**Stochastik** | **Serie 3** | **HSLU**

*Vorbesprechung: 6/7. März 2013*

## Aufgabe 1

Eine Regressionsgerade hat die Gleichung $y = mx + 7.8$. Der Durchschnitt der $x$-Werte beträgt 7, derjenige der $y$-Werte ist 12. Die Standardabweichungen betragen $s_x = 2.5$ und $s_y = 1.8$.

(**a**) Berechnen Sie die Kovarianz zwischen den $x$- und den $y$-Werten.

(**b**) Berechnen Sie den Korrelationskoffizienten $r$.

(**c**) Berechnen Sie die Steigung $m$.

## Aufgabe 2

Die Ereignisse $A$ und $B$ seien unabhängig mit Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 3/4$ und $P(B) = 2/3$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

(**a**) Beide Ereignisse treten ein.

(**b**) Mindestens eines von beiden Ereignissen tritt ein.

(**c**) Höchstens eines von beiden Ereignissen tritt ein.

(**d**) Keines der beiden Ereignisse tritt ein.

(**e**) Genau eines der Ereignisse tritt ein .

## Aufgabe 3

Die Rauchsensoren in einer Fabrik melden ein Feuer mit Wahrscheinlichkeit 0.95. An einem Tag ohne Brand geben sie mit Wahrscheinlichkeit 0.01 falschen Alarm. Pro Jahr rechnet man mit einem Brand.

(**a**) Die Alarmanlage meldet Feuer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit brennt es tatsächlich?

(**b**) In einer Nacht ist es ruhig (kein Alarm). Mit welcher Wahrscheinlichkeit brennt es tatsächlich nicht?

## Aufgabe 4

Bei einem Zufallsexperiment werden zwei Würfel gleichzeitig geworfen. Wir nehmen an, dass sie "fair" sind, d.h. die Augenzahlen 1 bis 6 eines Würfels treten mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.

(**a**) Beschreiben Sie den Ereignisraum in Form von Elementarereignissen.

(**b**) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Elementarereignisses?

(**c**) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis $E_1$ "Die Augensumme ist 7 " eintritt.

(**d**) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis $E_2$ "Die Augensumme ist kleiner als 4" eintritt.

(**e**) Bestimmen Sie $P(E_3)$ für das Ereignis $E_3$ "Beide Augenzahlen sind ungerade".

(**f**) Berechnen Sie $P(E_2 \cup E_3)$.

## Aufgabe 5

Wo steckt in den folgenden Aussagen der Fehler? Begründen Sie!

(**a**) Bei einer gezinkten Münze wurde festgestellt, dass $P(\text{Kopf}) = 0.32$ und $P(\text{Zahl}) = 0.73$.

(**b**) Die Wahrscheinlichkeit für einen "Sechser" im Zahlenlotto ist $-3 \cdot 10^{-6}$.

(**c**) Bei einer Befragung wurden die Ereignisse

S: Befragte Person ist schwanger.
M: Befragte Person ist männlich.

untersucht. Man findet $P(S) = 0.1$, $P(M) = 0.5$ und $P(S \cup M) = 0.7$

## Aufgabe 6

Im Wahrscheinlichkeitsbaum (Abbildung 1) wird für eine zufällig ausgewählte Person zuerst das Merkmal Geschlecht (w = weiblich, m = männlich) und danach das Merkmal Erwerbstätigkeit (E = erwerbstätig, N = nicht erwerbstätig) betrachtet. Aus dem Baum können nun zum Beispiel folgende Wahrscheinlichkeiten herausgelesen werden:

- Wahrscheinlichkeit, dass die Person weiblich ist; $P(w) = 0.514$.
- Wahrscheinlichkeit, dass eine Person erwerbstätig ist, wenn man schon weiss, dass sie männlich ist; $P(E|m) = 0.578$.

| | E | N |
|---|---|---|
| w | $P(w \cap E) =$ | |
| m | | |

(**a**) Füllen Sie die obenstehende Tabelle aus:

(**b**) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(w|E)$.

(**c**) Die Reihenfolge der Merkmale wird nun umgekehrt. Dies führt zum invertierten Wahrscheinlichkeitsbaum gemäss Abbildung 2. Berechnen Sie die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.

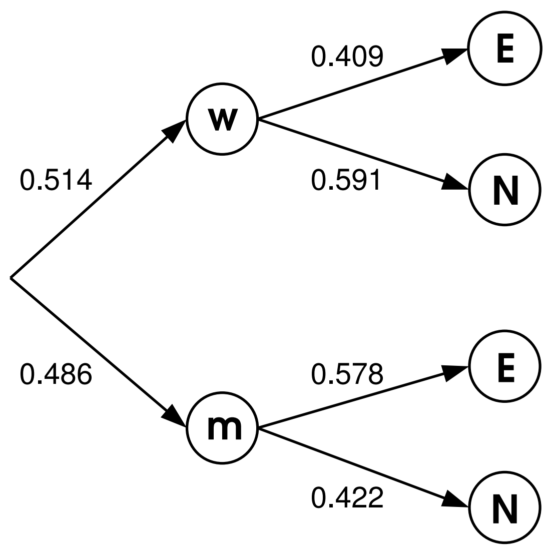


Figure 1: Wahrscheinlichkeitsbaum: Geschlecht vor Erwerbstätigkeit.

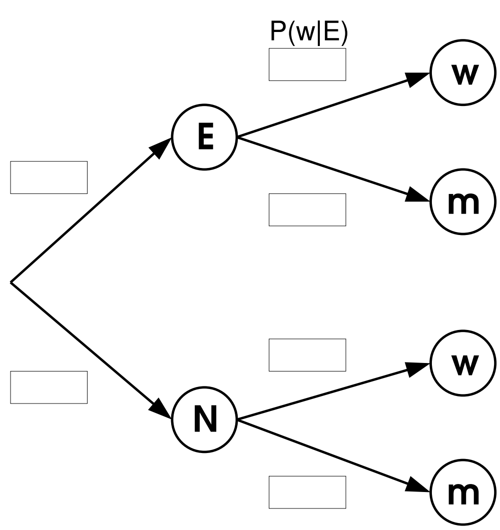


Figure 2: Wahrscheinlichkeitsbaum: Erwerbstätigkeit vor Geschlecht.

**Aufgabe 7**

Ein Stand auf einem Volksfest bietet ein Würfelspiel an. Man wirft zwei sechsseitige Würfel. Je nach Ausgang des Wurfs muss man Geld bezahlen oder man erhält Geld. Hier sind die Regeln des Spiels:

(1) Bei einem Pasch (also $(1,1)$, $(2,2)$, etc.) gewinnt der Spieler 10 SFr (Gewinn 10 SFr).

(2) Bei $(1,2)$ oder $(2,1)$ gewinnt der Spieler 20 SFr (Gewinn 20 SFr).

(3) Bei allen anderen Ergebnissen verliert der Spieler 4 SFr (Gewinn -4 SFr).

(**a**) Sei $X$ die Zufallsvariable, die den Gewinn des Spielers nach einem Wurf angibt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung.

(**b**) (Knobelaufgabe) Würden Sie dieses Spiel spielen? Überlegen Sie sich eine Möglichkeit, wie man mit einer Zahl angeben kann, ob sich das Spiel lohnt oder nicht.

**Aufgabe 8**

Bei einer Untersuchung werden Wasserproben (10 ml) auf Verunreinigungen untersucht. Da nur 2 Prozent aller Proben verunreinigt sind, wird vorgeschlagen, von 10 Einzelproben jeweils die Hälfte (5 ml) der Proben zu einer Sammelprobe (50 ml) zusammenzumischen und zunächst nur die Sammelprobe zu untersuchen. Wird in der Sammelprobe keine Verunreinigung festgestellt, so ist die Untersuchung für die 10 Einzeluntersuchungen beendet. Im anderen Fall werden alle 10 übriggebliebenen Hälften in 10 Einzeluntersuchungen geprüft.

(**a**) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in der Sammelprobe keine Verunreinigung zu finden (unter der Annahme, dass die Einzelproben unabhängig voneinander sind)?

(**b**) Sei die Zufallsvariable $Y$ die Gesamtzahl benötigter Analysen. Welche Werte kann $Y$ annehmen, und mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten sie auf?

(**c**) Wieviele Analysen werden im Durchschnitt für die gesamte Untersuchung benötigt (d.h. wie gross ist $\mathrm{E}[Y]$)? Wieviele Analysen werden durch die Bildung von Sammelproben "im Durchschnitt" eingespart?