Krefter og betinget bevegelser

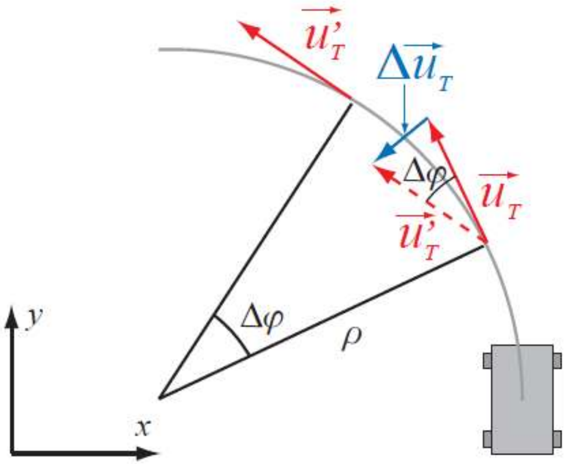
14.02.2013

Betinget bevegelse

bevegelse: $\vec{r}(t)$

bane: $\vec{r}(s)$

bevegelse langs banen: $s(t)$



hastighet: $$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \hat{u}_T\, v(t)$$

tangensialvektor: $$\frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{u}_T\left(s(t)\right)$$

fart langs veien: $$v(t) = \left|\vec{v}(t)\right| = \frac{ds}{dt}$$

akselerasjon: $$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N$$

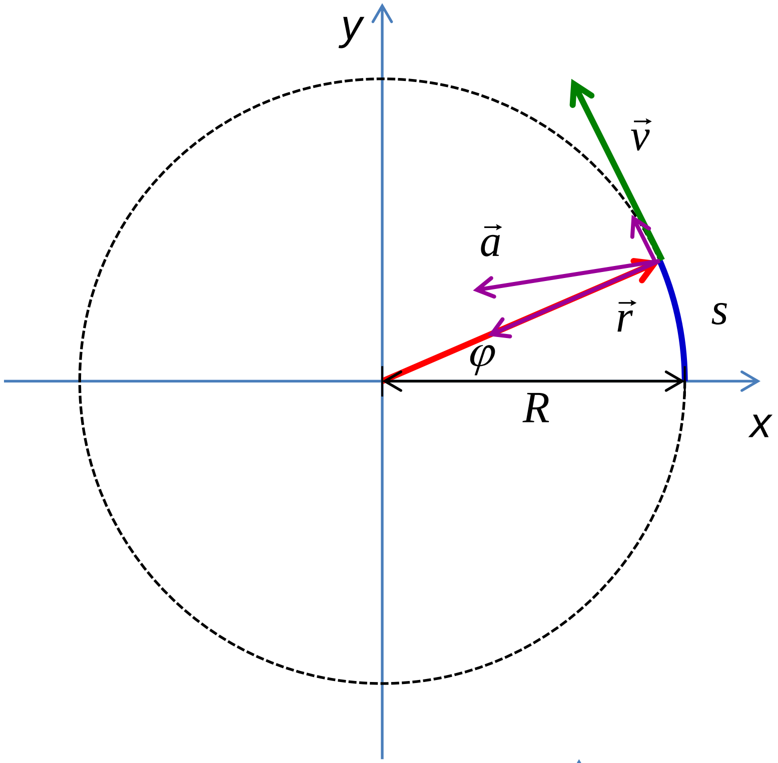
tangensialakselerasjon: $$a_T = \frac{dv}{dt}$$

forandring av farten langs banen

sentripetalakselerasjon: $$a_N = \frac{v^2}{\rho}$$

forandring av bevegelsesretning

Sirkelbane



$$\vec{r}(t) = R\left(\cos(\varphi(t))\,\hat{i} + \sin(\varphi(t))\,\hat{j}\right)$$

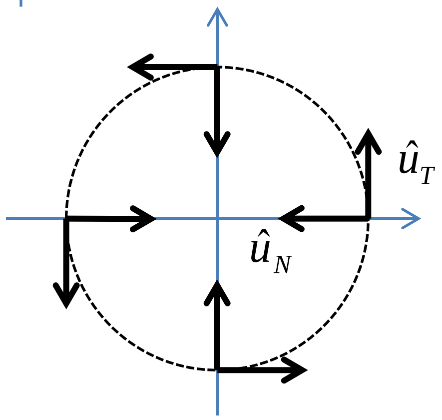
$$s(t) = R\varphi(t)$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\left(-\sin(\varphi)\frac{d\varphi}{dt}\,\hat{i} + \cos(\varphi)\frac{d\varphi}{dt}\,\hat{j}\right)$$

$$= v\left(-\sin(\varphi)\,\hat{i} + \cos(\varphi)\,\hat{j}\right) = v\,\hat{u}_T$$

tangensialvektorer: $\hat{u}_T = \left(-\sin(\varphi)\,\hat{i} + \cos(\varphi)\,\hat{j}\right)$

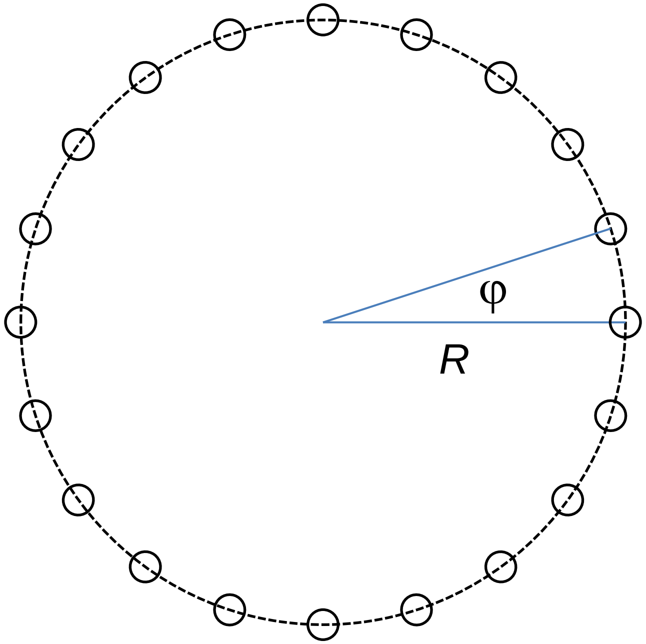


$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\left(-\sin(\varphi)\,\hat{i} + \cos(\varphi)\,\hat{j}\right) + v\left(-\cos(\varphi)\frac{d\varphi}{dt}\,\hat{i} - \sin(\varphi)\frac{d\varphi}{dt}\,\hat{j}\right)$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\left(-\cos(\varphi)\,\hat{i} - \sin(\varphi)\,\hat{j}\right) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N$$

normalvektorer: $\hat{u}_N = \left(-\cos(\varphi)\,\hat{i} - \sin(\varphi)\,\hat{j}\right)$

Eksempel: Et legeme beveger seg på en sirkelbane med radius R med konstant fart v. Det tar en tid T for et helt omløp.



farten er konstant: $v = \frac{ds}{dt} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T}$

$$s(t) = R\varphi(t)$$

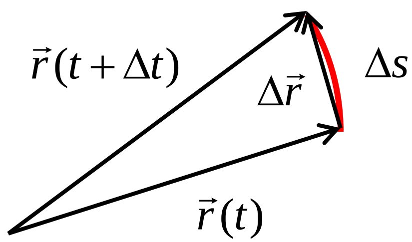
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\varphi(t)\right) = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega$$

$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ vinkelhastighet, enhet: $\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

her er vinkelhastigheten konstant: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N = \frac{v^2}{R}\hat{u}_N$ konstant fart $\Rightarrow$ ingen tangensialakselerasjon

$|\vec{a}| = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$ sentripetalakselerasjon



$$\frac{d\vec{r}}{ds} \approx \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \hat{u}_T$$

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{d\hat{u}_T}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{d\hat{u}_T}{ds}$$

$$\vec{v} = v\,\hat{u}_T$$

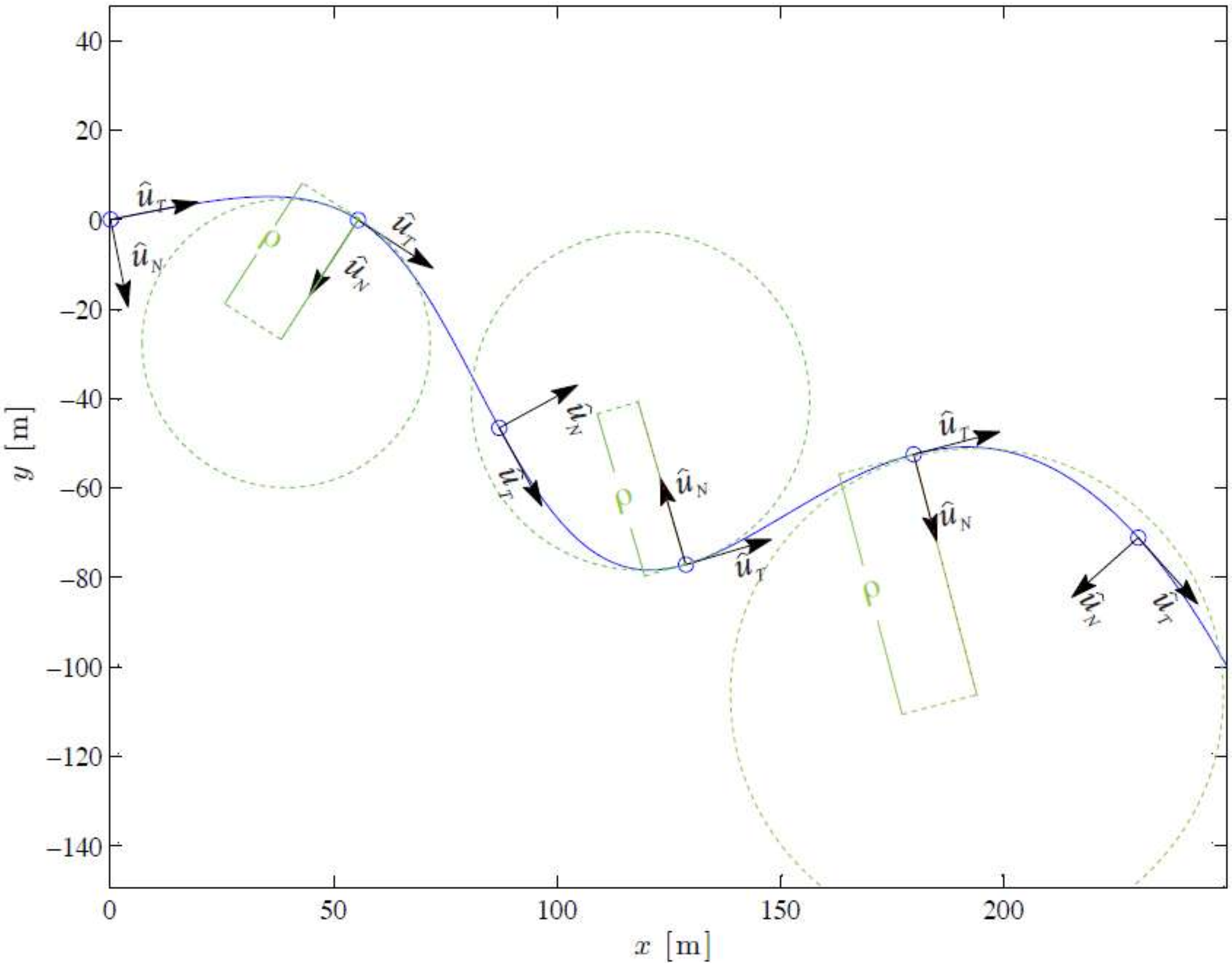
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v^2\frac{d\hat{u}_T}{ds}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N$$

$$\frac{d\hat{u}_T}{ds} = \frac{1}{\rho}\hat{u}_N$$

$$\frac{d\hat{u}_T}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{1}{\rho}\hat{u}_N$$

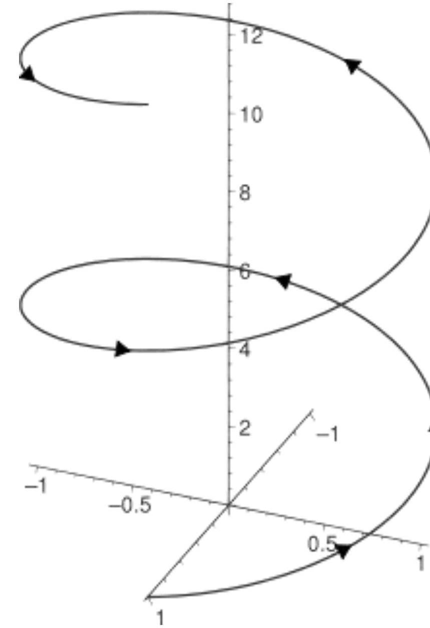
$$\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \frac{1}{\rho} = \kappa$$ krumning



for enhver kurve $\vec{r}(s)$ kan vi finne: $\hat{u}_T = \frac{d\vec{r}}{ds}$

$$\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \frac{1}{\rho} = \kappa$$

Eksempel: heliks



$$\vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\,\hat{i} + R\sin(\omega t)\,\hat{j} + v_0 t\,\hat{k}$$

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad s(t) - s(0) = \int_0^t v\,dt = vt$$

vi må finner farten

$$\vec{v}(t) = -R\omega\sin(\omega t)\,\hat{i} + R\omega\cos(\omega t)\,\hat{j} + v_0\,\hat{k}$$

$$v^2 = R^2\omega^2\left(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right) + v_0^2 = R^2\omega^2 + v_0^2$$

farten er konstant

$$s = vt = \sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}\; t \qquad t = \frac{s}{v} = \frac{s}{\sqrt{R^2\omega^2 + v_0^2}}$$

$$\vec{r}(s) = R\cos\left(\frac{\omega}{v}s\right)\hat{i} + R\sin\left(\frac{\omega}{v}s\right)\hat{j} + \frac{v_0}{v}s\,\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = -R\frac{\omega}{v}\sin\left(\frac{\omega}{v}s\right)\hat{i} + R\frac{\omega}{v}\cos\left(\frac{\omega}{v}s\right)\hat{j} + \frac{v_0}{v}\hat{k} = \hat{u}_T$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = -R\frac{\omega^2}{v^2}\cos\left(\frac{\omega}{v}s\right)\hat{i} - R\frac{\omega^2}{v^2}\sin\left(\frac{\omega}{v}s\right)\hat{j} = \frac{1}{\rho}\hat{u}_N$$

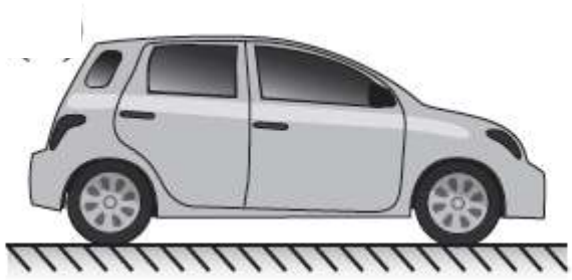
krumning:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = R\frac{\omega^2}{v^2} = \frac{R\omega^2}{R^2\omega^2 + v_0^2}$$

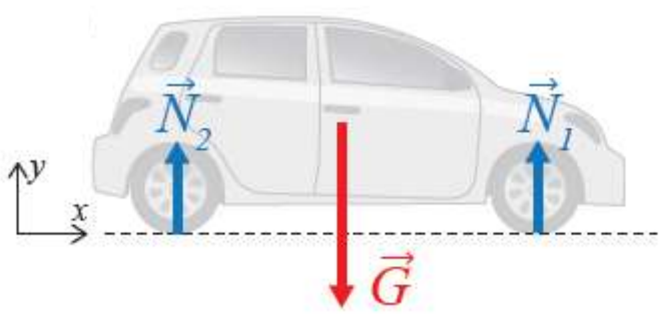
$$v_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{1}{R}$$

sirkelbane

Spesialfall for betinget bevegelse: ingen bevegelse



ingen bevegelse, men en betingelse:
bakken hindrer bilen å falle $\Rightarrow$ banen er gitt



fri-legeme diagram:

- kontaktkrefter: normalkrefter $\vec{N}_1, \vec{N}_2$
- langtrekkende kraft: gravitasjon $\vec{G}$

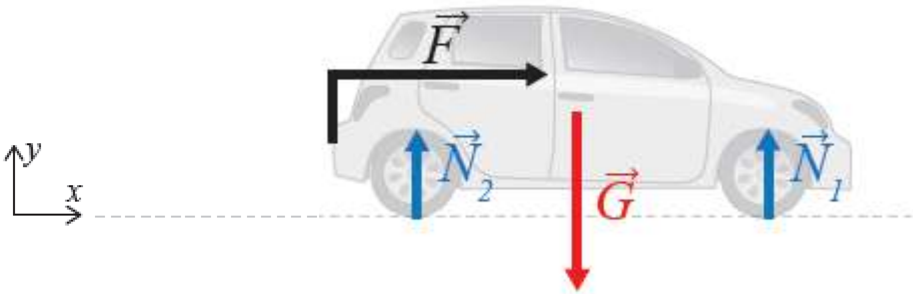
vi kjenner gravitasjonskraft: $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$
men vi kjenner ikke normalkreftene.

Newtons andre lov:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G} = m\vec{a} = 0$$

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 = -\vec{G}$$

betingelse fra banen (”bilen faller ikke”)
$\Rightarrow$ informasjon om normalkreftene



en bil kjører langs en horisontal vei

betinget bevegelse: banen er gitt

gravitasjon: $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$

normalkraft: $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = (N_1 + N_2)\,\hat{j}$

Vi antar at en ytre kraft F beveger bilen horisontal langs veien.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G} + \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = (N_1 + N_2 - mg)\,\hat{j} + F\,\hat{i} = ma_x\,\hat{i} + ma_y\,\hat{j}$$

langs veien
$\Rightarrow$ fri bevegelse

$$F = ma_x$$

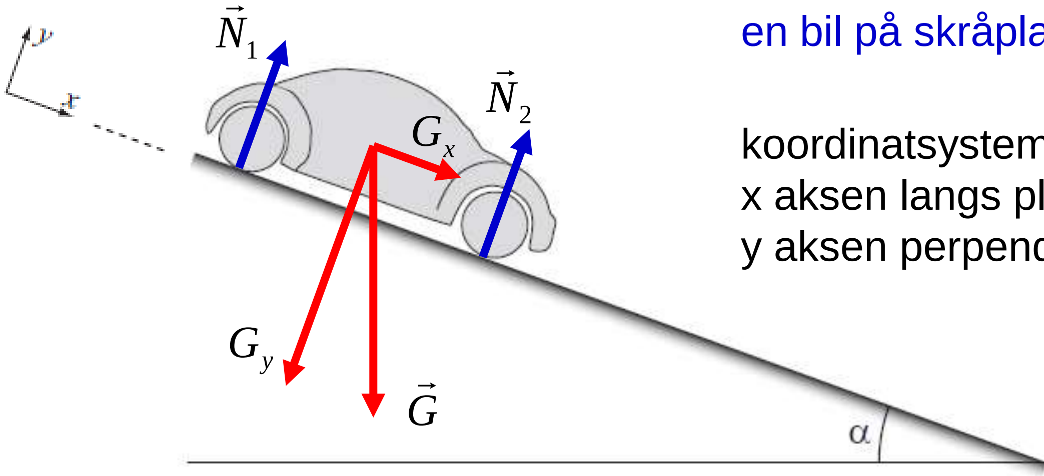
perpendikulær til veien
$\Rightarrow$ betinget bevegelse

$$N_1 + N_2 - mg = ma_y = 0$$

$$N_1 + N_2 = mg$$

hvis veien er gitt (betinget bevegelse)
dekomponer kreftene:

- krefter langs veien
- krefter normal til veien



en bil på skråplan

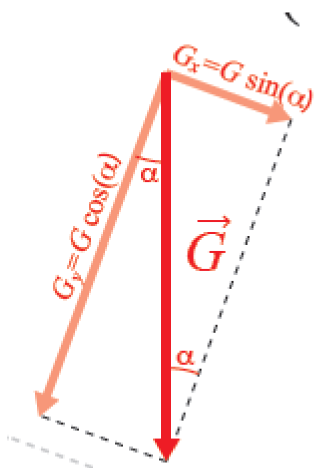
koordinatsystem:
x aksen langs planen
y aksen perpendikulær

Newtons andre lov:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G} = m\vec{a}$$

normalkraft: $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = (N_1 + N_2)\,\hat{j}$

gravitasjon: komponenter i x og y retning



$$\vec{G} = G_x\,\hat{i} + G_y\,\hat{j}$$

$$G_x = G\sin(\alpha)$$

$$G_y = -G\cos(\alpha)$$

$$\vec{G} = G\sin(\alpha)\,\hat{i} - G\cos(\alpha)\,\hat{j}$$

$$\left|\vec{G}\right| = G = mg$$

$$N_1\,\hat{j} + N_2\,\hat{j} + G_x\,\hat{i} + G_y\,\hat{j} = ma_x\,\hat{i} + ma_y\,\hat{j}$$

ingen bevegelse i y retning:

$$N_1 + N_2 + G_y = ma_y = 0$$

$$N_1 + N_2 = -G_y = G\cos(\alpha) = mg\cos(\alpha)$$

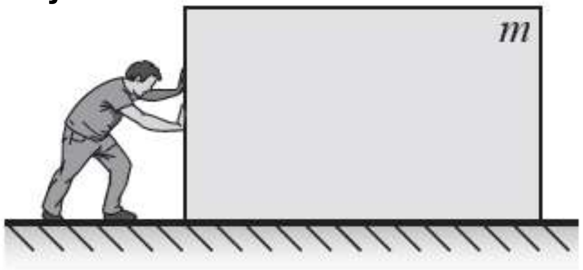
akselerasjon i x retning:

$$G_x = ma_x$$

$$G_x = G\sin(\alpha) = mg\sin(\alpha) = ma_x$$

$$a_x = g\sin(\alpha)$$

Friksjon



Hvorfor kan vi dytte en liten masse, men ikke en stor?

stor masse: jeg dytter og massen dytter tilbake etter N3L

hvordan det ?

Normalkraft: mikroskopiske deformasjoner

modell: ”kiste og gulvet limt sammen med små fjærer”

vertikal: gravitasjonskraft dytter på fjærene som dytter tilbake $\Rightarrow$ normalkraft

$$N - mg = ma_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

horisontal: jeg dytter og fjærene dytter tilbake

dytter jeg for sterk rives fjærene

i modellen er friksjon koblet til normalkraften

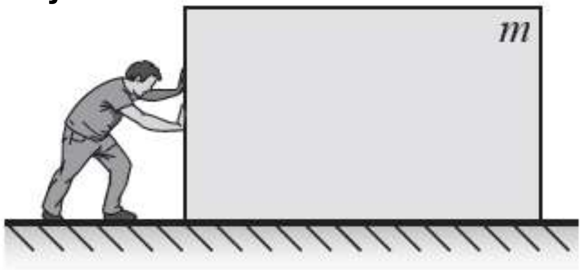
empirisk lov for statisk friksjon: $F_s < F_{s,\max} = \mu_s N$

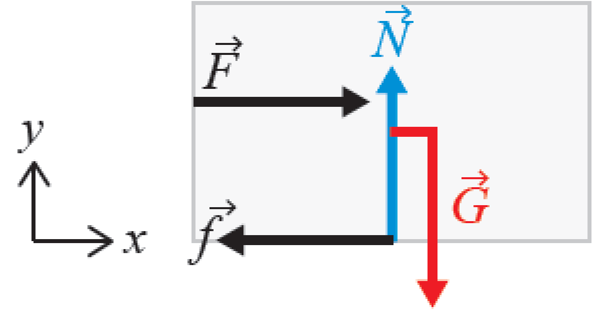
μ_s: statisk friksjonskoeffisient (dimensjonsløs)

kompliserte prosesser
bare tilnærming !

interessant: F_s uavhengig av arealet

Friksjon





statisk fall: ingen bevegelse $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{N} + \vec{G} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a} = \vec{0}$

vertikal: $N - G = ma_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = G = mg$

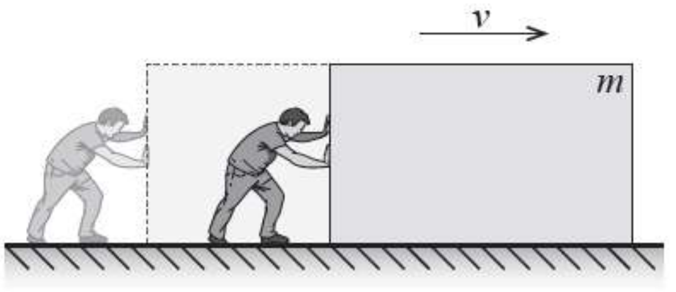
horisontal: $F - f = ma_x = 0 \quad \Rightarrow \quad f = F$

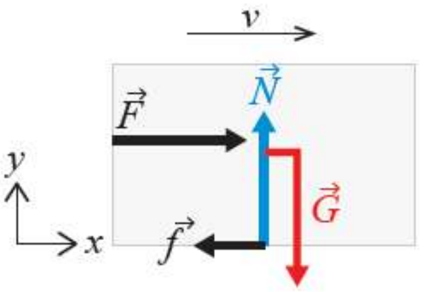
friksjonskraft er like stor som kraften F
fra mann på kisten, men bare hvis: $F < F_{s,\max} = \mu_s N$

hvis: $F > F_{s,\max} \quad \Rightarrow \quad F - f = F - F_{s,\max} = ma_x > 0$ kisten beveger seg til høyre

Vi har brukt betingelsen at kisten er i ro,
når kisten beveger seg er statisk friksjonslov ikke lenger gyldig!

Dynamisk friksjon:





Mann øker kraften frem til kisten begynner å skli

hvis han stopper å dytte vil kisten også stopper
$\Rightarrow$ det er fortsatt en friksjonskraft som bremser
$\Rightarrow$ dynamisk friksjon

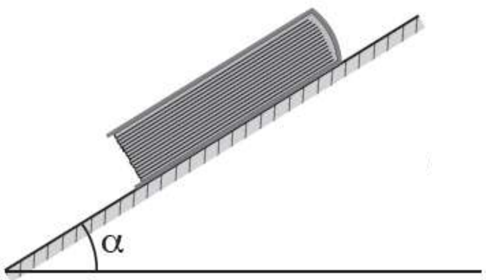
empirisk lov for dynamisk friksjon: $F_d = \mu_d N$

kraft virker motsatt bevegelsesretning

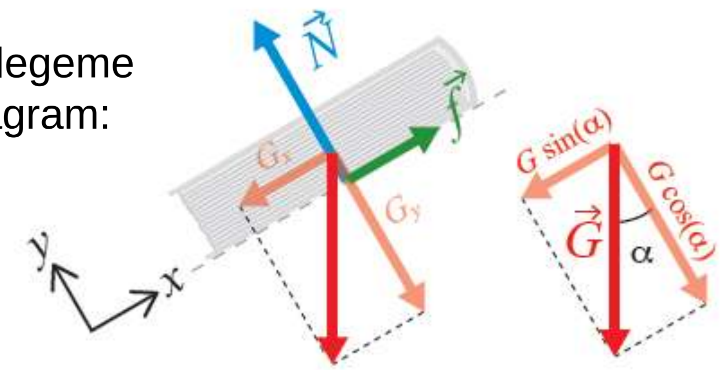
$\mu_d < \mu_s$

igjen: tilnærming

Eksempel: bok på skråplan: hvor stor må vinkelen være for at boken sklir?



fri-legeme diagram:



kontaktkrefter:
- normalkraft N
- friksjonskraft f

langtrekkende kraft:
- gravitasjon G

vi velger x aksen langs planen.

små vinkel: G sin(α) er små
⇒ friksjon f er små

stor vinkel: G sin(α) er stor
⇒ friksjon f er (for) stor

vi antar at boken ikke sklir.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{N} + \vec{G} + \vec{f} = m\vec{a} = \vec{0}$$

y retning: $N - G_y = N - mg\cos(\alpha) = ma_y = 0$

$$N = mg\cos(\alpha)$$

x retning: $f - G_x = f - mg\sin(\alpha) = ma_x = 0$

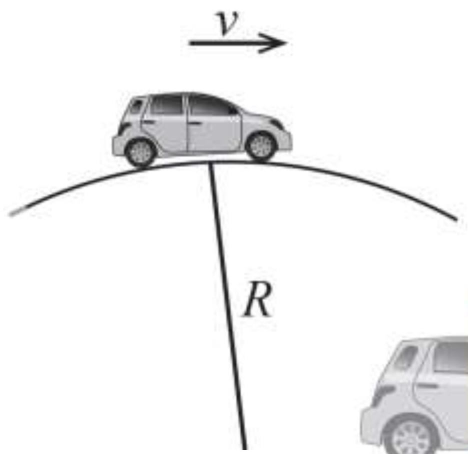
$$f = mg\sin(\alpha)$$

betingelse for at boken ikke sklir: $f < \mu_s N$

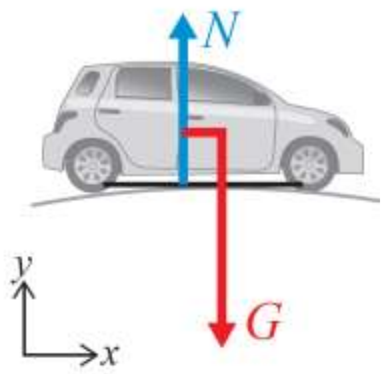
$$mg\sin(\alpha) < \mu_s mg\cos(\alpha)$$

$$\tan(\alpha) < \mu_s$$

det er lett å måle μ_s



En bil kjører over en bakketopp med fart v = 20 m/s.
Krumningsradius på toppen er R = 50 m.
Vil bilen miste kontakten med bakken?



Vi analyserer kreftene når bilen er på toppen:
koordinatsystem:
x akse horisontal, y akse vertikal

vi er ikke interessert i horisontal bevegelsen
$\Rightarrow$ vi neglisjerer luftmotstand og friksjonskrefter
$\Rightarrow$ vi vet at v_x = 20 m/s

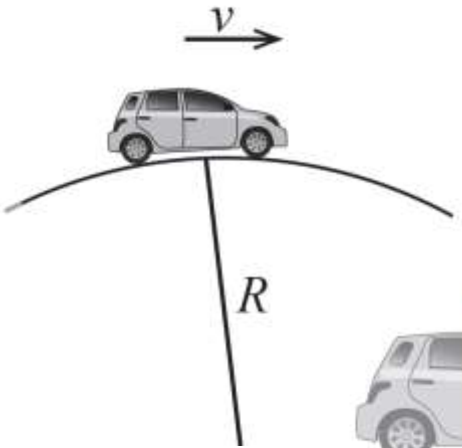
vertikale krefter:
- normalkraft fra bakken $\vec{N} = N\,\hat{j}$
- gravitasjon $\vec{G} = -mg\,\hat{j}$

N2L i y retning: $N - mg = ma_y$

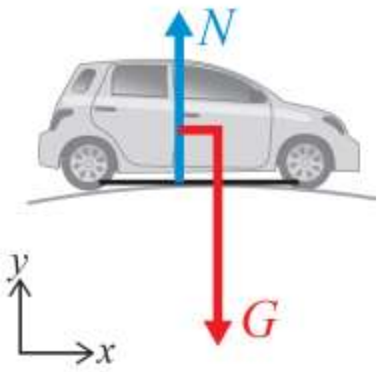
for å bli i kontakt med bakken:
akselerasjon mot bakkens sentrum må være $a_y = -\dfrac{v^2}{R}$ sentripetalakselerasjon

normalkraften er fartsavhengig: $N - mg = ma_y = -m\dfrac{v^2}{R}$

$$N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)$$



En bil kjører over en bakketopp med fart v = 20 m/s.
Krumningsradius på toppen er R = 50 m.
Vil bilen miste kontakten med bakken?



normalkraften er fartsavhengig: $$N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)$$

statisk fall: $$v = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

med økende fart blir normalkraften mindre

Normalkraften må være positiv

Bilen mister kontakt med bakken når $$N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right) = 0$$

$$v = \sqrt{gR} = \sqrt{9.81\,\text{m/s}^2 \cdot 50\,\text{m}} = 22.15\,\text{m/s}$$

$$v = 20\,\text{m/s} \quad \Rightarrow \quad N = m\left(9.81\,\text{m/s}^2 - \frac{(20\,\text{m/s})^2}{50\,\text{m}}\right) = m1.81\,\text{m/s}^2$$

Passasjerer føler en redusert tyngdeakselerasjon.