Vorbesprechung: 13/14. März 2013

Aufgabe 1

Ein Stand auf einem Volksfest bietet ein Würfelspiel an. Man wirft zwei sechsseitige Würfel. Je nach Ausgang des Wurfs muss man Geld bezahlen oder man erhält Geld. Hier sind die Regeln des Spiels:

(1) Bei einem Pasch (also $(1,1)$, $(2,2)$, etc.) gewinnt der Spieler 10 SFr (Gewinn 10 SFr).

(2) Bei $(1,2)$ oder $(2,1)$ gewinnt der Spieler 20 SFr (Gewinn 20 SFr).

(3) Bei allen anderen Ergebnissen verliert der Spieler 4 SFr (Gewinn -4 SFr).

(**a**) Sei X die Zufallsvariable, die den Gewinn des Spielers nach einem Wurf angibt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung.

(**b**) (Knobelaufgabe) Würden Sie dieses Spiel spielen? Überlegen Sie sich eine Möglichkeit, wie man mit einer Zahl angeben kann, ob sich das Spiel lohnt oder nicht.

Aufgabe 2

Bei einer Untersuchung werden Wasserproben (10 ml) auf Verunreinigungen untersucht. Da nur 2 Prozent aller Proben verunreinigt sind, wird vorgeschlagen, von 10 Einzelproben jeweils die Hälfte (5 ml) der Proben zu einer Sammelprobe (50 ml) zusammenzumischen und zunächst nur die Sammelprobe zu untersuchen. Wird in der Sammelprobe keine Verunreinigung festgestellt, so ist die Untersuchung für die 10 Einzeluntersuchungen beendet. Im anderen Fall werden alle 10 übriggebliebenen Hälften in 10 Einzeluntersuchungen geprüft.

(**a**) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in der Sammelprobe keine Verunreinigung zu finden (unter der Annahme, dass die Einzelproben unabhängig voneinander sind)?

(**b**) Sei die Zufallsvariable Y die Gesamtzahl benötigter Analysen. Welche Werte kann Y annehmen, und mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten sie auf?

(**c**) Wieviele Analysen werden im Durchschnitt für die gesamte Untersuchung benötigt (d.h. wie gross ist $\mathrm{E}[Y]$)? Wieviele Analysen werden durch die Bildung von Sammelproben "im Durchschnitt" eingespart?

Aufgabe 3

Ein Hersteller von Reagenzgläsern möchte sicherstellen, dass eine grosse Lieferung weniger als 10% minderwertige Gläser enthält (Qualitätsstufe A). Zwecks Qualitätssicherung entnimmt er der Lieferung eine zufällige Stichprobe im Umfang von fünfzig Gläsern. Es stellt sich heraus, dass von diesen fünfzig Gläsern drei minderwertig sind.
Für den Hersteller stellt sich nun das Problem, aufgrund der gezogenen Stichprobe zu entscheiden, ob er tatsächlich beruhigt davon ausgehen kann, dass die ganze Lieferung einen Anteil minderwertiger Gläser $< 10\%$ enthält oder ob es als plausibel gelten kann, dass er in der Stichprobe "rein zufällig" einen Anteil minderwertiger Gläser unter 10% erwischt hat, obwohl die ganze Lieferung in Tat und Wahrheit einen Anteil minderwertiger Gläser von 10% oder mehr aufweist.

(**a**) Welches Modell bzw. welche Verteilung beschreibt die Anzahl minderwertiger Gläser in der Stichprobe unter der Annahme, dass die einzelnen Gläser voneinander unabhängig sind?

(**b**) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,dass die gezogene Stichprobe genau drei minderwertige Gläser enthält, wenn der wahre Anteil minderwertiger Gläser in der Lieferung 10% beträgt?

(**c**) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Stichprobe höchstens drei minderwertige Gläser enthält, wenn die Lieferung einen Anteil von 10% minderwertiger Gläser enthält?

(**d**) Formulieren Sie in wenigen Worten das "Problem" des Herstellers!

Aufgabe 4

Verwende **R** um folgende Grössen zu berechnen.
Es sei $X \sim \text{Bin}(50, 0.2)$.

(**a**) $P(X = 10)$

(**b**) $P(X \leq 5)$

(**c**) $P(X \geq 15)$

(**d**) Finde c sodass $P(X \leq c) \approx 0.99$

Aufgabe 5

Binomialkoeffizienten spielen in der abzählenden Kombinatorik eine zentrale Rolle, denn $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge mit n Elementen k Elemente auszuwählen, wobei die Reihenfolge der ausgewählten Elemente nicht berücksichtigt wird. Anschaulich lässt sich das so erklären: Man berechne mit $n!$ alle möglichen Vertauschungen, suche sich k "Felder" aus (beispielsweise 6 beim Lotto) und frage sich, wie viele Möglichkeiten es gibt, diese Felder zu besetzen (beim Lotto mit 49 Zahlen). Da es keine Rolle spielt, welches "Ereignis" sich auf welchem Feld ereignet hat, dividiert man alle unter diesen k Elementen möglichen Vertauschungen mit $k!$ heraus. Da es auch keine Rolle spielt, wie die Anordnung auf den uninteressanten Feldern aussieht, dividiert man mit $(n-k)!$ auch diese Vertauschungen heraus.

(**a**) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto sechs richtige Zahlen zu ziehen?

(**b**) Das Programm eines Computers stellt für die Darstellung einer Zahl 15 Zeichenplätze (Bits) zur Verfügung, die mit 0 oder 1 belegt werden. Wieviele solcher Zahlen mit 7 Ziffern 1 gibt es? Wieviele Zahlen können insgesamt dargestellt werden?