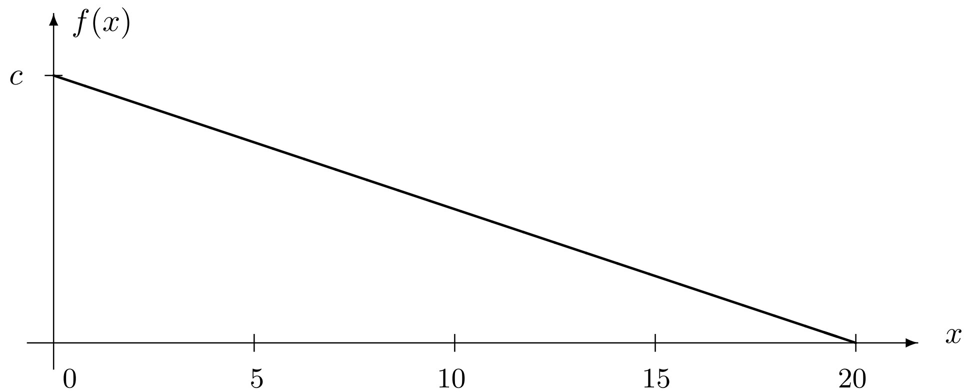
Vorbesprechung: 10/14. April 2013

Aufgabe 1

In der Stadt Zürich gibt es bekanntlich viele Baustellen. Die Dauer X der Arbeiten bei einer Baustelle liege zwischen 0 und 20 Wochen. Die Dichte $f(x)$ habe die folgende Form.



(a) Begründen Sie, warum $c = 0.1$ ist und schreibe die Dichte $f(x)$ explizit auf.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Bauzeit X weniger als

(i) 5

(ii) 10

Wochen beträgt.

(c) Skizzieren Sie die kumulative Verteilungsfunktion.

(d) Berechnen Sie den Erwartungswert, den Median und die Standardabweichung der Dauer X.

(e) $K = 40'000 \cdot \sqrt{X}$ entspreche dem Betrag in Franken, den die Arbeiten bei einer Baustelle kosten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Arbeiten bei einer Baustelle höchstens 120'000.- Fr. kosten?

Die vorgeschlagene Verteilung ist nur ein Modell. Man könnte die Dauer der Bauarbeiten zum Beispiel auch als exponential-verteilt annehmen.

(f) Für welchen Parameter λ hat die Exponentialverteilung denselben Erwartungswert wie die bisherig angenommene Verteilung?

(g) Berechnen Sie mit der gefundenen Exponentialverteilung nochmals Teilaufgabe (e).

Aufgabe 2

Monte Carlo Algorithmen sind randomisierte Algorithmen und stellen ein gutes Werkzeug für Simulationen von stochastischen Prozessen dar. Auch die Zahl π lässt sich mit Hilfe von Monte Carlo Simulationen bestimmen. Im folgenden möchten wir ein Computerprogramm erstellen, mit welchem man die Zahl π aufgrund von Monte Carlo Methoden simulieren kann. Man generiert hierzu zufällige Punkte $P \in \{(x,y)|x \in [-1,1] \,\text{und}\, y \in [-1,1]\}$ und überprüft, ob diese innerhalb des Einheitskreises mit Kreismittelpunkt $M_K = (0,0)$ und Radius $r = 1$ liegen. Die sich ergebende Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[(x,y) \in \text{Kreis}]$ stellt die Fläche eines Viertels des Einheitskreises dar. π kann nun mit folgender Formel berechnet werden

$$\frac{\text{Kreisfläche}}{\text{Quadratfläche}} = \frac{r^2 \cdot \pi}{(2 \cdot r)^2} \overset{r=1}{=} \frac{\pi}{4} = \frac{\text{Treffer in Kreisfläche}}{\text{generierte Punkte im Rechteck}} = P[(x,y) \in \text{Kreis}] \,.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Überlegung die Zahl π.

R-Hinweise:

```
## Generieren von 100 gleichmaessig verteilten Zufallszahlen im Intervall [-1,1]
runif(100,min=-1,max=1)
## Bestimmen der Anzahl Zahlen kleiner als eins; Beispiel: Anzahl von 100
## zufaellig im Intervall [0,10] generierten Zahlen, die kleiner als 1 sind:
sum(runif(100,min=0,max=10)<1)
```

Aufgabe 3

Ein technisches System hat eine exponentialverteilte Lebensdauer mit Parameter $c = 0.04$.

(**a**) Berechnen Sie den Median und den Erwartungswert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit überlebt das System seine Lebenserwartung?

(**b**) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Lebensdauer des Systems im Bereich $\mu \pm \sigma$?

(**c**) Beweisen Sie die Formeln für Erwartungswert und Varianz einer Exponentialverteilung mit Parameter $c > 0$.

Aufgabe 4

Aufgrund langjähriger Untersuchungen ist bekannt, dass der Bleigehalt X in einer Bodenprobe annähernd normalverteilt ist. Ausserdem weiss man, dass der Erwartungswert 32 ppb beträgt und dass die Standardabweichung 6 ppb beträgt.

(**a**) Machen Sie eine Skizze der Dichte von X und zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bodenprobe zwischen 26 und 38 ppb Blei enthält, in die Skizze ein.

(**b**) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bodenprobe höchstens 40 ppb Schwermetall enthält?

Hinweis: Gehen Sie zur standardisierten Zufallsvariablen Z über und benutzen Sie die R-Funktion **pnorm**.

(**c**) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bodenprobe höchstens 27 ppb Schwermetall enthält?

(**d**) Welcher Bleigehalt wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 97.5% unterschritten? Das heisst, bestimmen Sie dasjenige c, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Bleigehalt kleiner oder gleich c ist, genau 97.5% beträgt.

(**e**) Welcher Bleigehalt wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% unterschritten?

(**f**) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, die in Aufgabe a) eingezeichnet wurde?

Aufgabe 5

In einer Studie wurde untersucht, wie bei Mäusen die Aufnahme von Eisen (Fe^{3+}) von der Dosis abhängt. Dazu wurden 54 Mäuse zufällig in 3 Gruppen zu je 18 Mäusen eingeteilt und jeweils mit Dosis hoch, mittel und tief gefüttert (hoch = 10.2 millimolar, mittel=1.2 millimolar, tief=0.3 millimolar). Mittels radioaktiver Markierung wurde der Anteil des zurückgehaltenen Eisens in Prozent nach einer gewissen Zeit bestimmt.
Die Daten können Sie einlesen mit dem Befehl

```
> iron <- read.table("http://stat.ethz.ch/Teaching/Datasets/ironF3.dat",header = TRUE)
```

(**a**) Erstellen Sie für jede der 3 Versuchsbedingungen einen Boxplot, am Besten gerade nebeneinander. Wie unterscheiden sich die Daten der verschiedenen Versuchsbedingungen?

(**b**) Transformieren Sie alle Werte mit dem Logarithmus und erstellen Sie wieder die 3 Boxplots wie bei Aufgabe a). Was hat sich durch die Transformation geändert?

(**c**) Erstellen Sie einen Normalplot der Daten bei mittlerer Dosis vor und nach dem Logarithmieren. Wann passt die Normalverteilung besser? Verwenden Sie die R-Funktion **qqnorm**.