Sistemas Dinámicos en Todas Partes

Brayan Leonardo Florez Lara[1]

[1]Escuela de Matemáticas y Estadística
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Mayo 2023

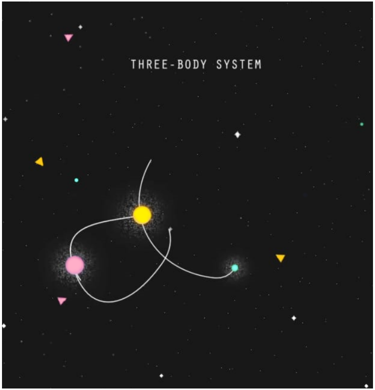
Contenido

Maggie Chiang para Quanta Magazine

Todo fenómeno que evoluciona en el tiempo puede ser considerado un sistema dinámico (p. ej. movimiento de los planetas, crecimiento de una población, comportamiento de los mercados).

Contenido

Problema de los tres cuerpos



Fabio Pacucci para TED-Ed

Dada la posición y velocidad inicial de tres cuerpos celestes, describir cómo se mueven y predecir su posición y velocidad en cualquier momento futuro.

Henri Poincaré
(1854-1912)

En 1889, escribió un artículo sobre el problema de los tres cuerpos con ideas innovadoras y revolucionarias que le permitieron encontrar soluciones aproximadas y demostrar que no tiene solución analítica exacta. Este artículo marcó el inicio del estudio de los sistemas dinámicos.

Contenido

Iterar

Iterar una función significa evaluar la función una y otra vez utilizando la salida de la aplicación anterior como entrada para la siguiente.

Para una función f, $f^2(x)$ es la segunda iteración de f es decir $f(f(x))$, $f^3(x)$ es la tercera iteración $f(f(f(x)))$, y en general $f^n(x)$ es la composición n-ésima de f consigo mismo.

Sistema Dinámico

Un sistema dinámico es una función cuyas posibles salidas también pueden ser entradas. Esto nos permite introducir repetidamente las salidas de la función de vuelta en ella, permitiendo un comportamiento evolutivo.

Orbitas

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, definimos la orbita de x_0 bajo f como la sucesión de puntos $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots)$. El punto x_0 es llamado *semilla* de la orbita.

Tipos de Orbitas

- Un *punto fijo* es un punto x_0 que satisface $f(x_0) = x_0$ y en general $f^n(x_0) = x_0$. La orbita del punto fijo es la sucesión constante $(x_0, x_0, x_0, \ldots)$.
- Un *punto periodico* es un punto x_0 que satisface $f^n(x_0) = x_0$ para algun $n > 0$ donde n es llamado periodo de la orbita. La orbita del punto periodico o ciclo es la sucesión repetitiva de números $(x_0, f(x_0), \ldots, f^n - 1(x_0), x_0, f(x_0), \ldots, f^n - 1(x_0), \ldots)$
- Además de estas órbitas, en un sistema dinámico típico, muchas órbitas no son fijas o periódicas. Hay otras que pueden tender a un punto fijo o diverger al infinito.

Contenido

Sistema dinámico no caótico

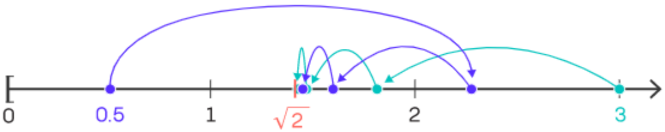
Método de Newton

Para aplicar el método de Newton para encontrar la raíz de una función $f(x)$ se sigue la siguiente fórmula iterativa:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$$

donde x_n es la aproximación de la raíz en la n-ésima iteración y $f'(x)$ es la derivada de $f(x)$ evaluada en x_n

Supongamos que queremos calcular la raíz cuadrada de 2. Aplicando el método de Newton y empezando con una estimación inicial de $x = 3$, a medida de que vamos iterando la función $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ nos vamos acercando cada vez más al valor deseado. Como primera iteración obtenemos $F(3) = 1.8333333$, siendo más cercano al valor verdadero. Para acercarnos aún más, introducimos la salida en la función $F(1.8333333) = 1.4621212$. Haciendo esto tres veces más obtenemos 1.4142136.



Samuel Velasco para Quanta Magazine

La función $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ define un sistema dinámico en el que las órbitas de los puntos tienen un comportamiento predecible y estable. Como podemos evidenciar en la gráfica, las orbitas de 3 y $\frac{1}{2}$ se acercan al punto fijo atractor $\sqrt{2}$, punto fijo porque produce la órbita $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \ldots)$ y atractor porque, al igual que un agujero negro, atrae las órbitas de puntos cercanos.

No todos los sistemas dinámicos muestran un comportamiento tan simple y predecible. Un sistema dinámico puede tener órbitas que ciclan periódicamente a través de un conjunto finito de puntos, marchan hacia el infinito o no muestran aparentemente ningún orden.

MATEMÁTICAS UPTC

Sistema dinámico caótico

La *aplicación logística* es una función que se puede iterar para modelar la dinámica de una población que se reproduce y compite por recursos limitados. Se puede escribir como:

$$x_{n+1} = r\, x_n(1 - x_n)$$

Donde: x_n es la población en el instante n, r es la tasa de crecimiento y x_{n+1} es la población en el siguiente instante.

Esta función permite predecir la población futura de una especie dada. El comportamiento de la población dependerá de los valores de la tasa de crecimiento r y del valor inicial de x. Para ciertos valores, la iteración de la función puede llevar a la estabilidad o la oscilación periódica de la población, mientras que para otros valores puede conducir a la divergencia y la inestabilidad.

MATEMÁTICAS UPTC

Se implemento un código en Python de la función logística, que permite generar un gráfico de la evolución de la población a través de las iteraciones al variar los parámetros de tasa de crecimiento r y población inicial x_0. El código es el siguiente:

```
import matplotlib.pyplot as plt

# Función que calcula las iteraciones de la aplicación logística
def logistic_map(r, x, n):
    results = []
    for i in range(n):
        x = r * x * (1 - x)
        results.append(x)
    return results

# Parámetros de entrada
r = float(input("Ingrese la tasa de crecimiento (r): "))
x0 = float(input("Ingrese la población inicial (x0): "))
n = int(input("Ingrese el número de iteraciones (n): "))

# Generar la lista de valores
results = logistic_map(r, x0, n)

# Crear el gráfico
plt.plot(results,'o-',color='blue')
plt.title(f"Gráfico del mapa logístico con r={r} y x0={x0}")
plt.xlabel("Iteración")
plt.ylabel("Población")
plt.show()
```

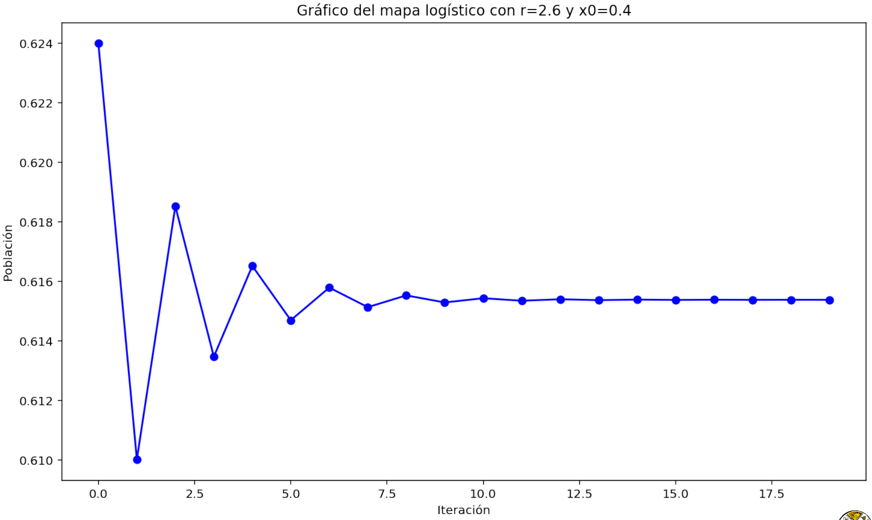


Gráfico del mapa logístico con r=2.6 y x0=0.4
Población
0.624
0.622
0.620
0.618
0.616
0.614
0.612
0.610
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
Iteración

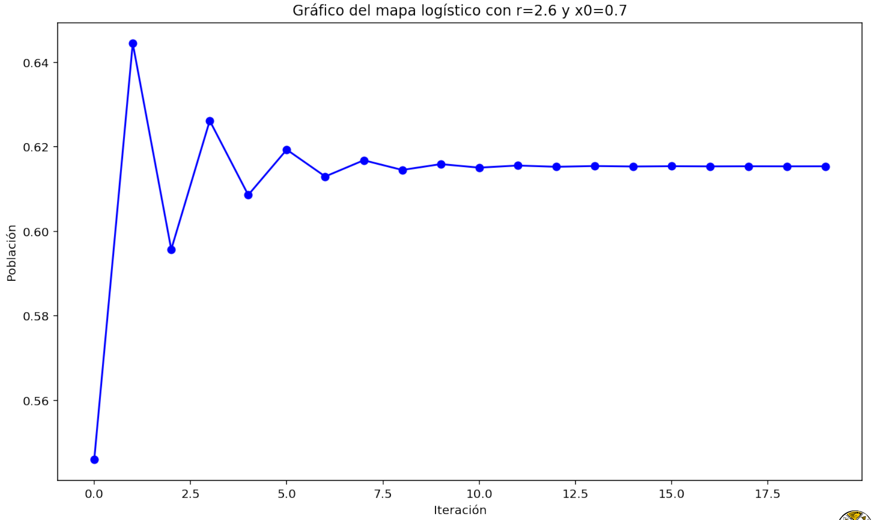


Gráfico del mapa logístico con r=2.6 y x0=0.7
Población
0.64
0.62
0.60
0.58
0.56
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
Iteración

Si se cambia la población inicial, se verá afectada la población solo durante los primeros años, para luego volver a la misma población de equilibrio 6.15.

Lo que nos interesa ahora es ver cómo varía la población de equilibrio dependiendo del valor de la tasa de crecimiento r.

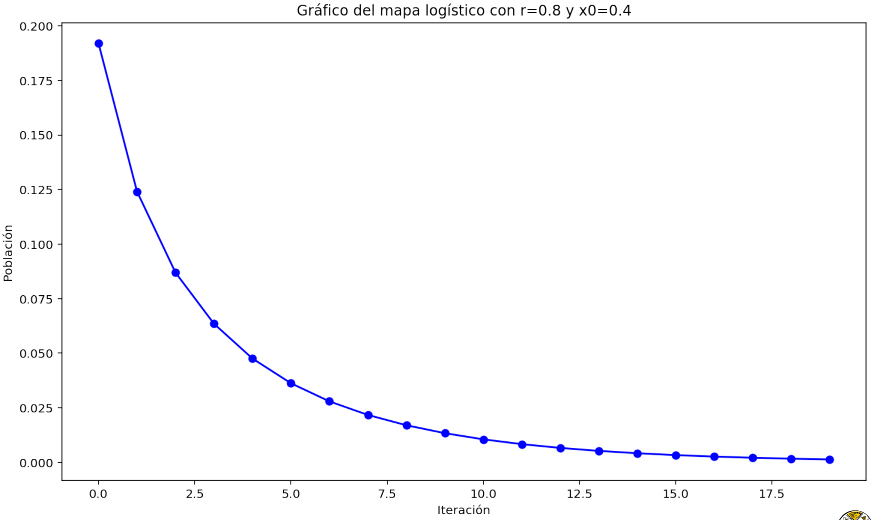


Gráfico del mapa logístico con r=0.8 y x0=0.4
Población
Iteración
0.200
0.175
0.150
0.125
0.100
0.075
0.050
0.025
0.000
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5

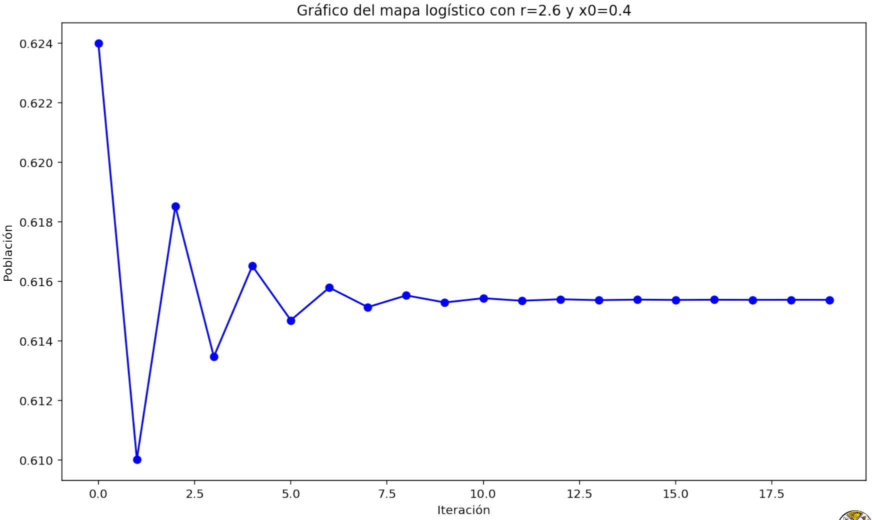


Gráfico del mapa logístico con r=2.6 y x0=0.4
Población
0.624
0.622
0.620
0.618
0.616
0.614
0.612
0.610
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
Iteración

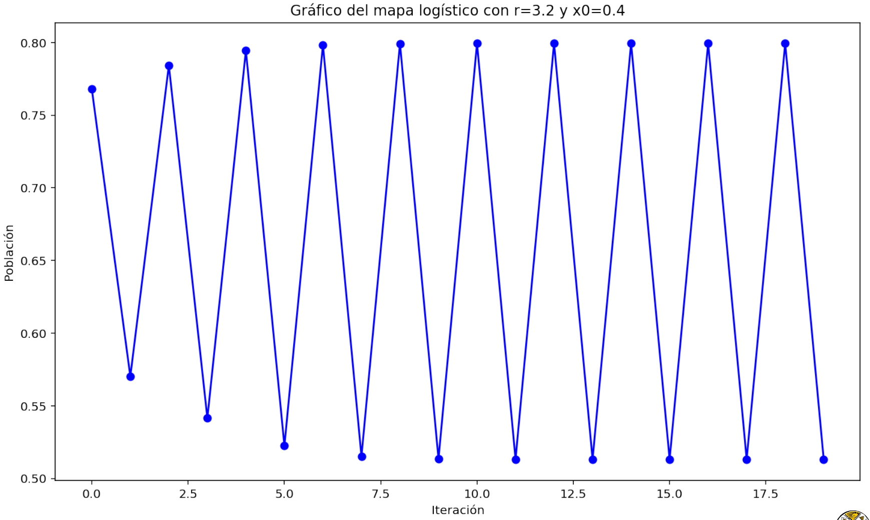


Gráfico del mapa logístico con r=3.2 y x0=0.4
Población
0.80
0.75
0.70
0.65
0.60
0.55
0.50
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
Iteración

Para valores bajos de r, las poblaciones siempre se extinguen y el valor de equilibrio es cero. Una vez que r es mayor a 1, la población se estabiliza en un valor constante, y cuanto mayor sea r, mayor será la población de equilibrio. Algo interesante sucede cuando r supera 3, ya que en este caso la función nunca se establece en un solo valor constante, en cambio, oscila de un lado a otro entre dos valores. A medida que r continúa aumentando, la función oscila entre ciclos de 4, 8, 16, etc., antes de repetirse.

Pequeñas variaciones en la tasa de crecimiento pueden generar orbitas muy diferentes a largo plazo. En otras palabras, el comportamiento del sistema es sensible a las condiciones iniciales.

MATEMÁTICAS UPTC

Contenido

MATEMÁTICAS UPTC

- Los sistemas dinámicos son una herramienta fundamental para entender y describir el comportamiento de muchos fenómenos naturales y artificiales. El estudio de estos sistemas nos permite comprender cómo evolucionan las variables a lo largo del tiempo y cómo se relacionan entre sí, lo que resulta de gran importancia en muchas áreas del conocimiento.
- Existen dos tipos de sistemas dinámicos: los no caóticos, cuyas órbitas son predecibles y estables, y los caóticos, cuyas órbitas son impredecibles y altamente sensibles a las condiciones iniciales, su comportamiento a largo plazo puede ser entendido mediante la observación de patrones en su dinámica junto con herramientas matemáticas como el análisis de bifurcaciones y la teoría del caos.

Contenido

MATEMÁTICAS UPTC

- Robert Devaney
  A First Course in Chaotic Dynamical Systems
  2nd Ed, 2020, CRC Press.
- David Richeson
  How We Can Make Sense of Chaos
  https://www.quantamagazine.org/how-mathematicians-make-sense-of-chaos-20220302/.
- Derek Muller
  This equation will change how you see the world
  https://www.youtube.com/watch?v=ovJcsL7vyrk.
- Fabio Pacucci
  Newton's three-body problem explained
  https://www.youtube.com/watch?v=D89ngRr4uZg.

MATEMÁTICAS UPTC