CALCOLO NUMERICO E MATLAB

Docenti: C. Canuto, S. Falletta, S. Pieraccini

Esercitazione 3

Argomento: Matrici e sistemi lineari

1. Creare degli `script` che generano, in funzione dell'ordine n, le seguenti matrici quadrate:

$$\boldsymbol{A}_1 = \big(\max(i,j)\big), \qquad \boldsymbol{A}_2 = \big(j\max(i,j)\big), \qquad \boldsymbol{A}_3 = \big(\min(i,j-1)\big).$$

2. Indicata con $\boldsymbol{A}$ una delle matrici precedenti di ordine $n=5$:
   (a) generare la matrice diagonale avente gli stessi elementi diagonali di $\boldsymbol{A}$;
   (b) estrarre la parte triangolare inferiore della matrice $\boldsymbol{A}$
   (c) calcolare il determinante e il rango di $\boldsymbol{A}$;
   (d) calcolare gli autovalori di $\boldsymbol{A}$;
   (e) se la matrice $\boldsymbol{A}$ è non-singolare, calcolare la matrice inversa;
   (f) verificare che gli autovalori della matrice inversa sono i reciproci degli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}$;
   (g) se la matrice $\boldsymbol{A}$ non è simmetrica, ripetere i passi precedenti per la matrice trasposta di $\boldsymbol{A}$, e fare confronti con i corrispondenti risultati per la matrice $\boldsymbol{A}$;
   (h) calcolare la norma di $\boldsymbol{A}$ di indice $p=1$, di indice $p=2$ (norma euclidea), di indice $p=\infty$ (norma del massimo);
   (i) se la matrice $\boldsymbol{A}$ è non-singolare, calcolare il numero di condizionamento della matrice nella norma euclidea;

3. (a) Costruire il vettore colonna $\boldsymbol{v}$ di ordine $n=100$ le cui componenti sono

$$v_k = \begin{cases} k/2 & \text{se } k \text{ è pari,} \\ k+1 & \text{se } k \text{ è dispari,} \end{cases} \qquad 1 \le k \le 100;$$

   (b) calcolare la norma euclidea $\|\boldsymbol{v}\|_2$ del vettore;
   (c) calcolare il versore (= vettore normalizzato) $\boldsymbol{u} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|_2}$;
   (d) calcolare la matrice $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$;
   (e) calcolare la matrice $\boldsymbol{G}^2$ e confrontarla con $\boldsymbol{G}$; interpretare il risultato.

4. (a) Costruire la matrice $\boldsymbol{A}$ di ordine $n=10$ i cui elementi sono $a_{ij} = \dfrac{1}{\max(i,j)}$;
   (b) costruire il vettore colonna $\boldsymbol{z}$ di ordine $n=10$ le cui componenti sono tutte uguali a 1;
   (c) costruire il vettore $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}$;
   (d) calcolare la soluzione $\boldsymbol{x}$ del sistema lineare $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$;

(e) valutare la differenza tra i vettori $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{z}$ in norma euclidea, commentando il risultato.

(f) mediante il comando `rand`, costruire il vettore $\tilde{\boldsymbol{b}}$ ottenuto applicando a ogni componente di $\boldsymbol{b}$ una perturbazione (pseudo-)casuale uniformemente distribuita nell'intervallo $[-10^{-4}, 10^{-4}]$;

(g) calcolare la soluzione $\tilde{\boldsymbol{x}}$ del sistema lineare $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$;

(h) calcolare gli errori relativi (nella norma euclidea)

$$\mathrm{err}_{\boldsymbol{x}} = \frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{err}_{\boldsymbol{b}} = \frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

e metterli in relazione attraverso il numero di condizionamento della matrice $\boldsymbol{A}$;

(i) ripetere tutto lo studio precedente usando la matrice $\boldsymbol{A}$ di ordine $n = 10$ i cui elementi sono $a_{ij} = \dfrac{1}{i+j}$.

5. (a) Costruire la matrice $\boldsymbol{A}$ di ordine $n = 10$ i cui elementi sono $a_{ij} = |i - j|$;

   (b) trovare per quali valori del parametro reale p la matrice $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + p\boldsymbol{I}$ risulta simmetrica e definita positiva.

6. Si supponga di aver calcolato una matrice $\boldsymbol{A}$ non-singolare di ordine n, e un vettore colonna $\boldsymbol{b}$ di pari ordine.

   (a) Calcolare la fattorizzazione $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{LU}$ della matrice;

   (b) valutare quanto bene le matrici così ottenute soddisfino l'equazione $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{LU}$, e legare il risultato al numero di condizionamento della matrice $\boldsymbol{A}$;

   (c) usare tale fattorizzazione per risolvere il sistema lineare $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$;

   (d) risolvere lo stesso sistema lineare mediante il comando `x=A\b`;

   (e) valutare la differenza tra le due soluzioni numeriche così ottenute, e legare il risultato al numero di condizionamento della matrice $\boldsymbol{A}$.

RISPOSTE

1. Si ottengono modificando opportunamente lo script `matrix.m` visto in classe.

2. (a) `diag(diag(A))` oppure `tril(triu(A))`
(b) `tril(A)`
(c) `det(A)`; `rank(A)`
(d) `eig(A)`
(e) `inv(A)`
(f) `eig(inv(A))` coincide con `1./eig(A)` a meno dell'ordinamento.
(h) `norm(A,1)`; `norm(A)`; `norm(A,inf)`
(i) `cond(A)`

3. Il vettore $\boldsymbol{v}$ può essere costruito con la stringa

   `v(1:2:100)=(1:2:100)+1; v(2:2:100)=1:50; v=v'`

   La matrice $\boldsymbol{G}$ rappresenta la proiezione ortogonale sulla retta generata dal vettore $\boldsymbol{u}$, ossia $\boldsymbol{Gx} = (\boldsymbol{u}^T * \boldsymbol{x})\boldsymbol{u}$. Siccome la proiezione della proiezione coincide con la proiezione stessa, si deve avere $\boldsymbol{G}^2 = \boldsymbol{G}$, il che si può verificare calcolando `norm(G*G-G)=3.0663e-16`.

4. Esercizio analogo a uno svolto in classe.

5. Affinchè $\boldsymbol{B}$ sia definita positiva, occorre e basta che tutti i suoi autovalori siano > 0. Gli autovalori di $\boldsymbol{B}$ sono del tipo $\lambda + p$, dove λ è un autovalore di $\boldsymbol{A}$. Mediante il comando `eig(A)` si vede che il più piccolo autovalore di $\boldsymbol{A}$ è $\lambda_{\min} = -19.4317...$, dunque deve essere $p > 19.4317....$

6. Come matrice $\boldsymbol{A}$ possiamo considerare ad esempio la matrice di Vandermonde associata alla distribuzione dei primi n interi da 1 a n, ossia `A=vander(v)` con `v=1:n`.

   Si ha

   `cond(A)=2.1063e+12` e `norm(P*A-L*U)/norm(A)=5.4821e-17` per $n = 10$,

   mentre

   `cond(A)=1.8023e+31` e `norm(P*A-L*U)/norm(A)=4.7418e-17` per $n = 20$.

   Dunque l'accuratezza della fattorizzazione appare praticamente insensibile al condizionamento della matrice.

   Se generiamo un vettore colonna $\boldsymbol{b}$ di lunghezza n mediante il comando `randn`, e indichiamo con $\boldsymbol{xx}$ la soluzione del sistema lineare ottenuta come indicato in (c) e con $\boldsymbol{x}$ quella ottenuta come indicato in (d), si ha

   `norm(x-xx)/norm(x)=5.1609e-16` per $n=10$, e `norm(x-xx)/norm(x)=8.1967e-16` per $n = 20$.

   Anche in questo caso, rileviamo una scarsa sensibilità al condizionamento della matrice $\boldsymbol{A}$.