Lösungen zu Serie 6

Aufgabe 1

X sei die Anzahl Patienten, die auf die Behandlung ansprechen. Es gilt also $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$ mit $n = 16$.

(a) Gemäss Fragestellung haben wir $H_0: \ \pi_0 = 0.15$ und $H_A: \ \pi > 0.15$.

Der Verwerfungsbereich hat also die Form $K = [c, n]$.

Wir bestimmen c indem, wir $P_{H_0}(X \in K)$ für verschiedene, grösser werdende c berechnen, so lange, bis die entsprechende Wahrscheinlichkeit kleiner oder gleich 5% wird. Dabei benutzen wir, dass

$$P_{H_0}(X \geq c) = 1 - P_{H_0}(X \leq c - 1)$$

gilt.

```
> 1-pbinom(1,16,0.15)
[1] 0.7160988
> 1-pbinom(2,16,0.15)
[1] 0.4386207
> 1-pbinom(3,16,0.15)
[1] 0.2101093
> 1-pbinom(4,16,0.15)
[1] 0.0790513
> 1-pbinom(5,16,0.15)
[1] 0.02354438
```

Somit ist unser $c = 5 + 1 = 6$, d.h. der Verwerfungsbereich ist $K = [6, 16]$. Da 5 nicht im Verwerfungsbereich liegt, wird die Nullhypothese beibehalten.

(b) Obigem R-Output entnehmen wir, dass bei der Beobachtung mit P-Wert $p = 0.0790513$ der Testentscheid von Beibehalten zu Verwerfen wechselt.

(c) Die Wahrscheinlichkeit, dass H_0 verworfen wird, wenn die wahre Ansprechwahrscheinlichkeit $\pi = 0.3$ ist, berechnet sich wie folgt:

$$P_{\pi=0.3}(T \in K) = P_{\pi=0.3}(T \geq 6) = 1 - P_{\pi=0.3}(T \leq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{5} \binom{16}{k} 0.3^k 0.7^{16-k}$$

Wir berechnen dies mit R:

```
> 1-pbinom(5,16,0.3)
[1] 0.3402177
```

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also 0.3402177. Dies ist die Macht dieses statistischen Tests.

Aufgabe 2

(a) Wir benutzen folgende Notation: $R = \textit{Reise}$; $A = \textit{Absage}$.

$$P[3R\ 1A] = \binom{4}{3} \cdot 0.9^3 \cdot 0.1^1 = 0.2916 = 29.16\%$$

(b) S_n sei der Anzahl Personen, die den Flug nehmen möchten. S_n ist binomialverteilt. Mit 28 Passagiere haben wir:

$$\begin{aligned} S_{28} &\sim \text{Bin}(28, 0.9) \\ \mathbf{E}[S_{28}] &= 28 \cdot 0.9 = 25.2 \\ \text{Var}(S_{28}) &= 28 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 2.52 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P[\text{Zu viele Leute}] &= P[k = 27] + P[k = 28] \\ &= \binom{28}{27} \cdot 0.9^{27} \cdot 0.1^1 + \binom{28}{28} \cdot 0.9^{28} \cdot 0.1^0 \\ &= 0.1628 + 0.05233 \\ &= 0.215154 \\ &= 21.52\% \end{aligned}$$

(d)

- Nullhypothese und Alternative

$$\begin{aligned} H_0 :&\ \ \pi = \pi_0 = \frac{801}{890} \\ H_A :&\ \ \pi \neq \pi_0 \end{aligned}$$

- Das Signifikanzniveau ist $\alpha = 0.05$.
- Verwerfungsbereich (Normalapproximation):

$$K = [0, c_u] \cup [c_0, n] = [0, 783.45] \cup [818.54, 890]$$

wobei

$$\begin{aligned} c_u &= n\pi_0 - 1.96\sqrt{n\pi_0(1 - \pi_0)} \quad \text{abrunden} \\ c_o &= n\pi_0 + 1.96\sqrt{n\pi_0(1 - \pi_0)} \quad \text{aufrunden} \end{aligned}$$

- Testentscheidung: ist die beobachtete Anzahl Personen am Flughafen in K ? Ja, so wird die Nullhypohese deutlich verworfen.

Aufgabe 3

(**a**) Das 95% Vertrauensintervall ist gegeben durch $\frac{x}{n} \pm \frac{1.96}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})}$. Mit x= Beobachtete Anzahl Gewinne und n= Anzahl Wiederholungen, finden wir [0.0438,0.2362].

(**b**)
```
?binom.test
binom.test(7,50)
```

Das 95% Vertrauensintervall ist gegeben durch

```
95 percent confidence interval:
```

0.0581917 0.2673960

Aufgabe 4

(**a**) Das Intervall sollte in 95% der Fälle den wahren Wert enthalten. Da wir 20 Realisationen betrachten, erwarten wir, dass der Wert im Schnitt 1 mal nicht im Intervall enthalten ist. Wir verwenden folgenden R-Code:

```
> set.seed(79) ## Macht Resultate reproduzierbar
> p <- 0.3
> x <- rbinom(20, 50, p) ## 20 Werte simulieren
> ## Grenzen der Intervalle in Matrix speichern
> ## 1. Spalte ist untere Grenze, 2. Spalte obere
> confint.bound  <- matrix(0, nrow = 20, ncol = 2)
> contains.truth <- logical(20)
> ## Alle 20 Faelle untersuchen und Grenzen speichern
> for(i in 1:20){
+ test <- binom.test(x[i], 50, p)
+ confint.bound[i,] <- test$conf.int
+ contains.truth[i] <-
+ (p >= confint.bound[i,1]) & (p <= confint.bound[i,2])
+ }
> sum(contains.truth)
```

```
[1] 19
```

Für unsere Simulationen ist der wahre Wert wie erwartet in 19 der Vertrauensintervalle enthalten. Je nach Simulation kann es natürlich sein, dass der Wert immer enthalten oder in weniger als 19 Fälle enthalten ist (die Anzahl Intervalle, die den wahren Wert enthalten, ist binomialverteilt mit $n = 20$ und Erfolgswahrscheinlichkeit 0.95)

(b) **R-Code**:

```
> ## Relative Haeufigkeiten plotten
> plot(x / 50, 1:20, xlim = c(0, 1), xlab = "Probability",
+ ylab = "Simulation Number")
> ## Vertrauensintervalle als Liniensegemente plotten
> for(i in 1:20){
+ segments(confint.bound[i,1], i, confint.bound[i,2], i)
+ }
> ## Wahrer Wert als vertikale Linie einzeichnen
> abline(v = p)
```

und wir erhalten so folgende Graphik