Vorbesprechung: 20/21. März 2013

Aufgabe 1

Verwende **R** um folgende Grössen zu berechnen.
Es sei $X \sim \text{Poisson}(200)$ die Zufallsvariable, die die Anzahl Unfälle in einem Jahr beschreibt.

(**a**) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr genau 200 Unfälle passieren?

(**b**) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr höchstens 210 Unfälle passieren?

(**c**) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Jahr zwischen 190 und 210 Unfälle passieren (beide Grenzen eingeschlossen)?

Aufgabe 2

Die Zufallsvariable, die die Anzahl eingehender Telefonanrufe in einer Telefonzentrale innerhalb von 10 Minuten beschreibt, nennen wir X. Sie folgt einer Poissonverteilung mit Erwartungswert $\lambda = 2$, d.h. $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

(**a**) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in einer bestimmten 10-Minuten-Periode keinen einzigen Anruf gibt?

(**b**) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es nicht mehr als drei Telefonanrufe in einer bestimmten 10-Minuten-Periode gibt?

(**c**) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mehr als drei Telefonanrufe in einer bestimmten 10-Minuten-Periode gibt?

(**d**) Angenommen, die Anzahl Anrufe in einer 10-Minuten-Periode ist von der Anzahl Anrufe in einer anderen 10-Minuten-Periode unabhängig. Die Zufallsvariable, die die Anzahl Anrufe in einer Stunde beschreibt bezeichnen wir mit Y. Welcher Verteilung folgt Y?

Aufgabe 3

In der Vorlesung haben wir gesehen, wie man die Erfolgswahrscheinlichkeit π einer Binomialverteilung mit der Maximum-Likelihood-Methode schätzen kann, wenn man die Anzahl Versuche und die Anzahl Gewinne kennt. In dieser Aufgabe kombinieren wir mehrere solcher Beobachtungen zu einer Schätzung.
Angenommen Sie gehen über den Jahrmarkt und kaufen bei einer Losbude 30 Lose. Unter den 30 Losen sind 2 Gewinne. Am nächsten Tag erzählt Ihnen Ihr Studienkollege, dass er am Vorabend bei der gleichen Losbude 50 Lose gekauft hat und darunter 4 Gewinne hatte. Wie kombinieren Sie die beiden Ergebnisse, um mit der Maximum-Likelihood-Methode eine möglichst gute Schätzung der Erfolgswahrscheinlichkeit zu erhalten?

(**a**) Sei X_1 die Zufallsvariable, die die Anzahl Gewinne unter 30 Losen beschreibt ("Ihre" Gewinne). Wenn wir annehmen, dass jedes Los unabhängig von jedem anderen Los ein Gewinn oder eine Niete ist, dann folgt X einer Binomialverteilung mit $n_1 = 30$ und unbekanntem Erfolgsparameter π. Abgekürzt schreiben wir: $X_1 \sim \text{Bin}(n_1, \pi)$. Analog sei X_2 die Zufallsvariable, die die Gewinne Ihres Kollegen beschreibt: $X_2 \sim \text{Bin}(n_2, \pi)$ mit $n_2 = 50$ und dem gleichen Wert für die Erfolgswahrscheinlichkeit wie bei X_1. Angenommen, die Anzahl Gewinne, die Sie gezogen haben, ist unabhängig von der Anzahl Gewinne, die Ihr Kollege gezogen hat. Wie lässt sich dann $P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2)$ schreiben?

(**b**) Wie lässt sich $\log(P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2))$ schreiben? Versuchen Sie diesen Term in eine Summe mit mehreren Termen umzuschreiben. Welche Terme hängen von π ab und welche nicht?

(**c**) Der Maximum-Likelihood-Schätzer für π ist derjenige Zahlenwert, der, wenn man ihn anstelle von π einsetzt, den grösstmöglichen Wert für $\log(P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2))$ (oder $P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2)$; das ist egal, weil die Funktion log monoton ist) liefert. Finden Sie durch Ableiten und gleich Null setzen den Wert von π in Abhängigkeit von n_1, n_2, x_1 und x_2, der $\log(P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2))$ maximiert.

Aufgabe 4

Das Pharmaunternehmen Life Co. hat ein neues Medikament zur Bekämpfung von ADHS entwickelt. Um die Wirksamkeit festzustellen wurde das Medikament mit $n = 10$ Patienten getestet. Die derzeitige Standardmethode zeigt bei 30% der behandelten Patienten eine Wirkung.

(**a**) Angenommen das neue Medikament ist genauso wirksam wie die Standardmethode, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Behandlung bei genau 2 Patienten eine Wirkung zeigt? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie bei höchstens 2 Patienten eine Wirkung zeigt?

(**b**) Die Behandlung mit dem neuen Medikament war bei 4 Patienten erfolgreich. Führen Sie einen einseitigen Hypothesentest durch um festzustellen ob das neue Medikament wirksamer ist als die Standardmethode (bei einem Signifikanzniveau von 5%). Geben Sie explizit alle Schritte an.

(**c**) Wie ist die Macht eines Hypothesentests definiert? Geben Sie die Macht an für den Test H_0: $\pi = 0.3$ vs. $H_A : \pi = 0.6$ (π ist die Wirksamkeit).

Aufgabe 5

("Qualitätskontrolle von Reagenzgläsern") Ein Hersteller von Reagenzgläsern garantiert seinen Kunden, dass der Anteil minderwertiger Gläser kleiner als 10% ist. Zwecks Qualitätssicherung entnimmt er einer grossen Lieferung eine zufällige Stichprobe im Umfang von fünfzig Gläsern. Es stellt sich heraus, dass von diesen fünfzig Gläsern 3 minderwertig sind. Für den Hersteller ergibt sich nun das Problem: Kann er aufgrund der gezogenen Stichprobe tatsächlich beruhigt davon ausgehen, dass der Anteil minderwertiger Gläser in der ganze Lieferung wirklich kleiner als 10% ist. Führen Sie einen Hypothesentest mit dem Signifikanzniveau 5% durch. Lösen Sie damit das Problem des Herstellers.

Aufgabe 6

Wir betrachten nochmals das Beispiel "Qualitätskontrolle von Reagenzgläsern". Man nimmt jeweils eine Stichprobe von 50 Gläsern und zählt die Anzahl minderwertiger Exemplare (X). Das Testproblem bestand im Testen der Nullhypothese $H_0 : \pi = 0.1$ gegen die Alternative H_A: $\pi < 0.1$. Auf dem 5%-Niveau resultierte ein Verwerfungsbereich von $K = \{X \leq 1\}$.

(**a**) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Test verwirft, wenn in Tat und Wahrheit $\pi = 0.075$ gilt. Dies heisst die Macht des Tests unter der Alternative $\pi = 0.075$. Verwenden Sie hierzu die R-Funktion **pbinom**.

Hinweise:

pbinom(q, size, prob) ist die kumulative Verteilungsfunktion einer Binomialverteilung an der Stelle **q**. Das Argument **size** ist die Stichprobengrösse und das Argument **prob** die Erfolgswahrscheinlichkeit.

(**b**) Angenommen man nimmt nun Stichproben der Grösse $n = 150$. Bestimmen Sie zuerst den Verwerfungsbereich und anschliessend die Macht wie oben.

Hinweise:

Mit **pbinom(0:50, size = ..., prob = ...)** können Sie die Verteilungsfunktion unter der Nullhypothse an den Stellen $0, \ldots, 50$ auswerten. Bestimmen Sie dann daraus den Verwerfungsbereich.