Aufgabe 1

Die Zufallsvariable X ist definiert als $X = F_X^{-1}(U)$, wobei $U \sim \text{Uniform}([0,1])$ und $F_X(x) = 1 - \lambda e^{-\lambda x}$ die kumulative Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung ist. Dann ist

$$X = F_X^{-1}(U) = \frac{-\log(1-U)}{\lambda} \, ,$$

Definieren wir die Zufallsvariable

$$V = 1 - U \, ,$$

so gilt $V \sim \text{Uniform}([0,1])$. Die Zufallsvariable X kann äquivalent folglich auch definiert werden als

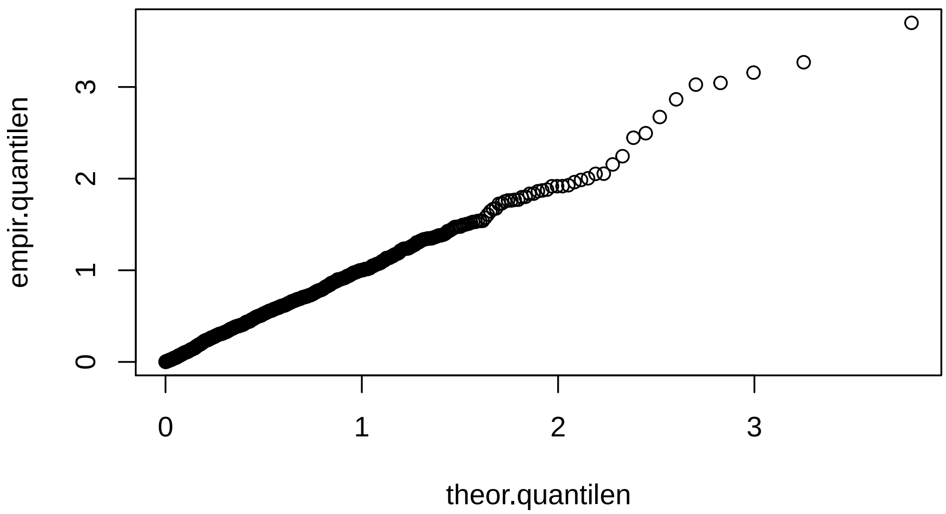
$$X = \frac{-\log(V)}{\lambda} \, .$$

Wir erzeugen nun aufgrund der obigen Vorschrift mit `R` $n = 1000$ exponentialverteilte Zufallszahlen $X_1, X_2, ..., X_{1000}$.

```
> ## Generiere 1000 gleichmÃ¤ssig verteilte Zufallszahlen im Intervall [0,1]
> v <- runif(1000,min=0,max=1)
> ## Generiere 1000 exponentialverteilte Zufalsszahlen mit Hilfe der gleichmÃ¤ssig
> ## verteilten Zufallszahlen
> x <- -log(v)/2
```

Um zu überprüfen, ob die generierten Zahlen X_i $(i = 1, ..., 1000)$ exponentialverteilt sind, fertigen wir einen qq-Plot an.

```
> ## qq-Plot
> ## Berechne die theoretischen Quantilen
> n <- 1000
> theor.quantilen <- qexp((seq(1,n,by=1)-0.5)/n,rate=2)
> ## Berechne die empirischen Quantilen
> empir.quantilen <- sort(x)
> qqplot(theor.quantilen,empir.quantilen)
```



Die empirischen Quantilen können als eine lineare Funktion der theoretischen Quantilen mit Ordinatenabschnitt 0 betrachtet werden, woraus wir schliessen, dass die generierten Zufallzahlen tatsächlich exponentialverteilt sind.

Aufgabe 2

(**a**) Die Wartezeit T ist exponentialverteilt, d.h. hat die Wahrscheinlichkeitsdichte ist $f(t) = \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}$ für $t > 0$ mit Parameter $\lambda = \frac{1}{8}$. Also

$$P(T > 12) = 1 - P(T \leq 12) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-12/8}) = \mathrm{e}^{-1.5} = 0.223$$

(**b**) X sei die Anzahl Fische, die in den nächsten 12 Minuten anbeissen; X ist poissonverteilt mit $\lambda = 1.5$ (in 12 Minuten beissen durchschnittlich 1.5 Fische an), also

$$P(X = 2) = \mathrm{e}^{-1.5} \cdot \frac{1.5^2}{2!} = 0.251$$

Aufgabe 3

(**a**) $\mathrm{E}(X + 2Y) = \mu_X + 2\mu_Y = 210\,, \quad \mathrm{Var}(X + 2Y) = \sigma_X^2 + 4\sigma_Y^2 = 1521\,,$
$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{Var}(X) + (\mathrm{E}(X))^2 = \sigma_X^2 + \mu_X^2 = 1825\,.$

(**b**) $U = 2X + 2Y; \quad \mathrm{E}(U) = 2\mathrm{E}(X) + 2\mathrm{E}(Y) = 2\mu_X + 2\mu_Y = 3000\,,$
$\sigma_U = \sqrt{4\sigma_X^2 + 4\sigma_Y^2} = 0.0447\,.$

(**c**) Wir haben $X = Z^2$, wobei $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(Z^2 \leq x) \\ &= P(-\sqrt{x} \leq Z \leq \sqrt{x}) \\ &= \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) \,. \end{aligned}$$

Wir erhalten die Wahrscheinlichkeitsdichte von X, indem wir die kumulative Verteilungsfunktion $F_X(x)$ nach x ableiten. Da $\Phi'(x) = \phi(x)$, ergibt sich mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} fX(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2}\phi(\sqrt{x}) + \frac{1}{2}x^{-1/2}\phi(-\sqrt{x}) \\ &= x^{-1/2}\phi(\sqrt{x}) \,, \end{aligned}$$

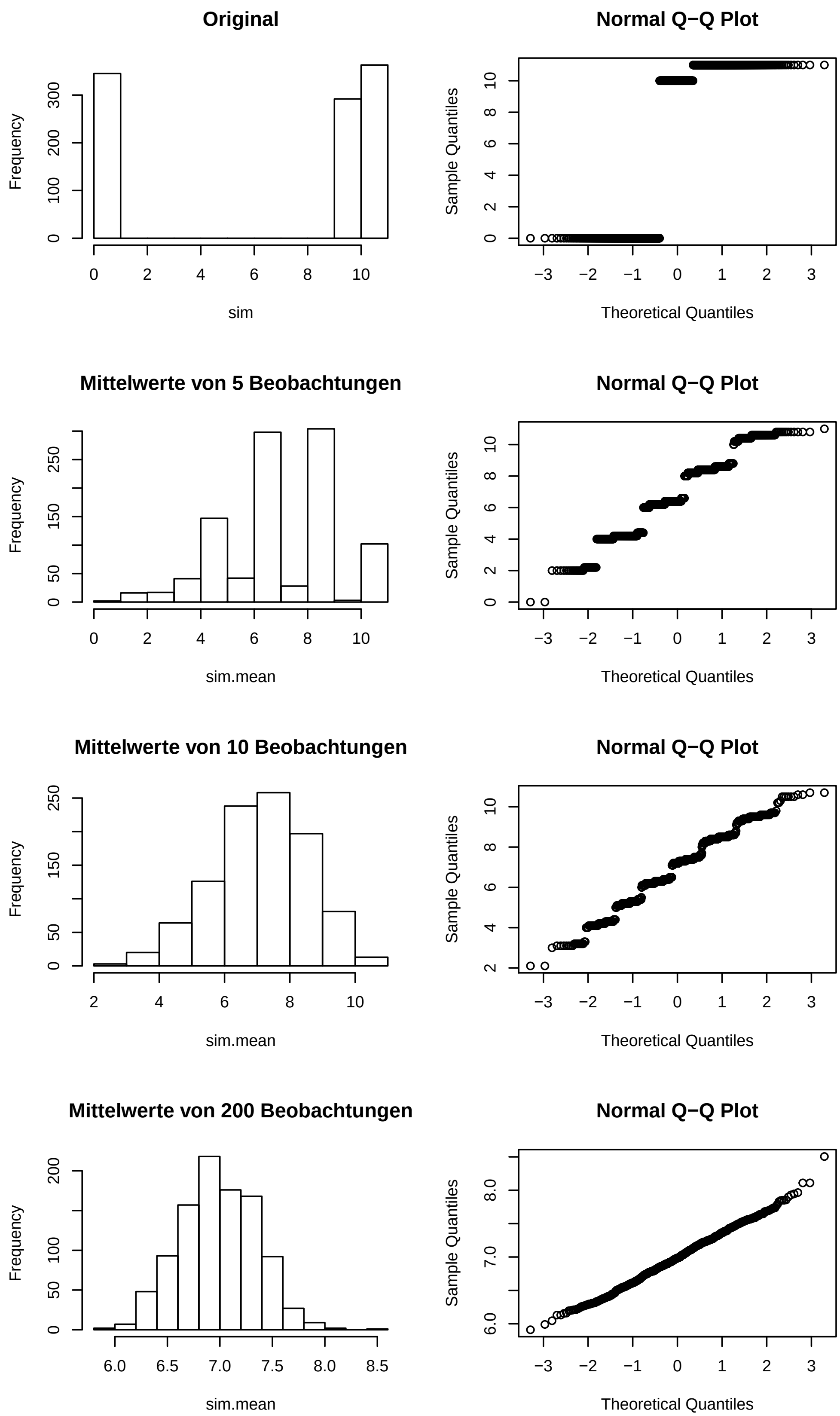
wobei wir im letzten Schritt die Symmetrie von Φ benützt haben. Werten wir den letzten Ausdruck aus, so finden wir

$$f_X(x) = \frac{x^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \,, \quad x \geq 0 \,.$$

Diese Wahrscheinlichkeitsdichte wird **Chi-Quadrat** Wahrscheinlichkeitsdichte mit einem Freiheitsgrad genannt.

Aufgabe 4

Die untenstehenden Graphiken zeigen, dass die Form der Verteilung des Mittelwerts von unabhängigen Zufallsvariablen auch dann der Normalverteilung immer ähnlicher wird, wenn die Variablen selber überhaupt nicht normalverteilt sind. An der x-Achse sieht man auch, dass die Varianz immer kleiner wird.


Original
Frequency
sim
Normal Q−Q Plot
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Mittelwerte von 5 Beobachtungen
Frequency
sim.mean
Normal Q−Q Plot
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Mittelwerte von 10 Beobachtungen
Frequency
sim.mean
Normal Q−Q Plot
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles
Mittelwerte von 200 Beobachtungen
Frequency
sim.mean
Normal Q−Q Plot
Sample Quantiles
Theoretical Quantiles