CALCOLO NUMERICO E MATLAB

Docenti: C. Canuto, S. Falletta, S. Pieraccini

Esercitazione 2

Argomento: Aritmetica del calcolatore

1. I seguenti numeri vengono introdotti in un calcolatore nel quale i numeri vengono rappresentati in aritmetica floating-point, con base $N = 10$ e $t = 5$ cifre riservate alla mantissa (tecnica di arrotondamento (ii)):
$$a = 1.483593,$$
$$b = 1.484111.$$
Utilizzare il comando `chop` di MATLAB per determinare il risultato $\bar{s} = \bar{a} \ominus \bar{b} = \text{fl}(\text{fl}(a) - \text{fl}(b))$, ove $\text{fl}(x)$ indica l'operazione di arrotondamento, nella suddetta aritmetica, di x a numero macchina $\bar{x}$ e $\ominus$ denota l'operazione di macchina corrispondente all'operazione aritmetica della sottrazione. Confrontare $\bar{s}$ con $c = a - b$ e calcolare l'errore relativo corrispondente.

2. Si consideri la serie armonica generalizzata $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ la cui somma è pari a $\pi^2/6$. Si scriva una *function* che, dato in input il numero intero positivo m, calcoli la quantità $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}$, simulando una aritmetica di macchina in virgola mobile normalizzata a $t = 4$ cifre decimali per la mantissa (tecnica di arrotondamento (ii)). Si calcoli la somma y e l'errore relativo $|y - \pi^2/6|/(\pi^2/6)$:
   (a) eseguendo un ciclo **for k=1:m**;
   (b) eseguendo un ciclo inverso **for k=m:-1:1**.

   Si confrontino e si commentino i risultati ottenuti.

3. Valutare le espressioni
$$f_1(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}, \qquad f_2(x) = \frac{1 - e^x}{x},$$
$$f_3(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}, \qquad f_4(x) = \frac{(x+1)^2 - 1}{x}$$
in $x = 10^{-n}$ per $n = 1, 2, ..., 16$. Successivamente riformulare le funzioni assegnate al fine di evitare il fenomeno della cancellazione numerica e, assumendo come valori esatti quelli che si ottengono mediante la riformulazione proposta, calcolare i corrispondenti errori relativi e confrontarli con la precisione di macchina. Stampare e graficare per ogni valore di x il corrispondente errore relativo.

4. Si consideri la successione
$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_n &= 2^{n-1/2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - 4^{1-n}x_{n-1}^2}}, \qquad n \geq 2 \end{aligned}$$

per il calcolo approssimato di π. Scrivere una *function* che, dato in input il numero massimo N di termini della successione, calcoli e salvi in un vettore gli errori relativi $|x_n - \pi|/\pi$ per $n = 1, \ldots, N$. Visualizzare inoltre il grafico del logaritmo dell'errore al variare di n. Trovare un'espressione equivalente per la successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ in modo tale da evitare il fenomeno della cancellazione numerica. Studiare anche in questo caso l'andamento dell'errore relativo e confrontare i risultati con quelli precedenti.

5. Data la funzione $f(x) = e^x$, vogliamo approssimare $f'(x)$ con il seguente rapporto incrementale

$$f'(x) \approx r(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

scegliendo $h = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots 32$. Esaminare il comportamento dell'errore relativo $|f'(x) - r(x)|/|f'(x)|$ e commentare i risultati.