Krefter og betinget bevegelser

Arbeid og kinetisk energi

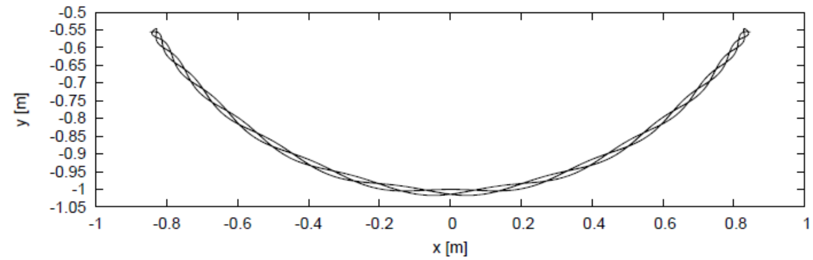
19.02.2013

obligatoriske innleveringer

(g) Write a program to solve $s(t)$. Find $s(t)$ for $v_0 = 0.1\text{m/s}$ and compare your result with the analytical solution.

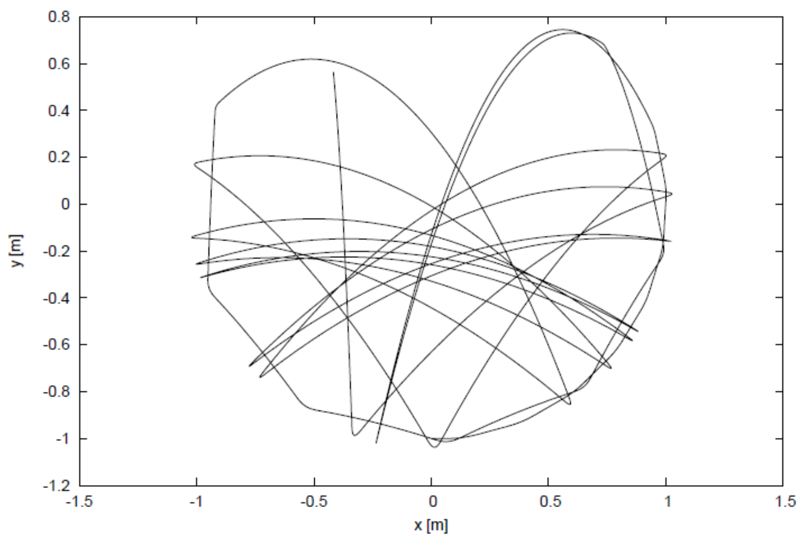
(h) Find $s(t)$ for $v_0 = 4.0\text{m/s}$, 6.0m/s and 8.0m/s and interpret the results.

programmering er en vesentlig del av oppgaven
$\Rightarrow$ vi kan ikke godkjenne en innlevering uten programmering

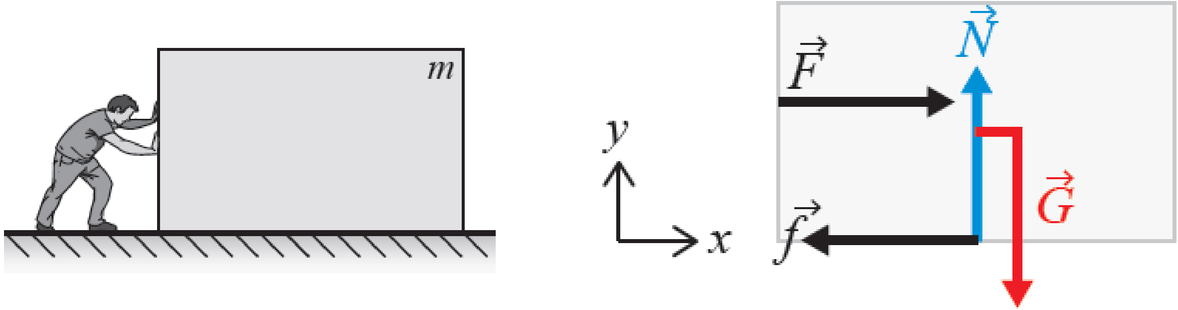


analytiske beregninger er en vesentlig del av oppgaven
$\Rightarrow$ vi kan ikke godkjenne en innlevering uten analytiske beregninger

du må også kommentere og interpretere resultatene:
en plot alene er verdiløs



Friksjon



empirisk lov for statisk friksjon: $f < f_{max} = \mu_s N$ μ_s: statisk friksjonskoeffisient

empirisk lov for dynamisk friksjon: $F_d = \mu_d N$ μ_d: dynamisk friksjonskoeffisient

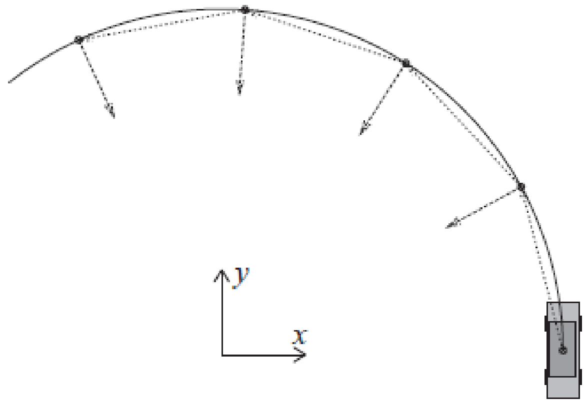
kraft virker motsatt bevegelsesretning

$\mu_d < \mu_s$

Eksempel: En bil kjører med konstant fart *v* gjennom en sving med kurveradius *R*.

ingen bevegelse i z retning: $N - mg = ma_z = 0$

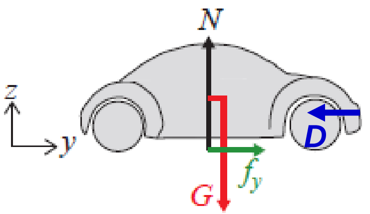
$$N = mg$$

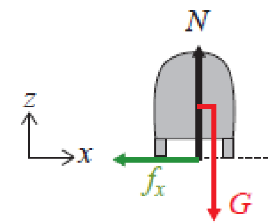


bilen kjører med konstant fart i y retning:

$$f_y - D = ma_y = 0$$

Friksjon fra veien f_y er kraften som akselererer bilen fremover i y retning. For å holde farten konstant må fremdrivende friksjon kompensere luftmotstanden *D*.





for å ta svingen trenger bilen sentripetalakselerasjonen: $a_x = -\frac{v^2}{R}$

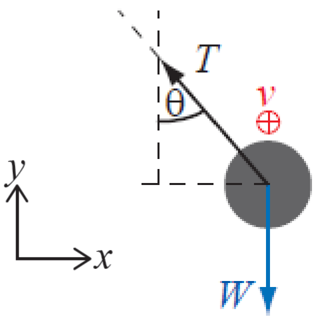
Friksjon fra veien f_x er kraften som akselererer bilen rund svingen: $f_x = ma_x = -m\frac{v^2}{R}$

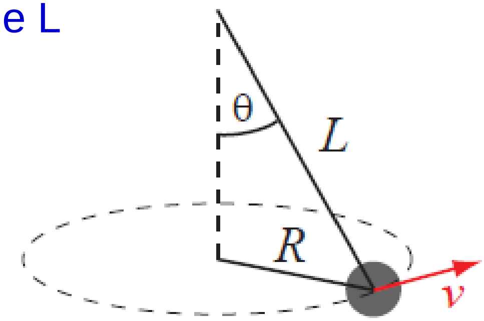
betingelse for at bilen ikke sklir: $|f_x| < \mu_s N$

$$m\frac{v^2}{R} < \mu_s mg$$

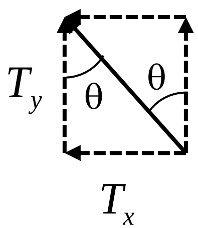
$$v < \sqrt{\mu_s gR}$$

Eksempel: Jeg snurrer en ball som er festet på en snur av lengde L i et horisontalt plan med vinkelhastighet ω.
Hva er vinkelen med vertikalen?





vi ser bort fra luftmotstanden
kontaktkraft: snordraget T
langtrekkende kraft: gravitasjon W



snordraget: $T_x = -T\sin(\theta)$

$$T_y = T\cos(\theta)$$

y retning:
ingen bevegelse: $a_y = 0$

$$T\cos(\theta) = mg$$

N2L: $\sum F_x = T_x = -T\sin(\theta) = ma_x$

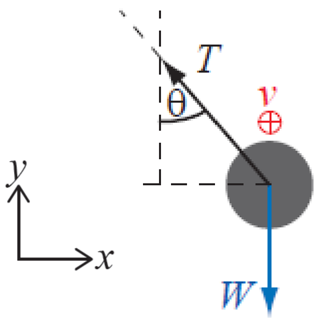
$$\sum F_y = T_y - W = T\cos(\theta) - mg = ma_y$$

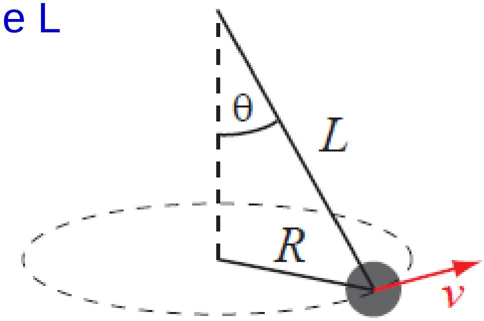
x retning
trenger sentripetalakselerasjon for å holde sirkelbane:

$$a_x = -\frac{v^2}{R} = -\frac{(\omega R)^2}{R} = -R\omega^2$$

$$T\sin(\theta) = mR\omega^2$$

Eksempel: Jeg snurrer en ball som er festet på en snur av lengde L i et horisontalt plan med vinkelhastighet ω.
Hva er vinkelen med vertikalen?





y retning: $T\cos(\theta) = mg$

x retning: $T\sin(\theta) = mR\omega^2$

$$R = L\sin(\theta)$$

x retning: $T\sin(\theta) = mL\sin(\theta)\omega^2$

$$T = mL\omega^2$$

y retning: $mL\omega^2\cos(\theta) = mg$

$$\cos(\theta) = \frac{g}{L\omega^2}$$

$$\omega \to \infty \quad \Rightarrow \quad \cos(\theta) \to 0$$

$$\theta \to 90°$$

$$\cos(\theta) = \frac{g}{L\omega^2} \leq 1$$

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Jeg svinger en ball i en snor i en vertikal bane.
I det nederste punktet på banen er snordraget:

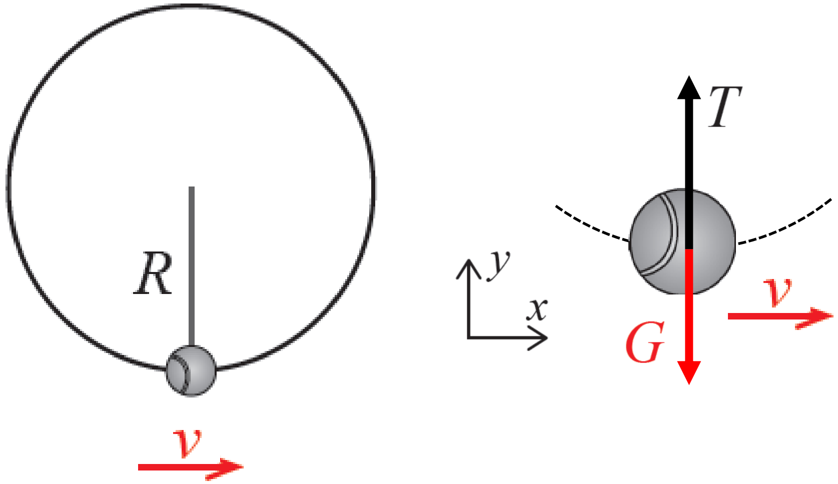
1. Større en tyngden til ballen
2. Like stor som tyngden til ballen
3. Mindre enn tyngden til ballen,
   men større enn null
4. Null

Jeg svinger en ball i en snor i en vertikal sirkelbane med den minste vinkelhastigheten den kan ha for å holde seg i en sirkelbane.
I det øverste punktet på banen er snordraget:

1. Større en tyngden til ballen
2. Like stor som tyngden til ballen
3. Mindre enn tyngden til ballen, men større enn null
4. Null

Jeg svinger en ball i en snor i en vertikal bane.
I det nederste punktet på banen er snordraget:

1. Større en tyngden til ballen
2. Like stor som tyngden til ballen
3. Mindre enn tyngden til ballen, men større enn null
4. Null



Snordraget T:
kraft fra snoren på ballen

Gravitasjon G

N2L i y retning: $T - G = ma_y$

sentripetalakselerasjon mot sirkelens sentrum: $a_y = +\dfrac{v^2}{R}$

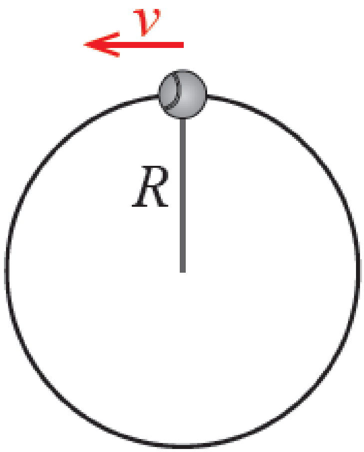
$$T - mg = m\frac{v^2}{R}$$

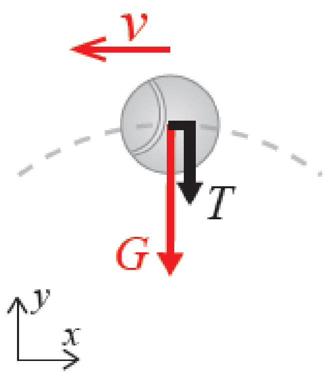
$$T = mg + m\frac{v^2}{R}$$

Snordraget er større en tyngden til ballen.

Jeg svinger en ball i en snor i en vertikal sirkelbane med den minste vinkelhastigheten den kan ha for å holde seg i en sirkelbane.
I det øverste punktet på banen er snordraget:

1. Større en tyngden til ballen
2. Like stor som tyngden til ballen
3. Mindre enn tyngden til ballen, men større enn null
4. Null





N2L i y retning: $-T - G = ma_y$

sentripetalakselerasjon mot sirkelens sentrum: $a_y = -\dfrac{v^2}{R}$

$$T + mg = m\frac{v^2}{R}$$

Jo større fart jo større snordraget.

Snoren kan bare dra, ikke dytte: T>0

minst mulig fart $\Leftrightarrow$ T=0

$$T > 0$$

$$m\frac{v^2}{R} - mg > 0$$

$$\frac{v^2}{R} > g$$

$$v > \sqrt{gR}$$

en vanlig problemstilling: finn hastighet som funksjon av posisjon.

vi kan bruke den vanlige metoden:

- identifiser kreftene
- Newtons andre lov $\Rightarrow$ akselerasjon
- integrasjon $\Rightarrow$ hastighet $v(t)$
- integrasjon $\Rightarrow$ posisjon $x(t)$
- finn tid t_1 for å komme til posisjon x_1
- bruk tiden t_1 for å finne $v(x_1) = v(t_1)$

Denne metoden vil alltid fungere.
Det kan være vanskelig eller umulig å gjøre analytisk
$\Rightarrow$ bruk numeriske metoder

Vi får hastighet $v(t)$ og posisjon $x(t)$ for alle tider.
I utgangspunkt var vi ikke interessert i tiden,
bare i hastighet for en viss posisjon.
$\Rightarrow$ Vi prøver å finne en enklere og mer direkte metode.

Eksempel: vertikal kast

vi ser bort fra luftmotstand
eneste kraft er gravitasjon

$$\sum F = -mg = ma \quad \Rightarrow \quad a = -g$$

initialbetingelser: $y(0) = 0$

$v(0) = v_0$

integrasjon: $v(t) - v(0) = \int_0^t a\,dt = -gt$

$$y(t) - y(0) = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t (v_0 - gt)\,dt = v_0\,t - \frac{1}{2}gt^2$$

finn tid t_1 for å komme til høyde h:

$$t_1^2 - \frac{2v_0}{g}t_1 + \frac{2h}{g} = 0 \qquad t_1 = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2h}{g}}$$

vi finner hastigheten: $v(t_1) = v_0 - gt_1 = \mp\sqrt{v_0^2 - 2gh}$

to løsninger:
på veien opp og ned

$$v^2 = v_0^2 - 2gh$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh \qquad \Rightarrow \text{energi}$$

Newtons andre lov i en dimensjon:

$$\sum F_x = F_x^{\text{net}} = m a_x = m \frac{dv_x}{dt}$$

$$F_x^{\text{net}}\, v_x = m \frac{dv_x}{dt} v_x = m \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} v_x^2\right)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} F_x^{\text{net}}\, v_x dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v_x^2\right) dt = \frac{1}{2} m v_x^2(t_1) - \frac{1}{2} m v_x^2(t_0)$$

$$W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{\text{net}}(t, x, v_x)\, v_x dt$$ arbeid utført av kraften *F* mellom tid t_0 og t_1

$$K = \frac{1}{2} m v_x^2$$ kinetisk energi

arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = K_1 - K_0$ arbeid er tilført mekanisk energi.

vi trenger fortsatt hastigheten v(t) for å beregne arbeidet

$$W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{\text{net}}(t, x, v_x)\, v_x dt$$

hvis kraften avhenger bare av posisjonen og ikke av hastigheten:

$$F_x^{\text{net}}(t, x, v_x) = F_x^{\text{net}}(x(t))$$

eksempler:

- gravitasjon
- fjærkraft

$$W_{0,1} = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{\text{net}}(x)\, v_x dt = \int_{t_0}^{t_1} F_x^{\text{net}}(x)\, \frac{dx}{dt} dt = \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} F_x^{\text{net}}(x)\, dx$$

arbeid-energi teorem:

$$\int_{x_0}^{x_1} F_x^{\text{net}}(x)\, dx = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

vi måler arbeid i Joule: $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{Nm} = 1\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$

arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = K_1 - K_0$

- alternativ formulering for Newtons andre lov
  $\Rightarrow$ bare gyldig i inertialsystemer

- arbeid utført av **nettokraften** $F^{\text{net}} = \sum_j F_j$ summe av **alle** kreftene

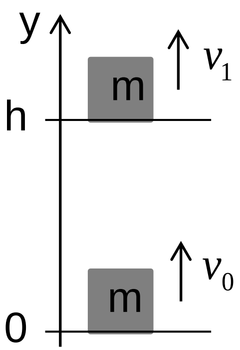
$$W^{\text{net}} = \int_{t_0}^{t_1} F^{\text{net}} v\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_j F_j\, v\, dt = \sum_j \int_{t_0}^{t_1} F_j\, v\, dt = \sum_j W_j$$

for å bruke arbeid-energi teoremet må vi ta hensyn til **alle** kreftene

- hvis kraften avhenger av hastighet: $\int_{t_0}^{t_1} F_x^{\text{net}}(t, x, v_x)\, v_x dt = K_1 - K_0$
- hvis kraften er bare posisjonsavhengig: $\int_{x_0}^{x_1} F_x^{\text{net}}(x)\, dx = K_1 - K_0$

konstant kraft F_x: $$W = \int_{t_0}^{t_1} F_x v\, dt = \int_{x_0}^{x_1} F_x\, dx = F_x \int_{x_0}^{x_1} dx = F_x (x_1 - x_0) = F_x\, \Delta x$$

eksempel: vertikal kast uten luftmotstand



$$F_y = -mg$$

$$W = \int_{y_0}^{y_1} F_y\, dy = -mg \int_0^h dy = -mgh$$

arbeid er negativ

kinetisk energi
blir mindre

arbeid-energi teorem: $W_{0,1} = K_1 - K_0$

$$-mgh = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$v_1 < v_0$$

hvis massen faller ned igjen: $$W = -mg \int_h^0 dy = -mg(0-h) = +mgh$$

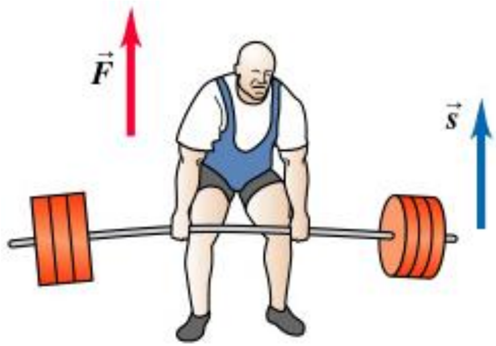
arbeid er positiv $\Rightarrow$ kinetisk energi øker

på høyde null: kinetisk energi er det samme som i utgangspunkt $K = \frac{1}{2} m v_0^2$

massen beveger seg i motsatt retning $v = -v_0$

arbeidet utført av gravitasjonskraften på massen for hele bevegelsen er null

En vektløfter løfter en vekt fra gulvet.
Mens han løfter den:

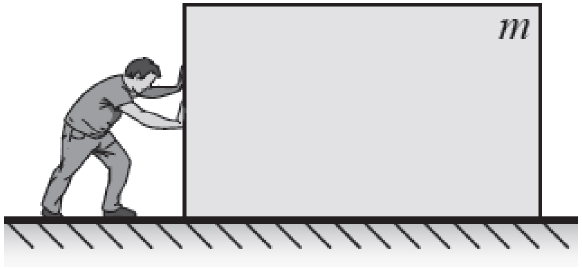


1. gjør han positivt arbeid på vekten, og vekten gjør positivt arbeid på ham.
2. gjør han negativ arbeid på vekten, og vekten gjør positivt arbeid på ham.
3. gjør han positivt arbeid på vekten, og vekten gjør negativt arbeid på ham.
4. gjør han negativt arbeid på vekten, og vekten gjør negativt arbeid på ham.

arbeidet utført av vektløfteren på vekten:
- ➢ arbeidet til kraften fra vektløfteren på vekten
- ➢ kraft og forflytning har samme fortegn
- ➢ arbeid er positiv

arbeidet utført av vekten på vektløfteren:
- ➢ arbeidet til kraften fra vekten på vektløfteren (motkraft)
- ➢ kraft og forflytningen har motsatt fortegn
- ➢ arbeid er negativ

Du beveger en masse m en meter til høyre og tilbake igjen en meter til venstre. Friksjonskraften er F=μN. For den totale bevegelsen gjør friksjonskraften:



1. positivt arbeid på klossen.
2. negativt arbeid på klossen.
3. ingen arbeid på klossen.

Friksjon virker alltid i motsatt bevegelsesretning

- arbeidet er negativ for bevegelsen til høyre
- arbeidet er også negativ for bevegelsen til venstre

Friksjonskraft er hastighetsavhengig: $\vec{F} = -\mu N \frac{\vec{v}}{v}$

klossen taper energi når den beveger seg
systemet gjenvinner ikke energien ved å invertere bevegelsen

Vertikal kast med luftmotstand?