ & -6V_3 & & -4V_5 & +11V_6 & -V_7 & = 0 \\ -4V_2 & & & & -V_6 & +9V_7 & = 0 \end{cases}$$

Calcolare l'intensità di corrente che fluisce dal nodo 3 al nodo 4.