Aufgabe 1

(a) Zwischen der empirischen Kovarianz und der Steigung einer Regressionsgeraden existiert folgender Zusammenhang

$$\hat{m} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} .$$

Die Steigung der Regressionsgeraden berechnen wir aus folgender Beziehung

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{m}\bar{x} .$$

Daraus folgt für die Steigung der Regressionsgeraden $\hat{m} =$

```
> (12-7.8)/7

[1] 0.6
```

Somit ergibt sich $s_{xy} = \hat{m} \cdot s_x^2$ zu

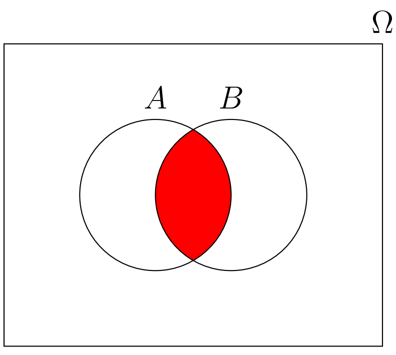
```
> 0.6*2.5^2

[1] 3.75
```

(b) Korrelationskoeffizient $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} =$

```
> round(3.75/(2.5*1.8),3)

[1] 0.833
```

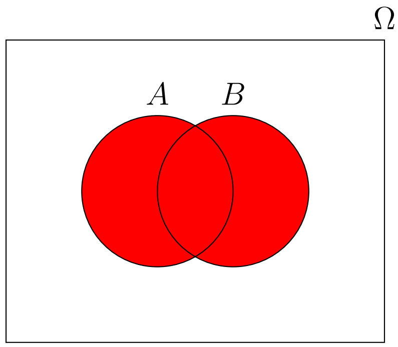
Aufgabe 2

```
> A<-3/4
> B<-2/3
```

(a) 

$P(\text{beide Ereignisse}) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} =$

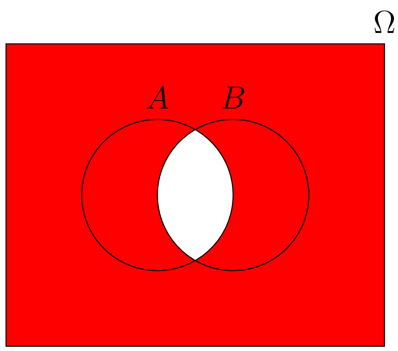
```
> library(MASS)
> fractions(A*B)

[1] 1/2
```

(**b**) 

$P(\text{mindestens eines}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) * P(B) =$

```
> library(MASS)
> fractions(A+B-A*B)
```

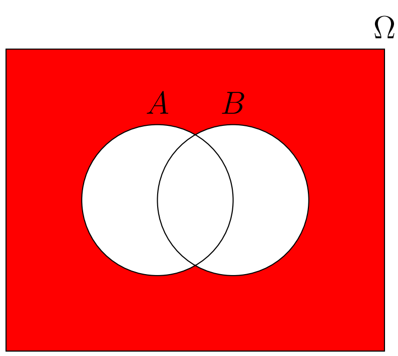
```
[1] 11/12
```

(**c**) 

$P(\text{höchstens eines}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - P(A) \cdot P(B)$

```
> library(MASS)
> fractions(1-A*B)
```

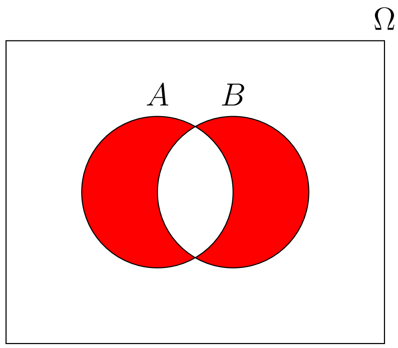
```
[1] 1/2
```

(**d**) 

$P(\text{kein Ereignis}) = \overline{P(A \cup B)} = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)) =$

```
> library(MASS)
> fractions(1-(A+B-A*B))
```

```
[1] 1/12
```



(e) $P(\text{genau ein Ereignis}) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A) \cdot P(B) =$

```
> library(MASS)
> fractions(A+B-2*A*B)
```

```
[1] 5/12
```

Aufgabe 3

Wir bezeichnen mit:

$$F := \text{Ereignis, dass Feuer ausbricht}$$
$$A := \text{Ereignis, dass der Alarm losgeht}\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Feuer ausbricht, ergibt sich zu

$$P(F) = \frac{1}{365}\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Alarm losgeht, gegeben es bricht ein Feuer aus, ist

$$P(A|F) = 0.95\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass es einen Alarm gibt, gegeben dass kein Feuer ausgebrochen ist, lautet

$$P(A|F^c) = 0.01\,.$$

(a) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Feuer ausgebrochen ist, gegeben es gab einen Alarm, ist

$$P(F|A) = \frac{P(A|F) \cdot P(F)}{P(A)}\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass es einen Alarm gibt, lässt sich mit dem Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit ausdrücken:

$$P(A) = P(A|F) \cdot P(F) + P(A|F^c) \cdot P(F^c)\,.$$

Also ergibt sich für

$$P(F|A) = \frac{P(A|F) \cdot P(F)}{P(A|F) \cdot P(F) + P(A|F^c) \cdot P(F^c)} = \frac{0.95 \cdot \frac{1}{365}}{0.95 \cdot \frac{1}{365} + 0.01 \cdot (1 - \frac{1}{365})} = 0.207\,.$$

(**b**) Die Wahrscheinlichkeit, dass kein Feuer ausgebrochen ist, gegeben es gab keinen Alarm, ist

$$P(F^c|A^c) = \frac{P(F^c \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(A^c|F^c) \cdot P(F^c)}{1 - P(A)}\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass kein Alarm losgeht, gegeben es bricht kein Feuer aus, ist

$$P(A^c|F^c) = 1 - P(A|F^c)\,.$$

Also finden wir

$$P(F^c|A^c) = \frac{(1 - P(A|F^c)) \cdot P(F^c)}{1 - P(A)} = \frac{(1 - 0.01) \cdot \frac{364}{365}}{1 - (0.95 \cdot \frac{1}{365} + 0.01 \cdot (1 - \frac{1}{365}))} = 0.999\,.$$

Aufgabe 4

(**a**) $\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), (2,2), \ldots, (2,6), \ldots, (6,6)\}$, $|\Omega| = 36$

(**b**) $P(\text{Elementarereignis}) = \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{36}$

(**c**) $E_1 = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$
Anzahl günstige Fälle: $|E_1| = 6$
Anzahl mögliche Fälle: $\Omega = 36$
$P(E_1) = \frac{|E_1|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(**d**) $E_2 = \{(1,1), (2,1), (1,2)\}$;
$P(E_2) = \frac{|E_2|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

(**e**) $E_3 = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$;
$P(E_3) = \frac{|E_3|}{|\Omega|} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

(**f**) Mit dem Additionssatz:

$$\begin{aligned} P(E_2 \cup E_3) &= P(E_2) + P(E_3) - P(E_2 \cap E_3) \\ &= P(E_2) + P(E_3) - P(\{(1,1)\}) \\ &= \frac{3}{36} + \frac{9}{36} - \frac{1}{36} \\ &= \frac{11}{36}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a) Da Zahl und Kopf die möglichen Elementarereignisse sind, müsste die Summe deren Wahrscheinlichkeiten 1 sein. Dies ist hier aber nicht der Fall: $P(\Omega) = P(\text{Zahl}) + P(\text{Kopf}) = 1.05$.(Axiom 2 ist verletzt.)

(b) Die genannte Wahrscheinlichkeit ist negativ. (Axiom 1 ist verletzt.)

(c) Es gilt $S \cap M = \emptyset$ und darum müsste $P(S) + P(M) = P(S \cup M)$ wegen Axiom 3. Dies ist hieraber nicht erfüllt.

Aufgabe 6

(a)

	E	N
w	$P(w \cap E) = 0.514 \cdot 0.409 = 0.210266$	$P(w \cap N) = 0.514 \cdot 0.591 = 0.303774$
m	$P(m \cap E) = 0.486 \cdot 0.578 = 0.280908$	$P(m \cap N) = 0.486 \cdot 0.422 = 0.205092$

(b) $P(E) = P(w \cap E) + P(m \cap E) = 0.210266 + 0.280908 = 0.491134 \approx 0.491$
$P(w|E) = \frac{P(w \cap E)}{P(E)} = \frac{0.210266}{0.491134} \approx 0.428$

(c) $P(m|E) = \frac{P(m \cap E)}{P(E)} = \frac{0.280908}{0.491134} \approx 0.572$
$P(N) = P(w \cap N) + P(m \cap N) = 0.303774 + 0.205092 = 0.508866 \approx 0.509$
$P(w|N) = \frac{P(w \cap N)}{P(N)} = \frac{0.303774}{0.508866} \approx 0.597$
$P(m|N) = \frac{P(m \cap N)}{P(N)} = \frac{0.205092}{0.508866} \approx 0.403$