Quadratura Numerica

Sandra Pieraccini

Politecnico di Torino, Dipartimento di Scienze Matematiche
sandra.pieraccini@polito.it
http://calvino.polito.it/~pieraccini

Calcolo Numerico e MATLAB

Ultimo aggiornamento: 28 novembre 2016

Argomenti trattati

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Difficoltà se:

- $f(x)$ nota solo per punti: $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, ..., n$
- per $f(x)$ non individuabile una primitiva elementarmente, es: $f(x) = exp(-x^2)$

Le **formule di quadratura numerica** consentono di approssimare l'integrale definito usando i valori di f in punti assegnati

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

- x_i: nodi
- w_i: pesi

Come costruire formule di quadratura?

Formule interpolatorie

Fissati x_i, $i = 1, ..., n$, nodi distinti $\in [a, b]$, sia

$$p_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ell_i(x)$$

il polinomio interpolante f nei nodi x_i

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \int_a^b p_{n-1}(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b \ell_i(x)\mathrm{d}x}_{w_i}$$

Se i nodi sono equidistanti le formule inteporlatorie che si ottengono sono dette di **Newton-Cotes**.

Si parla di formule **chiuse** se a e b sono tra i nodi, **aperte** altrimenti.

Formule del rettangolo e del punto medio

$n = 1$

Rettangolo:

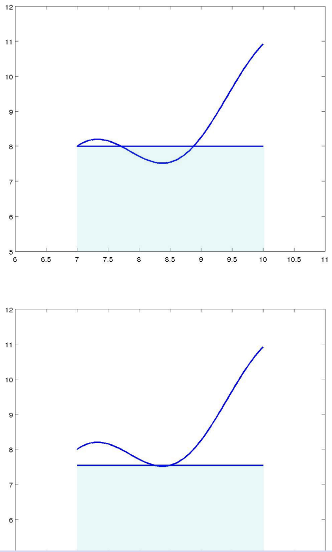
$f(x) \simeq p_0(x) = f(a)$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \underbrace{(b-a)}_{w_1} f\left(\underbrace{a}_{x_1}\right)$$

Punto medio:

$f(x) \simeq p_0(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \underbrace{(b-a)}_{w_1} f\left(\underbrace{\frac{a+b}{2}}_{x_1}\right)$$



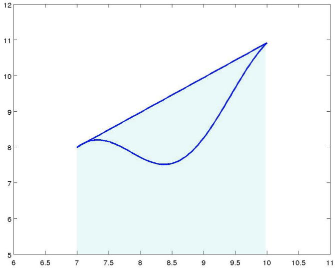
Formula del trapezio

$n = 2$

$f(x) \simeq p_1(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{w_1} f\left(\underbrace{a}_{x_1}\right) + \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{w_2} f\left(\underbrace{b}_{x_2}\right)$$

NB: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq (f(a) + f(b))\frac{b-a}{2}$



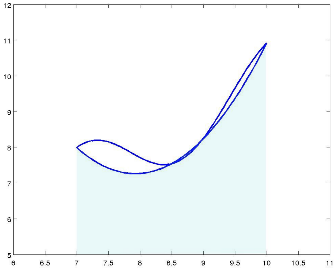
Formula di Cavalieri-Simpson

$n = 3$

Sia $c = \frac{a+b}{2}$

$f(x) \simeq p_2(x) = f(a)\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}$

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{b-a}{6}f(a) + \frac{4}{6}(b-a)f(c) + \frac{b-a}{6}f(b)$



Errore di quadratura

Definizione (Errore di quadratura)

Data una formula di quadratura l'errore è

$$R_n = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

Se formula interpolaria,

$$R_n = \int_a^b (f(x) - p_{n-1}(x)\mathrm{d}x = \int_a^b E_n(x)\mathrm{d}x$$

Definizione

Se $R_n = 0$ la formula di quadratura si dice esatta

Proprietà

Una formula di quadratura interpolatoria costruita su n nodi è sicuramente esatta per tutti i polinomi di grado $\leq n-1$ $(E_n(x) \equiv 0 \ \forall x \in [a,b])$

Proposizione

Le formule di Newton-Cotes costruite su n nodi sono esatte per polinomi di grado fino a $d = n-1$*, se n è pari, e* $d = n$ *se n dispari.*

Quindi ad esempio formula di Simpson integra esattamente le parabole per costruzione, ma si può dimostrare che integra esattamente anche i polinomi di grado 3, mentre Trapezi si ferma alle rette.

Definizione (Convergenza)

Formula di quadratura convergente se

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

Teorema

Se $f \in C[a,b]$ e i pesi soddisfano la condizione $\sum_{i=1}^{n} |w_i| \leq K$ con K costante indipendente da n allora la formula di quadratura è convergente.

Purtroppo in generale i pesi delle formule di Newton-Cotes **non** soddisfano le condizioni del teorema precedente $\rightsquigarrow$ convergenza non garantita.
Ciò non sorprende se pensiamo al comportamento dell'interpolazione polinomiale su nodi equidistanti...

Quadratura composita

Stesso spirito dell'interpolazione polinomiale a tratti:

1. Si sceglie una formula di interpolazione base costruita su un numero prefissato r di nodi (piccolo)
2. Si partiziona l'intervallo di integrazione in N intervallini $[x_i, x_{i+1}]$, $a = x_1 < \ldots < x_{N+1} = b$
3. Additività dell'integrale:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

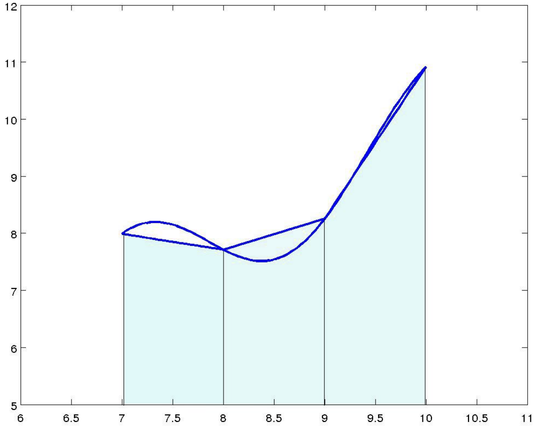
4. Si applica la formula di quadratura a ciascuno degli integrali a destra

Esempio: Formula dei trapezi compositi

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x \simeq \sum_{i=1}^{N} \frac{x_{i+1}-x_i}{2}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)$$

Prendiamo per semplicità nodi equidistanti: $\forall i \; x_{i+1}-x_i = h = \frac{b-a}{N}$

$$\begin{aligned} I_N^T &= \sum_{i=1}^{N} \frac{h}{2}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right) = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right) \\ &= \frac{h}{2}\left(f(x_1) + 2\sum_{i=2}^{N} f(x_i) + f(x_{N+1})\right) \end{aligned}$$


12
11
10
9
8
7
6
5
6
6.5
7
7.5
8
8.5
9
9.5
10
10.5
11

Esercizio proposto

Scrivere una function che implementi la formula di quadratura composita dei trapezi, che riceva in ingresso f, a, b, N, e restituisca in uscita l'approssimazione dell'integrale.

Esercizio proposto

Applicare la function all'integrale definito

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

con vari valori di N e confrontare con il risultato esatto $\log(2)$. Osservare in particolare cosa accade raddoppiando N.

Esempio: Formula di Simpson composita

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \sum_{i=1}^{N} \frac{x_{i+1}-x_i}{6}\left(f(x_i) + 4f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) + f(x_{i+1})\right)$$

Con nodi equidistanti: $x_{i+1} - x_i = h = \frac{b-a}{N} \rightsquigarrow x_i = a + (i-1)h$

$$\begin{aligned} I_N^S &= \frac{h}{6}\sum_{i=1}^{N}\left(f(x_i) + 4f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_{i+1})\right) \\ &= \frac{h}{6}\left(f(x_1) + 2\sum_{i=2}^{N} f(x_i) + 4\sum_{i=1}^{N} f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_{N+1})\right) \end{aligned}$$

Esercizio proposto

Scrivere una function che implementi la formula di quadratura composita di Cavalieri-Simpson, che riceva in ingresso f, a, b, N, e restituisca in uscita l'approssimazione dell'integrale.

Esercizio proposto

Applicare la function all'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

con vari valori di N e confrontare con il risultato esatto π.
Osservare in particolare cosa accade raddoppiando N.

Convergenza dell'interpolazione composita

Valgono le seguenti stime dell'errore per le formule composite dei trapezi e Simpson (nodi equidistanti per semplicità):

$$R_N^T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(c), \qquad c \in (a,b),\ h = \frac{b-a}{N},\ f \in C^2[a,b]$$

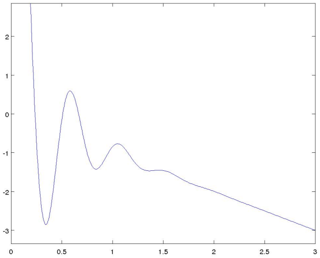
$$R_N^S = -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{iv}(c), \qquad c \in (a,b),\ h = \frac{b-a}{N},\ f \in C^4[a,b]$$

Se f ha la regolarità richiesta quindi:

- $R_N^T = \mathcal{O}(h^2)$ per $h \to 0$ i.e. $N \to \infty$
- $R_N^S = \mathcal{O}(h^4)$ per $h \to 0$ i.e. $N \to \infty$

Formule adattative

Nodi equidistanti è una semplificazione forte. In realtà nelle applicazioni pratiche si usano distribuzioni di nodi **adattative** in cui i nodi vengono addensati in modo automatico dove necessario (es. in zone con brusche variazioni).



Comandi matlab:

1. `I = quad(f,a,b)`, `I = quad(f,a,b,tol)`
2. `trapz`
3. `integral`