CALCOLO NUMERICO E MATLAB

Docenti: C. Canuto, S. Falletta, S. Pieraccini

Esercitazione 6

Argomento: Valori singolari e miscellanea

1. Sia
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$
Partendo dal vettore iniziale $\boldsymbol{z} = (2 \quad 0 \ -1)^T$, calcolare l'approssimazione dell'autovalore di modulo massimo di $\boldsymbol{A}$ mediante 20 iterazioni del metodo della potenza.

2. Dati i due vettori $\boldsymbol{r} = (1 \ \ 0 \ -1 \ \ 0)^T$ e $\boldsymbol{s} = (0 \ -1 \ \ 0 \ \ 1)^T$, calcolare la matrice di Householder $\boldsymbol{H}$ che riflette $\boldsymbol{r}$ su $\boldsymbol{s}$.

3. Sono dati i tre vettori
$$\boldsymbol{p} = (0.2 \, -0.6 \ \ 0.4 \ \ 1.3 \, -0.8)^T, \quad \boldsymbol{q} = (-0.5 \ \ 0.1 \, -0.1 \ \ 0.05 \ \ 0.2)^T, \quad \boldsymbol{s} = (0.74 \, -0.54 \ \ 0.4 \ \ 0.85 \, -0.8)^T$$
   (a) Dire se tali vettori sono linearmente indipendenti tra loro oppure no;
   (b) in caso negativo, determinare il numero massimo di vettori linearmente indipendenti;
   (c) esprimere il/i rimanente/i vettore/i come combinazione lineare dei vettori linearmente indipendenti.

4. (a) Costruire la matrice $\boldsymbol{A}$ di ordine 8×4 che ha il valore 3 sulla diagonale principale e il valore -1 sulla prima sotto-diagonale e sulla prima sopra-diagonale;
   (b) calcolare il rango di $\boldsymbol{A}$;
   (c) calcolare i valori singolari di $\boldsymbol{A}$;
   (d) calcolare il numero di condizionamento di $\boldsymbol{A}$ (in norma euclidea).

5. Si consideri il sistema lineare

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\
-x_1 + 2x_3 + x_4 &= -3 \\
5x_2 - 6x_3 - x_4 &= 7 \\
x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\
x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\
8x_1 - x_2 - 5x_3 + 2x_4 &= 2
\end{aligned}
$$

(a) Calcolare il rango della matrice $\boldsymbol{A}$ del sistema;

(b) calcolare la soluzione del sistema, nel senso dei minimi quadrati, avente norma euclidea minimale;

(c) individuare tutte le soluzioni del sistema nel senso dei minimi quadrati.

RISPOSTE

1.

$$\lambda_{\max}^{(20)} = 4.3108e+00.$$

2.

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Formiamo la matrice $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{p}\ \boldsymbol{q}\ \boldsymbol{r})$ e calcoliamo la sua decomposizione ai valori singolari $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Sigma V}^T$. Due valori singolari sono diversi da 0, l'altro è zero (numerico), dunque il rango di $\boldsymbol{A}$ è 2: due vettori sono linearmente indipendenti tra loro, il rimanente è linearmente dipendente. Detto $\boldsymbol{v}$ il terzo vettore colonna di $\boldsymbol{V}$, abbiamo $\boldsymbol{Av} = \boldsymbol{0}$, ossia

$$v_1\boldsymbol{p} + v_2\boldsymbol{q} + v_3\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}.$$

Le tre componenti di $\boldsymbol{v}$ sono tutte diverse da 0, quindi possiamo esprimere uno qualunque dei vettori in funzione degli altri due. Ad esempio:

$$\boldsymbol{r} = 0.7\,\boldsymbol{p} - 1.2\,\boldsymbol{q}\ .$$

4.

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = 2,$$

$$\mathrm{diag}(\boldsymbol{\Sigma}) = (4.6341e+00,\ 3.6698e+00,\ 2.4548e+00,\ 1.4252e+00)$$

$$\mathrm{cond}_2(\boldsymbol{A}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_4} = 3.0754e-01.$$

5. *a)* Si ha

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = 3.$$

b) La soluzione cercata è data da $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{b}$, dunque

$$\boldsymbol{x} = (1.1087\ \ 2.3648\ \ 0.8575\ \ 0)^T$$

c) Ogni altra soluzione $\boldsymbol{y}$ del sistema si scrive come $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}$, con $\boldsymbol{z} \in \mathrm{Ker}\,A$. Il nucleo di $\boldsymbol{A}$ ha dimensione $4 - 3 = 1$ ed è generato dal quarto vettore colonna della matrice $\boldsymbol{V}$ nella decomposizione ai valori singolari di $\boldsymbol{A}$, ossia da

$$\boldsymbol{v} = (0.5000\ \ 0.5000\ \ 0.5000\ \ -0.5000)^T.$$

Dunque

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{v}$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.