Aufgabe 1

Wir berechnen das Integral

$$I(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-x^2/2} dx$$

mit der Monte-Carlo Methode, da analytisch keine Lösung in geschlossener Form existiert. Zuerst generieren wir 1000 uniform im Intervall $[0,1]$ verteilte Zufallszahlen $X_1, ..., X_{1000}$

```
> n <- 1000
> x <- runif(n,min=0,max=1)
```

Danach werten wir den Integranden für alle 1000 Zufallszahlen aus

```
> integrand <- exp(-x^2/2)
```

Das mit Monte-Carlo berechnete Integral ergibt dann den Wert

```
> 1/(sqrt(2*pi))*sum(integrand)/n

[1] 0.344725
```

Das Integral, das wir eben mit der Mone-Carlo Methode berechnet haben, ist natürlich die Differenz der kumulativen Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ausgewertet an den Stellen 0 und 1.

```
> pnorm(1)-pnorm(0)

[1] 0.3413447
```

Aufgabe 2

(a) Für die uniforme Verteilung $X \sim \text{Uniform}([0,10])$ gilt $\text{E}(X) = \mu = 5$, $\sigma_X = \frac{5}{\sqrt{3}}$. Nach dem Zentralen Grenwertsatz gilt für grosse n: wird der arithmetische Mittelwert $\overline{X}_n$ der Stichprobe vom Umfang n standardisiert, so gilt für die standardisierte Zufallsvariable

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_X/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X}_n - 5}{5/\sqrt{3n}} \sim \mathcal{N}(0,1)\,.$$

Es gilt dann für das gesuchte Intervall $[\mu - e, \mu + e]$, dass

$$
\begin{aligned}
P(\mu - e \leq \overline{X}_n \leq \mu + e) &= P\left(-\frac{e}{5/\sqrt{3n}} \leq \frac{\overline{X}_n - 5}{5/\sqrt{3n}} \leq \frac{e}{5/\sqrt{3n}}\right) \\
&= P\left(-\frac{e}{5/\sqrt{3n}} \leq Z_n \leq \frac{e}{5/\sqrt{3n}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{e}{5/\sqrt{3n}}\right) - \Phi\left(-\frac{e}{5/\sqrt{3n}}\right) \\
&= 0.95
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Symmetrie der Standardnormalverteilung genügt es, eine Seite der Verteilung zu betrachten: $\Phi\left(\frac{e}{5/\sqrt{3n}}\right)$ soll also 97.5% der Fläche unter der Gesamtkurve entsprechen. Das 97.5%-Quantil $q(0.975)$ der Standardnormalverteilung ist

$$
\frac{e}{5/\sqrt{3n}} = q(0.975) = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96\,.
$$

Also ist

$$
e = \frac{5}{\sqrt{3n}} \cdot q(0.975) = \frac{5}{\sqrt{3 \cdot 60}} \cdot 1.96 = 0.73
$$

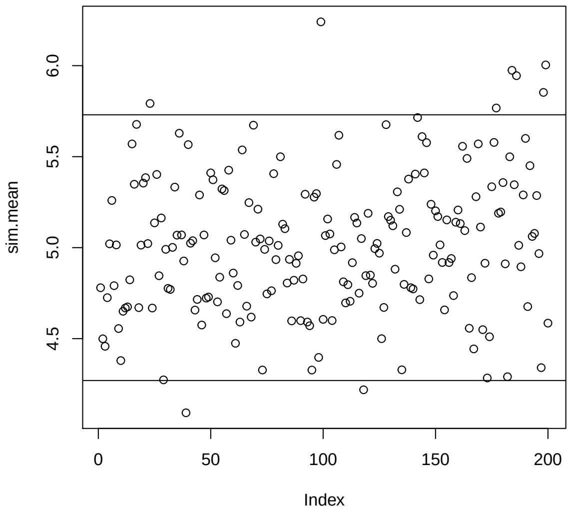
(**b**) Auflösen der Gleichung $e = 0.2 = \frac{5}{\sqrt{3n}} \cdot 1.96$ nach n liefert $n = 800$.

(**c**) $I = [5 - 0.73, 5 + 0.73]$, $n = 200$. Man erwartet ca. $0.05 \cdot 200 = 10$;

```
> n <- 60
> sim <- matrix(runif(n*200,min=0,max=10),ncol=n)
> sim.mean <- apply(sim,1,"mean")
> plot(sim.mean)
> abline(h=5.73)
> abline(h=4.27)

> d<-sum(sim.mean>5.73)+sum(sim.mean<4.27)
```

In unserem Beispiel sind es 9.



Aufgabe 3

(**a**) X_i = Inhalt (in Zentiliter) der i-ten Weinflasche, $i = 1, \cdots, n = 12$.

1. Modell: $X_1, \cdots, X_{12}$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 1.5^2$ bekannt.

2. Nullhypothese: $H_0: \ \mu = \mu_0 = 70$

Alternative: $H_A: \ \mu < \mu_0$

3. Teststatistik:

$$Z = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma}$$

Verteilung der Teststatistik unter $H_0: \ Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

4. Signifikanzniveau: $\alpha = 5\%$

5. Verwerfungsbereich für die Teststatistik:

$$\Phi^{-1}(0.95) = 1.645 \Rightarrow K = (-\infty, -1.645]$$

6. Testentscheid:

$$z = \sqrt{12}\frac{70.25 - 70}{1.5} = 0.5774$$

$z \notin K \rightarrow H_0$ beibehalten. Es ist also durchaus plausibel, dass der Weinhändler den Wein korrekt abfüllt.

(**b**) **1. Modell**: $X_1, \cdots, X_{12}$ i.i.d. $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, σ^2 unbekannt; geschätzter Wert: $\hat{\sigma}_x^2 = 1.96^2$

2. Nullhypothese: $H_0: \ \mu = \mu_0 = 70$

Alternative: $H_A: \ \mu < \mu_0$

3. Teststatistik:

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\hat{\sigma}_X}$$

Verteilung der Teststatistik unter $H_0: \ T \sim t_{n-1}$

4. **Signifikanzniveau**: $\alpha = 5\%$
5. **Verwerfungsbereich für die Teststatistik**:

$$t_{11;0.95} = 1.796 \Rightarrow K = (-\infty, -1.796]$$

6. **Testentscheid**:

$$t = \sqrt{12}\frac{70.25 - 70}{1.96} = 0.441$$

   $t \notin K \to H_0$ beibehalten. Wir kommen also zum selben Ergebnis wie in Teilaufgabe (a).

Aufgabe 4

(a) $\left[-403 \pm t_{9-1;97.5\%} \cdot \frac{3.127}{\sqrt{9}}\right] = [-403 \pm 2.31 \cdot 1.042] = [-405.4, -400.6]$

(b)) Da -400.0 nicht im 95%-Vertrauensintervall liegt, würde die Nullhypothese $H_0: \ \mu = -400.0$ zu Gunsten der Alternative $H_A: \ \mu \neq -400.0$ auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden. Die Beobachtungen und die Hypothese $H_0: \ \mu = -400.0$ passen also nicht gut zusammen und daher ist die wahre Differenz wohl nicht -400.0.