Explorando la Geometría de la Ecuación de Dirac. Vínculos con la Física de Partículas

Ángel Gabriel Bistraín Borraz

15 de diciembre de 2023

Notación

Relatividad

En este texto usaremos la siguiente convención para el tensor métrico

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

con los indices griegos corriendo sobre 0, 1, 2, 3.

Matrices de Pauli

Para discutir los temas que se mostraran en este texto haremos uso de las matrices sigma de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El producto de estas matrices satisface la identidad

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k.$$

También satisfacen la siguiente regla de anticonmutación

$$[\sigma^i, \sigma^j]_+ = \sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2\delta_{ij} I$$

Otras propiedades importantes son:

$$(\sigma^1)^2 = (\sigma^2)^2 = \sigma^3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$
$$\det\left(\sigma^i\right) = \mathbb{1}$$

Convención de sumas de Einstein

Cualquier par de índices repetidos, donde uno aprece arriba y otro abajo se asume que representan una suma

$$a_i^k b_j^i \equiv \sum_{i=1}^{N} a_i^k b_j^i$$

1. Introducción

La ecuación de Dirac es una joya en la física cuántica que revolucionó nuestra comprensión de la materia y la antimateria. Dirac estaba buscando una ecuación que describiera la mecánica cuántica de las partículas relativistas, en particular, que tuviera en cuenta la famosa relación de Einstein

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2.$$

Sus esfuerzos culminaron en 1928 con la ecuación que lleva su nombre: la ecuación de Dirac. Lo interesante de esta ecuación es que no solo describe el comportamiento de partículas con masa en movimiento, sino que también predice la existencia de partículas de antimateria. ¿Cómo es esto posible?

La ecuación de Dirac es una ecuación cuántica que describe la evolución temporal de funciones de onda asociadas con partículas, como electrones, que se mueven a velocidades cercanas a la de la luz. Al resolver esta ecuación, Dirac encontró soluciones con dos tipos de energías: una para el electrón con carga negativa y otra para una partícula con la misma masa pero con carga positiva. Exactamente igual a la del electrón pero con carga opuesta

Esto llevó a una conclusión fascinante: si la ecuación predecía la existencia de una partícula con la misma masa pero carga opuesta, esta debía ser la antipartícula del electrón, que luego se llamó positrón. La ecuación de Dirac, por lo tanto, no solo describió la física conocida en ese momento, sino que también predijo la existencia de la antimateria, lo que fue un logro extraordinario. Desde su descubrimiento, la ecuación de Dirac ha sido fundamental en la física de partículas elementales y ha sentado las bases teóricas para comprender la relación entre la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad.

Dirac cuestionó la ecuación de Klein-Gordon debido a su naturaleza de segundo orden, la cual permitía soluciones negativas para la función de onda. Dado que la función de onda representa una densidad de probabilidad, es incompatible con la presencia de valores negativos. Dirac postuló que una ecuación coherente debería ser de primer orden en el tiempo y, asumiendo la simetría entre las coordenadas en la relatividad especial, también de primer orden en todas las coordenadas [1, Cap 2]. En consecuencia, propuso que el operador diferencial debía adoptar esta nueva forma para abordar esta problemática

$$\gamma^\mu \partial_\mu$$

Pero para que siga cumpliendo que sea una invariante es necesario que satisfaga

$$(\gamma^\mu \partial_\mu)^2 = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2$$

Así que la ecuación que el propuso fue:

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = \pm i m \psi$$

Esta ecuación es una ecuación de onda relativista que combina la teoría especial de la relatividad con la mecánica cuántica. Los espinores y las álgebras de Clifford están intrínsecamente relacionados con la ecuación de Dirac, ya que los espinores son soluciones de esta ecuación y las álgebras de Clifford son utilizadas para representar los objetos matemáticos necesarios para su formulación y comprensión.

El formalismo de la ecuación de Dirac revolucionó nuestra comprensión de la naturaleza de las partículas elementales y se presentó como una herramienta clave para el desarrollo de la teoría cuántica de campos. Desde un punto de vista geométrico, la ecuación de Dirac describe el comportamiento de fermiones relativistas en términos de espinores y representa una síntesis matemática elegante entre la teoría especial de la relatividad y la mecánica cuántica.

Al considerar la geometría subyacente del espacio-tiempo, la ecuación de Dirac emerge como un puente entre la teoría de la relatividad especial y la teoría cuántica, presentando una interpretación profunda de las partículas como entidades geométricas en un espacio-tiempo. La inclusión de los espinores en la ecuación de Dirac permite una descripción completa de las partículas con espín semientero, como lo es el electrón en nuestro caso, y ofrece una comprensión más profunda de su comportamiento bajo transformaciones de Lorentz [2, Cap 3].

2. Álgebras de Clifford

Usaremos el caso particular del espacio cuadrático asociado con la métrica de Minkowsky para dar la definición de álgebra de Clifford que nos servirá para nuestros fine s

Definición 2.1 *Sea V un espacio vectorial real, definimos el par (V, g) como un espacio cuadrático si la función $g : V \to \mathbb{R}$ cumple con las siguientes condiciones específicas para la métrica de Minkowski:*

1. *$g(av) = a^2 g(v)$ para todo $v \in V$, $a \in \mathbb{R}$.*
2. *Dada la función $h : V \times V \to \mathbb{R}$ definida como $h(x, y) = \frac{g(x+y)-g(x)-g(y)}{2}$, la identidad de polarización toma la forma particular:*

$$h(x, y) = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \tag{2.1}$$

donde la ecuación (2.1) representa la métrica de Minkowski en el contexto de la teoría de la relatividad especial.

A la función g la denominaremos forma cuadrática, y h será la forma bilineal asociada a g, representando la métrica característica del espacio-tiempo en la teoría de la relatividad.

Este espacio cuadrático asociado la álgebras de Clifford relacionada con la métrica de Minkowski incluyen la construcción del espacio de Dirac, donde los elementos de la base $\{\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\}$ satisfacen las relaciones de anticonmutación específicas y están asociados con la métrica de Minkowski.

Notemos que de acuerdo con la definición anterior que una forma cuadrática define una forma bilineal simétrica. De la misma manera, si tenemos una forma bilineal simétrica $h(x, y)$ podemos definir su forma cuadrática asociada de la siguiente manera, $\phi(x) = h(x, x)$ para todo $x \in V$. En esencia podemos concluir que las formas bilineales simétricas y las formas cuadráticas son lo mismo.

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2h(\gamma^\mu, \gamma^\nu) = 2g^{\mu\nu}$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $g^{\mu\nu}$ son los elementos de la métrica inversa de Minkowski y $[\cdot, \cdot]_+$ representa el anticonmutador. Estos elementos γ^μ forman la base del álgebra de Clifford $Cl(V, g)$ en este espacio cuadrático y se utilizan para describir y estudiar propiedades geométricas, transformaciones y simetrías.

3. Espinores

3.1. Grupo Ortogonal

El conjunto ortogonal se refiere al conjunto de transformaciones lineales que mantienen inalterada la distancia y los ángulos definidos por una forma cuadrática h, y lo representamos como $O(h)$. Es de gran relevancia debido a que, al aplicar cualquier elemento de $O(h)$ a una base ortonormal, esta base permanece ortogonal bajo la influencia de esta forma cuadrática, es decir, no modifica nuestro sistema de referencia. Una definición más precisa sería:

Definición 3.1 *Dada una forma cuadrática h, podemos definir al grupo ortogonal como*

$$O(h) = \{f \in End_{\mathbb{R}}(V) | h(f(x), f(y)) = h(x, y) \quad \forall x, y \in V\}$$

Sabemos que el grupo ortogonal se descomponen en dos componente conexas

$$O(h) = O(h)_+ \cup O(h)_-,$$

donde $O(h)_+ = \{f \in O(h) | det(f) = 1\}$ es subgrupo de $O(h)$ que consiste en todas las transformaciones lineales que además de preservar la orientación y $End_{\mathbb{R}}(V)$ denota el conjunto de endomorfismos en un espacio vectorial V definido en $\mathbb{R}$.

Definición 3.2 *Definimos el grupo especial ortogonal como:*

$$SO(h) = O(h)_+ = \{f \in O(h) | det(f) = 1\}$$

Definición 3.3 *Dado $v \in V/\{0\}$ un vector tal que $h(v,v) \neq 0$, definimos una reflexión sobre el hiperplano ortogonal al vector v como la transformación $R \in End(V)$ que fija todos los elementos en $\{v\}^\perp$ y que lleva a v en $-v$, esta dada por:*

$$R_v(x) = x - 2\frac{h(x,v)}{h(v,v)} \cdot v.$$

Notemos que bajo esta definición se puede inferir que $R \circ R = id$, luego se tiene que las reflexiones son invertibles y la inversa cumple $R^{-1} = R$.

Teorema 3.1 *(Cartan-Dieudonné) Si $f \in O(h)$ entonces f se puede escribir como la composición de reflexiones. Además si $f \in SO(h)$ entonces f se puede escribir como la composición de una cantidad par de reflexiones.*

La demostración de este teorema puede ser encontrada en [3, pag 175]

Lo que nos dice este teorema es que todo elemento de $O(h)$ y $SO(h)$, son composiciones de reflexiones, es decir, basta encontrar una manera de representar las reflexiones en las álgebras de Clifford para describir los elementos de este grupo.

Sea $v \in V$ que cumple $h(v,v) \neq 0$, entonces las reflexiones sobre el hiperplano $v^\perp$, se ven en el álgebra de Clifford asociada a V de la siguiente manera

4. Geometría de la Ecuación de Dirac

4.1. La ecuación de Dirac

Siguiendo el enfoque pionero de Dirac, buscamos una ecuación de onda relativista covariante que respetara la forma de Schrödinger, expresada como

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

y asegurara una densidad de probabilidad definida y positiva. En aquel entonces, la ecuación de Klein-Gordon planteaba incertidumbres al no proporcionar esta densidad de probabilidad. Al ser lineal en la derivada temporal, era lógico intentar construir un Hamiltoniano que mantuviera esta linealidad en las derivadas espaciales, buscando una simetría entre las coordenadas temporales y espaciales. Por consiguiente, la ecuación buscada debía adoptar la forma

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[\beta m_0 c^2 + \frac{\hbar c}{i}\left(\alpha^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha^2\frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha^3\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\right]\psi \equiv \hat{H}\psi$$

o

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\beta m_0 c^2 + c\alpha^1 p_1 + c\alpha^2 p_2 + c\alpha^3 p_3\right)\psi = \left(\beta m_0 c^2 + c\alpha^i p_i\right)\psi$$

Los coeficientes α^i, β, como veremos en un momento, no pueden ser simples números, por lo que ψ no puede ser un simple escalar, Dirac propuso que tiene que ser un vector columna

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{x},t) \\ \psi_2(\vec{x},t) \\ \vdots \\ \psi_N(\vec{x},t) \end{pmatrix}$$

La ecuación (4.1) revela un sistema de N ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. Cada componente ψ_i de ψ debe cumplir con la exigencia impuesta por la ecuación de Klein-Gordon, expresada como

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = \left(-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4\right) \psi_i. \tag{4.1}$$

Se sigue por iteración que

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \quad -\hbar^2 c^2 \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\hbar m_0 c^3}{\mathrm{i}} \sum_{i=1}^{3} \left(\alpha^i \beta + \beta \alpha^i\right) \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + (\beta)^2 m_0^2 c^4 \psi \tag{4.2}$$

para nuestros fines hicimos $\beta = \gamma^0$ y $\alpha^i = \gamma^0 \gamma^i$ entonces comparando la ecuación (4.2) con (4.1) no es difícil ver que se muestran los siguientes requerimientos para las matrices γ^i, γ^0

$$\begin{aligned}
&\left(\gamma^0\right)^2 = \mathbb{1}, \\
&\left(\gamma^i\right)^2 = -\mathbb{1}, \qquad \text{para cualquier } i = 1,2,3, \\
&\gamma^0 \gamma^i + \gamma^i \gamma^0 = 0, \\
&\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = 0, \quad i \neq j.
\end{aligned}$$

o de una forma compacta

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}, \qquad \mu = 0,1,2,3 \tag{4.3}$$

donde $[,]_+$ denota el anticonmutador. De la relación (4.3) podemos ver que las γ^μ's no pueden ser simples números, entonces podemos suponer que se expresan como matrices en algún esquema matricial, es aquí donde el álgebra de Clifford entra en juego para determinar las matrices γ^μ, y su dimensionalidad.
Sin perdidad de la generalidad coonsideremos la matriz γ^0 dado que $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$ lo que nos indica que sus eigenvalores al cuadrado son igual a 1 lo que sugiere que sus eigenvalores individuales son ± 1. Haciendo uso del teorema de descomposición espectral podemos ver que esta matriz es diagonalizable

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Por otro lado, de la relación (4.3) tenemos que $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$ y vemos nuevamente que los elementos de la diagonal deben de tener los valores ± 1, es decir,

$$b_\alpha = \pm 1 \qquad \alpha = 1,2,3,...,n$$

Notemos a continuación la siguiente propiedad, para un i fijo

$$Tr\gamma^i \gamma^0 \gamma^i = Tr\gamma^i(-\gamma^i \gamma^0) = -Tr(\gamma^i)^2 \gamma^0 = Tr\gamma^0, \tag{4.4}$$

por otro lado, si usamos la propiedad cíclica de la traza nos conduce a

$$Tr\gamma^i \gamma^0 \gamma^i = Tr(\gamma^i)^2 \gamma^0 = -Tr\gamma^0. \tag{4.5}$$

Entonces, comparando las ecuaciones (4.4) y (4.5) obtenemos que

$$Tr\gamma^0 = -Tr\gamma^0 = 0$$

para que esto sea verdad la matriz γ^0 debe de tener dimensión par y por consecuencia las matrices γ^μ también deben de ser de dimensión par.
Asumamos que la dimensión de las matrices es $n = 2N$. El conjunto de matrices no triviales más simples surge para $N = 1$, es decir, son matrices 2×2. Es bien sabido que las matrices de Pauli junto con la matriz identidad definen una base para el conjunto de matrices 2×2, sin embargo es fácil probar que dicho conjunto no satisface el álgebra de Clifford. Definamos $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma})$, entonces,

$$[\sigma^\mu, \sigma^\nu]_+ \neq 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}.$$

Por lo que nuestra siguiente elección es $N = 2$ que da lugar a matrices ahora de 4×4. Una particular elección de estas matrices γ^μ, por ejemplo, tienen la forma

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \\ \gamma^i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{4.6}$$

aquí cada elemento de la matriz 4×4 representa una matriz 2×2 y los σ^i's corresponde a las 3 matrices de Pauli. Esta particular elección en la representación de las matrices de Dirac son conocidas como la representación Pauli-Dirac. Algo muy importante que cabe aclarar es que la física de la ecuación de Dirac es independiente de cualquier representación particular de las matrices γ^μ. De esta forma concluimos que la ecuación que Dirac estaba buscando tiene la forma

$$(ic\gamma^\mu \partial_\mu - mc^2)\psi = 0$$

4.2. Soluciones de la ecuación de Dirac

Empecemos por escribir la ecuación de Dirac en la representación del momento

$$(c\gamma^\mu p_\mu - mc^2)\psi = 0$$

ya encontramos que los coeficientes γ^μ son matrices 4 por lo que la función de onda debe de ser un vector columna, como es sabido, una funcion de onda multicomponente sugiere un momento angular de espín no trivial por lo que la ecuación de Dirac describe partículas con espín. Necesitamos fijarnos en las soluciones de onda plana de la ecuación pare entender que tipo de partículas son descritas por la ecuación de Dirac. Denotamos a la función de onda como

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}$$

donde

$$\psi_\alpha = e^{-ip\cdot x} u_\alpha(p), \quad \alpha = 1, 2, 3, 4$$

Sustituyendo en la ecuación de Dirac, obtenemos

$$\begin{aligned} (ic\gamma^\mu \partial_\mu - mc^2)\psi &= 0 \\ (ic\gamma^\mu(-ip_\mu)\partial_\mu - mc^2)u(p) &= 0 \\ (c\gamma^\mu p_\mu - mc^2)u(p) &= 0 \end{aligned}$$

done la función $u(p)$ tiene la forma

$$u(p) = \begin{pmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \\ u_3(p) \\ u_4(p) \end{pmatrix}.$$

Simplificaremos los cálculos restringiendo el movimiento a lo largo de eje z, es decir, $p_1 = p_2 = 0$, en este caso la ecuación toma la forma

$$(c\gamma^0 p_0 + c\gamma^3 p_3 - mc^2)u(p) = 0.$$

Si tomamos la representación de las matrices γ^μ de (4.6) podemos escribir esto de manera explícita como

$$\begin{pmatrix} (cp_0 - mc^2)\mathbb{1} & \sigma^3 cp_3 \\ -\sigma_3 cp_3 & -(cp_0 + mc^2)\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(p) \\ \tilde{v}(p) \end{pmatrix} = 0$$

con

$$\tilde{u}(p) = \begin{pmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \end{pmatrix} \text{ y } \tilde{v}(p) = \begin{pmatrix} u_3(p) \\ u_4(p) \end{pmatrix}$$

entonces tenemos un sistema de de cuatro ecuaciones lineales homogéneas y una solución no trivial se presenta si el determinante de la matriz de coeficientes desaparece. Hay que exigir que

$$det \begin{pmatrix} (cp_0 - mc^2)\mathbb{1} & \sigma^3 cp_3 \\ -\sigma_3 cp_3 & -(cp_0 + mc^2)\mathbb{1} \end{pmatrix} = p_0^2 - p_3^2 - m^2c^2 = 0$$

de esto obtenemos

$$p_0 = \pm E = \pm\sqrt{p_3^2 + m^2c^2}$$

Además, cada uno de estos valores de energía es doblemente degenerado. La doble degeneración parece ser reflejo de la estructura de espín no trivial de la función de onda, como veremos en breve. La solución para energía positiva satisface la siguiente identidad

$$\begin{pmatrix} (cE_+ - mc^2)\mathbb{1} & \sigma_3 cp_3 \\ -\sigma_3 cp_3 & -(cE_+ + mc^2)\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}(p) \\ \tilde{v}(p) \end{pmatrix} = 0$$

de manera explícita podemos escribir

$$\begin{aligned} (cE_+ - mc^2)\tilde{u}(p) + \sigma_3 cp_3 \tilde{v}(p) = 0 \\ \sigma_3 cp_3 \tilde{u}(p) + (cE_+ - mc^2)\tilde{v}(p) = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

De la segunda relación de (4.7) podemos resolver $\tilde{v}(p)$ en términos de $\tilde{u}(p)$ y obtenemos

$$\tilde{v}(p) = -\frac{\sigma_3 p_3}{E_+ + mc}\tilde{u}(p) \tag{4.8}$$

Es fácil ver que la primera relación de (4.7) también conduce a la misma relación. Eligiendo las dos soluciones independientes para $\tilde{u}$ como

$$\tilde{u}(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

obtenemos respectívamente

$$\tilde{v}(p) = \begin{pmatrix} -\frac{p_3}{E_+ + mc} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

y

$$\tilde{v}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p_3}{E_+ + mc} \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

similarmente para las soluciones de energía negativas

$$\begin{aligned} (cE_- - mc^2)\tilde{u}(p) + \sigma_3 cp_3 \tilde{v}(p) = 0 \\ \sigma_3 cp_3 \tilde{u}(p) + (cE_- + mc^2)\tilde{v}(p) = 0. \end{aligned}$$

Podemos resolver esto como

$$\tilde{u}(p) = -\frac{\sigma_3 p_3}{E_- mc}\tilde{v}(p).$$

Eligiendo las dos soluciones independientes para $\tilde{u}$ como

$$\tilde{v}(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{v}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

y obtenemos respectivamente

$$\tilde{u}(p) = \begin{pmatrix} -\frac{p_3}{E_- mc} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

y

$$\tilde{u}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p_3}{E_- mc} \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

las ecuaciones (4.13) y (4.14) determinan las dos soluciones de energía negativa de la ecuación de Dirac. Las funciones de onda independiente de dos componentes en (4.9) y (4.12) recuerdan los estado de espín abajo y arriba de un espinor de dos componentes. Así, a partir del hecho de que podemos escribir

$$u_+(p) = \begin{pmatrix} \tilde{u}(p) \\ -\frac{\sigma_3 p_3}{E_+ + m}\tilde{u}(p) \end{pmatrix}, \quad u_-(p) = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_3 p_3}{E_- - m}\tilde{v}(p) \\ \tilde{v}(p) \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

las soluciones de energía positiva y negativa en (4.15). Cada una de estas soluciones tiene dos componentes, $\uparrow, \downarrow$ y tienen las formas explícitas

$$u_+^{\uparrow}(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{p_3}{E_+ + m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_+^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{p_3}{E_+ + m} \end{pmatrix}$$

$$u_-^{\uparrow}(p) = \begin{pmatrix} -\frac{p_3}{E_- - m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_-^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p_3}{E_- - m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La notación nos sugiere e implica que la función de onda corresponde a partículas con espín $1/2$. Cabe mencionar que a diferencia del espinor de dos componentes que esperamos en lo sistemas no relativistas, nuestra función de onda se convierte en una matriz de columnas de cuatro componentes.

De la estructura de la función de onda, nos queda claro que, en el caso del movimiento general, donde $p_1 \neq p_2 \neq 0$ las soluciones toman la forma (con $p_0 = E\pm = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2c^2}$)

$$u_+(p) = \begin{pmatrix} \tilde{u}(p) \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E_+ + m}\tilde{u}(p) \end{pmatrix}, u_-(p) = \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E_- - m}\tilde{v}(p) \\ \tilde{v}(p) \end{pmatrix},$$

que pueden se explícitamente verificadas. (El cambio de signo en las componentes se da por elevar el índice del momento, es decir, $p_i = -p^i$.)

5. Conclusiones

Referencias

[1] B. Bulbul, M. Sezer, and W. Greiner. Relativistic quantum mechanics—wave equations, 2000.

[2] P. Lounesto. Clifford algebras and spinors. In *Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics*. Springer, 2001.

[3] V. S. Varadarajan. *Supersymmetry for Mathematicians: An Introduction: An Introduction*, volume 11. American Mathematical Soc., 2004.