1 Aufgabe 1

In der Stadt Zürich hat es bekanntlich viele Baustellen. Die Dauer X der Arbeiten bei einer Baustelle liege zwischen 0 und 20 Wochen. Die Dichte $f(x)$ habe die folgende Form (siehe Original).

(a) Begründen Sie, warum $c = 0.1$ ist und schreibe die Dichte $f(x)$ explizit auf.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Bauzeit X weniger Betrage als

  (i) 5

  (ii) 10

(c) Skizzieren Die die kumulative Verteilungsfunktion.

(d) Berechnen Sie den Erwartungswert, den Median, und die Standardabweichung der Dauer X.

(e) $K = 400 \cdot sqrtX$ entspreche dem Betrag in Franken, den die Arbeiten bei einer Baustelle kosten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Arbeiten bei einer Baustelle höchstens 120'000.- Fr. kosten?

a)

$$\int f(x)dx \overset{!}{=} 1$$

$$\Rightarrow \text{bei 20 Wochen gilt: } \frac{c \cdot 20W}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{1 \cdot 2}{20W} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

b)

$$\int_0^5 f(x)dx \overset{?}{=}$$

$$y = m \cdot x + b \to y = f(x) = \frac{-0.1}{20} \cdot x + 0.1$$

i

$$\int_0^5 \left(\frac{-5}{1000} \cdot x + 0.1\right) dx = \frac{-5}{1000} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + 0.1 \cdot x \Big|_0^5 = 0.4375$$

ii

$$\int_0^{10} \left(\frac{-5}{1000} \cdot x + 0.1\right) dx = \frac{-5}{1000} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + 0.1 \cdot x \Big|_0^{10} = 0.75$$

c

e-Funktion

d

Erwartungswert

$$E(X) = \int_0^{20} x \cdot f(x)dx \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{-5}{1000} \cdot x + 0.1$$

$$\int_0^{20} f(x)dx \overset{!}{=} \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$\sum_{i=0}^{x} f(x) = \sum_{i=0}^{x} \left(\frac{-5}{1000} \cdot i + 0.1 \right)$$

$$Var(x) = E(x^2) - E(x)^2 = \int_0^{20} x^2 \left[\frac{1}{10} \left(1 - \frac{x}{20} \right) \right] dx - \left(\frac{20}{3} \right)^2 = \frac{200}{9}$$

Median

$$F(m) = 0.5 \Leftrightarrow \frac{m}{10} - \frac{m^2}{10^2} \overset{!}{=} 0.5$$

m ist dabei das $q(0.5)$ bzw. das 50% Quantil.

$$\Rightarrow m = 5.858$$

Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = 4.71$$

e

$$P\left[K \leq 120'000\right] = P\left[40'000\sqrt{x} \leq 120'000\right]$$

$$\Rightarrow P\left[\sqrt{x} \leq \frac{120'000}{40'000}\right] = P\left[\sqrt{x} \leq 3\right] = P\left[X \leq 9\right] = F(9) = 0.6975$$

f)

g)

2 Aufgabe 2

Monte Carlo Algorithmen sind randomisierte Algorithmen und stellen ein gutes Werkzeug für Simulationen von stochastischen Prozessen dar. Auch die Zahl π lässt sich mit Hilfe von Monte Carlo Simulationen bestimmen. Im folgenden möchten wir ein Coputerprogramm erstellen, mit welchem man die Zahl π aufgrund von Monte Carlo Methoden simulieren kann. Man generiert hierzu zufällige Punkte $P \in \{(x, y)|x \in [-1, 1]\}$ und $y \in [-1, 1]$ und überprüft ob diese innerhalb des Einheitskreises mit Kreismittelpunkt $M_K = (0, 0)$ und Radius $r = 1$ liegen. Die sich ergebende Wahrscheinlichkeitsverteilung $P[(x, y) \in Kreis]$ stellt die Fläche eines Viertels des Einheitskreises dar. π kann mit folgender Formel berechnet werden

$$\frac{\text{Kreisfläche}}{\text{Quadratfläche}} = \frac{r^2 \cdot \pi}{(2 \cdot r)^2} \overset{r=1}{=} \frac{\text{Treffer in Kreisfläche}}{\text{generierte Punkte im Rechteck}} = P[(x, y) \in \text{Kreis}]$$

Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Überlegung die Zahl π.

R-Hinweise

Generieren von 100 gleichmässig verteilten Zufallszahlen im Intervall $[-1, 1]$

```
> runif(100,min=-1,max=1)
```

```
  [1]  0.293303136  0.252285493 -0.511360832  0.221595446 -0.433094147
  [6] -0.380394506  0.185494593 -0.629246279  0.005298032 -0.091904954
 [11] -0.450648750 -0.519612524 -0.961254559 -0.535350169 -0.715593869
 [16] -0.698631496  0.024673367  0.874726356 -0.250469875  0.489096812
 [21]  0.128081447  0.741530967  0.227473013 -0.997383171  0.341320340
 [26]  0.183948306  0.297369509  0.493759362  0.869075510 -0.877784347
 [31] -0.774597901 -0.319494008  0.600321830  0.851210922  0.459394308
 [36]  0.654002727 -0.966738819  0.115382323  0.772705388 -0.119948466
 [41]  0.945852546  0.364521837  0.067405710 -0.663717043  0.110878991
 [46] -0.557667727  0.750874742  0.558801940  0.652024109 -0.534447795
 [51]  0.250492516 -0.757329533 -0.145014107 -0.309041584  0.363789978
 [56]  0.456313374  0.390709062  0.180324906  0.782221419 -0.942286048
 [61] -0.878977387  0.419507094  0.864456390 -0.191206773  0.843168562
 [66]  0.162887458  0.193042846 -0.778591896 -0.552269533 -0.072496875
 [71]  0.555943059 -0.426381263  0.427546335  0.150976805  0.108892525
 [76]  0.552407106  0.769777689  0.675423159 -0.342379903  0.763055801
 [81]  0.143727367  0.251790399 -0.910468590 -0.941514170  0.449515221
 [86] -0.224184609 -0.221449813 -0.974102150 -0.570577623  0.030129983
 [91]  0.167591250  0.715954801  0.325889031  0.356417773 -0.942434844
 [96]  0.716242312  0.824929562  0.420772235  0.734431196  0.307365970
```

Bestimmen der Anzahl Zahlen die kleiner als Eins sind. Beispiel; Anzahl von 100 zufällig im Intervall $[0, 10]$ *generierten Zahlen, die kleiner als 1 sind:*

```
> sum(runif(100,min=0,max=10)<1)
```

```
[1] 9
```

Lösungsvorschlag

```
> # Punkte berechnen die innerhalb der Grenzen des Einheitskreises sind
> x.grenze <- runif(100000000,min=-1,max=1)
> y.grenze <- runif(100000000,min=-1,max=1)
> # Nun die Punkte ermitteln die sowohl in x- und y-wert innerhalb sind
> kreis <- sqrt(x.grenze^2 + y.grenze^2)
> # die Kreiszahl ermitteln aus allen Punkten mit Radius kleiner 1
> # und die Flöäche durch vier teilen
> my.pi <- sum(kreis<1)/100000000*4
> my.pi
```

```
[1] 3.141568
```

Ich weiss nicht wieso genau aber mit jeder neuen durchführung von Sweave verändern sich die Resultate der Zahl π. *Es scheint so als ob es mit jeder Sweave-Durchführung sich immer mehr an die Zahl* π *annähert (desshalb so viele Versuche* 100000000*)*

3 Aufgabe 3

Ein technisches System hat eine exponentialverteilte Lebensdauer mit Perameter $c = 0.04$.

(a) Berechnen Sie den Median und den Erwartungswert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit überlebt das System seine Lebenswerwartung?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Lebensdauer des Systems im Bereich $\mu \pm \sigma$?

(c) Beweisen Sie die Formeln für den Werwartungswert und die Varianz einer Exponentialverteilung mit Parameter $c > 0$.

a)

Median

$$F(m_{0.5}) = \frac{\ln(2)}{c}$$

```
> log(2)/0.04
```

```
[1] 17.32868
```

Erwartungswert

$$E(X) = \frac{1}{c}$$

```
> 1/0.04
```

```
[1] 25
```

P um eigene Lebensdauer zu übertreffen

$$P(x) = 1 - e^{-cx}$$

b)

$$P(x = \mu \pm \sigma) \stackrel{?}{=}$$

c)