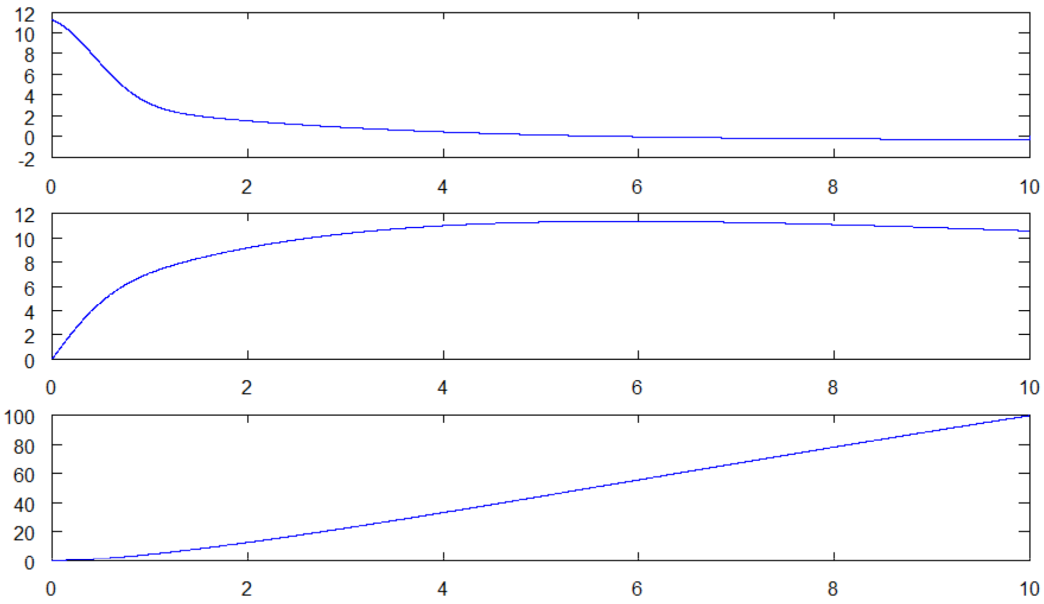
Betinget bevegelse

12.02.2013

innlevering på fronter

Innleveringer



aksenavn !

enheter !

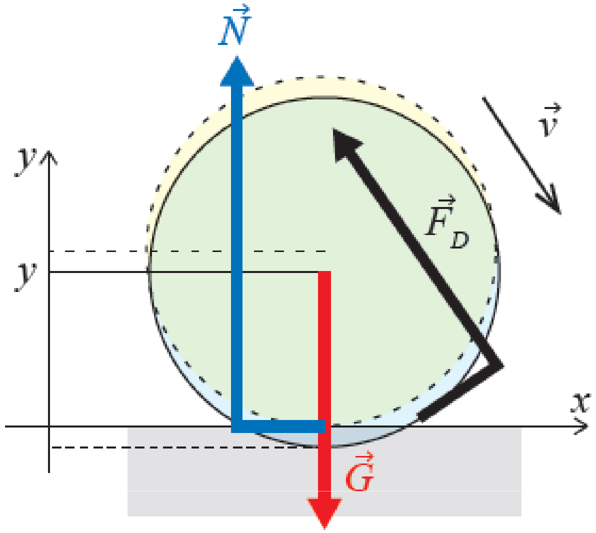
kommenter resultatene

utregninger:

- skritt for skritt, ikke bare resultatet
- vi trenger å forstå hva du har gjort
- sett inn tallverdiene og enheter til slutt

programmering:
inkluder programmene !
bruk kommentarer !

Innleveringer



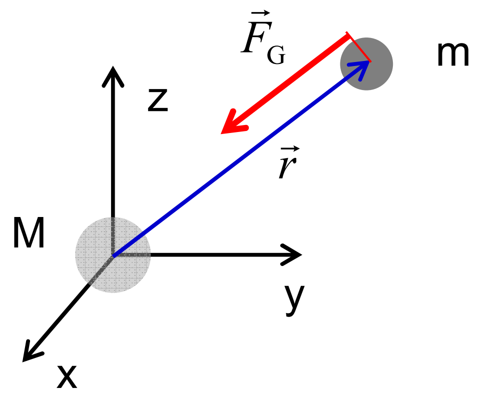
N: Normalkraft fra gulvet
F_D: Luftmotstandskraft
G: Gravitasjonskraft

fri-legeme diagrammer:

- tegn krefter som vektorer
- kontaktkrefter i kontaktpunkt mellom system og omgivelsen
- definer et symbol for hver kraft
- navngi kreftene
- definer koordinatsystem
- ikke bland hastighets og kraftvektorer

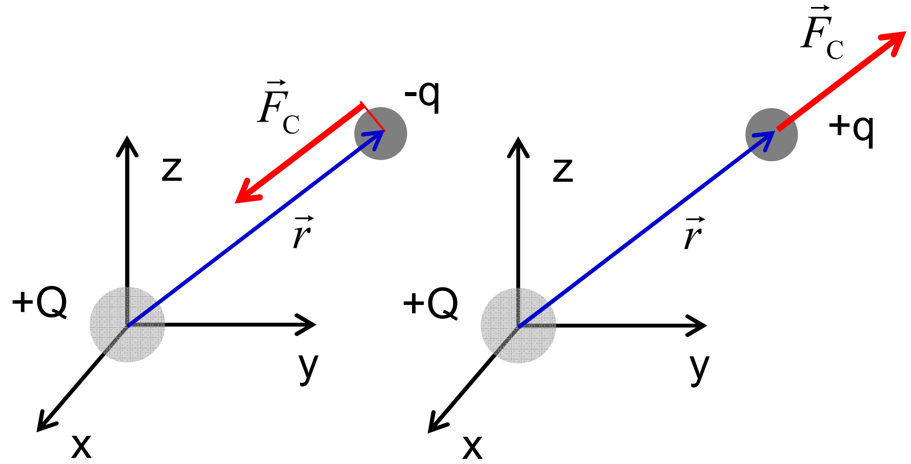
Sentralkraft

gravitasjon: $\vec{F}_{\mathrm{G}} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \hat{u}_r$



kraft fra masse M på masse m
rettet mot sentrum av masse M $\Rightarrow$ negativ tegn
kraft fra m på M $\Rightarrow$ positiv tegn

Coulombkraft: $\vec{F}_{\mathrm{C}} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r$



sentralkraft: rettet mot
(eller fra) en fast punkt

både gravitasjon og Coulomb
kraft er sentralkrefter som
skalerer med r^2.

$$\vec{F} = \frac{C}{r^2} \hat{u}_r$$

tiltrekkende kraft
hvis q_1 og q_2 har
forskjellig fortegn

frastøttende kraft
hvis q_1 og q_2 har
det samme fortegn

Sentralkraft $\vec{F} = \frac{C}{r^2}\hat{u}_r = \frac{C}{r^3}\vec{r}$ C < 0: tiltrekkende kraft

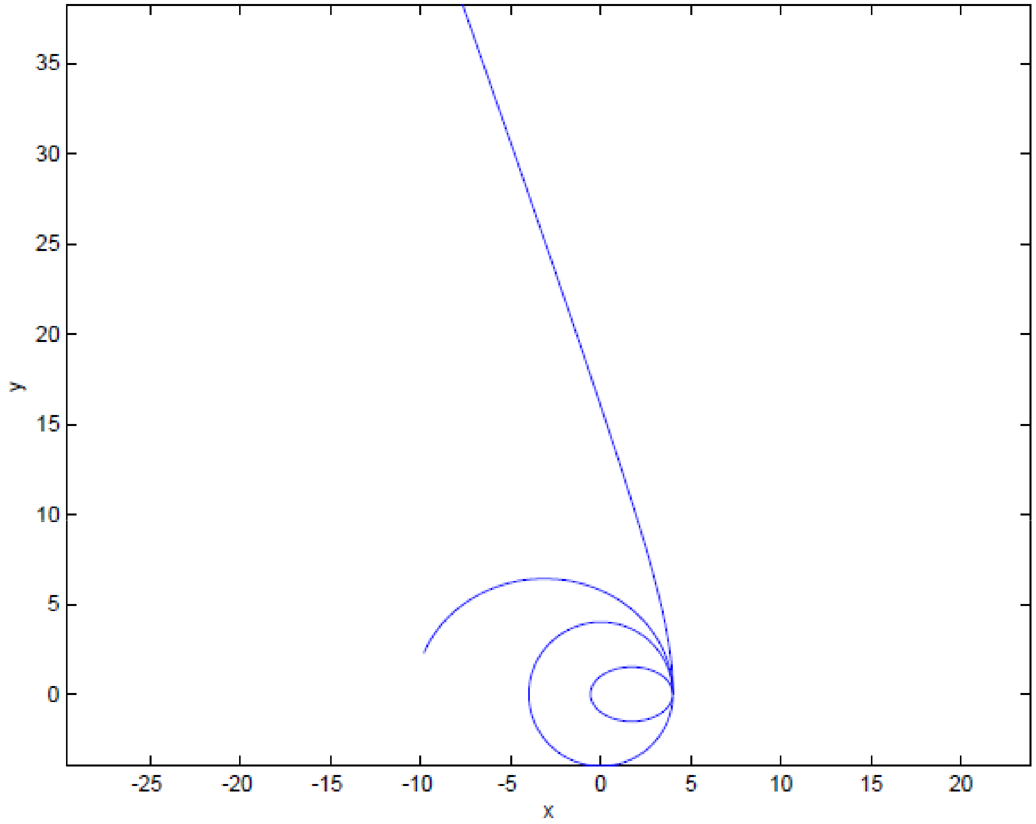
Matlab

```
% Physics
C = -1.0;
m = 1.0;
time = 50.0;
dt = 0.001;
for v0y=[0.25 0.5 0.6 1.0]
    v0 = [0.0 v0y];
    r0 = [4.0 0.0];
    % Numerical
    n = round(time/dt);
    r = zeros(n,2);
    v = zeros(n,2);
    t = zeros(n,1);
    r(1,:) = r0;
    v(1,:) = v0;
    % Calculation loop
    for i=1:n-1
        rr3 = norm(r(i,:))^3;
        F = C*r(i,:)/rr3;
        a = F/m;
        v(i+1,:) = v(i,:) + a*dt;
        r(i+1,:) = r(i,:) + v(i+1,:)*dt;
        t(i+1) = t(i) + dt;
    end
    % Plot
    plot(r(:,1),r(:,2));
    hold on;
end
hold off
xlabel('x')
ylabel('y')
axis equal;
```

Python

```
from numpy import *
from scitools.easyviz.gnuplot_ import *
# Physics
C = -1.0;
m = 1.0;
time = 50.0;
dt = 0.001;
for v0y in [0.25,0.5,0.6,1.0]:
    v0 = [0.0,v0y];
    r0 = [4.0,0.0];
    # Numerical setup
    n = int(round(time/dt));
    r = zeros((n,2),float);
    v = zeros((n,2),float);
    t = zeros(n,float);
    r[0] = r0;
    v[0] = v0;
    # Calculation loop
    for i in range(n-1):
        rr3 = dot(r[i],r[i])**1.5;
        F = C*r[i]/rr3;
        a = F/m;
        v[i+1] = v[i] + a*dt;
        r[i+1] = r[i] + v[i+1]*dt;
        t[i+1] = t[i] + dt;
    # Plot
    plot(r[:,0],r[:,1]);
    hold('on')
hold('off')
xlabel('x');
ylabel('y');
axis('equal')
```

Tiltrekkende sentralkraft



initialbetingelser:

$$\vec{r}_0 = 4\,\hat{i}$$

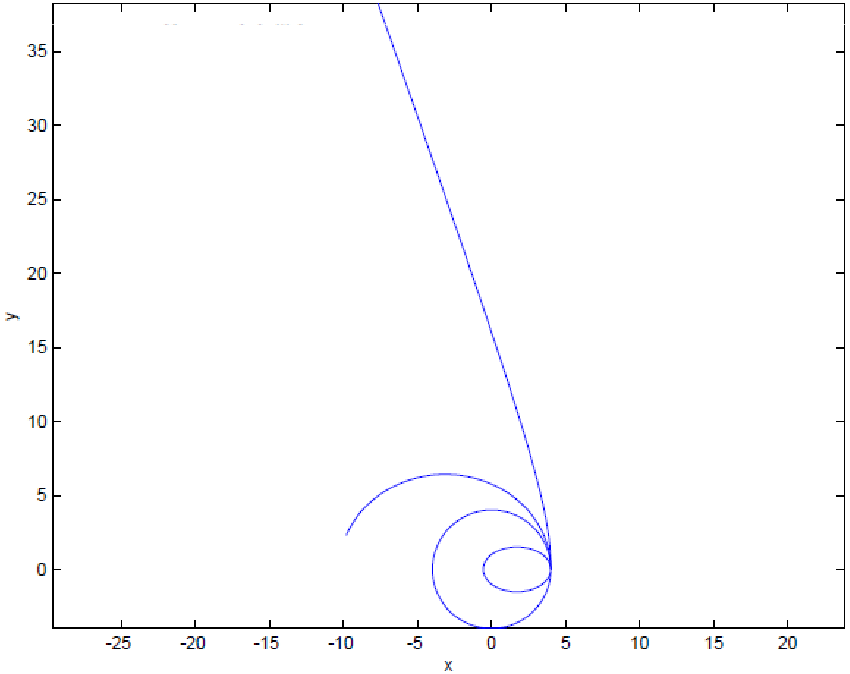
$$\vec{v}_0 = \begin{cases} 0.25\,\hat{j} \\ 0.5\,\hat{j} \\ 0.6\,\hat{j} \\ 1.0\,\hat{j} \end{cases}$$

små initialhastighet $\Rightarrow$ lukket elliptisk bane
stor initialhastighet $\Rightarrow$ objekt fjerner seg mot uendelig

betingelse: kinetisk energi $\Leftrightarrow$ potensiell energi

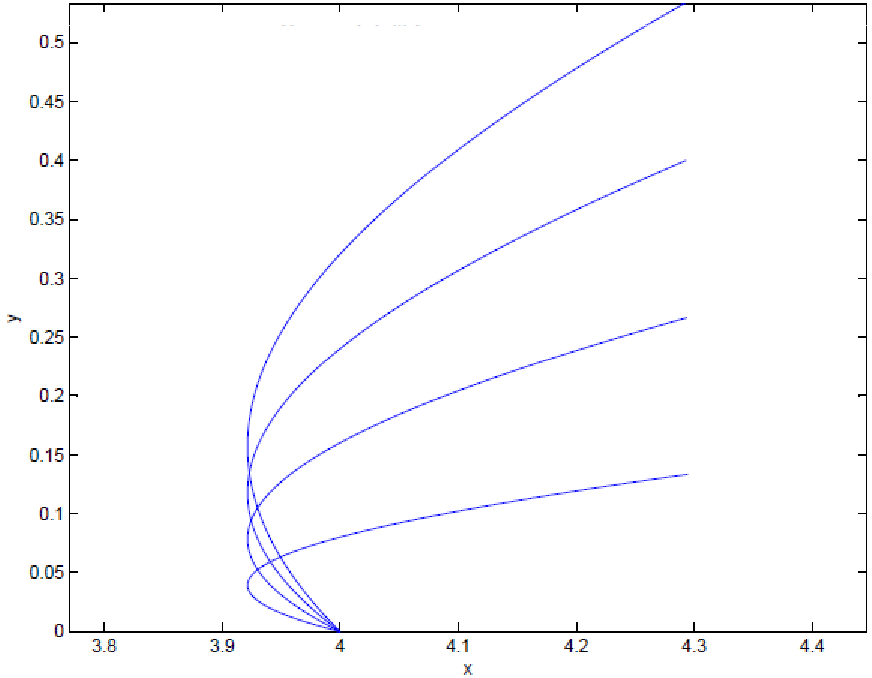
```
% Physics
C = -1.0;
m = 1.0;
time = 50.0;
dt = 0.001;
for v0y=[0.25 0.5 0.6 1.0]
    v0 = [0.0 v0y];
    r0 = [4.0 0.0];
    % Numerical
    n = round(time/dt);
    r = zeros(n,2);
    v = zeros(n,2);
    t = zeros(n,1);
    r(1,:) = r0;
    v(1,:) = v0;
    % Calculation loop
    for i=1:n-1
        rr3 = norm(r(i,:))^3;
```

C < 0: tiltrekkende kraft



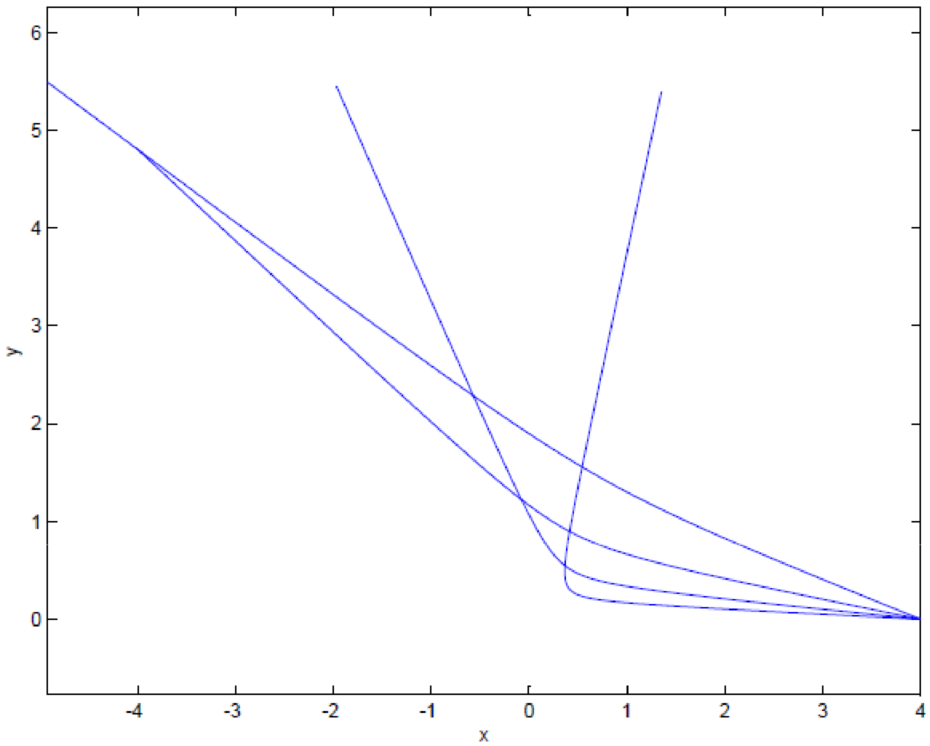

```
% Physics
C = 1.0;
m = 1.0;
time = 5.0;
dt = 0.001;
for v0y=[0.025 0.05 0.075 0.1]
    v0 = [-0.1 v0y];
    r0 = [4.0 0.0];
    % Numerical
    n = round(time/dt);
    r = zeros(n,2);
    v = zeros(n,2);
    t = zeros(n,1);
    r(1,:) = r0;
    v(1,:) = v0;
    % Calculation loop
    for i=1:n-1
        rr3 = norm(r(i,:))^3;
```

C > 0: frastøttende



Frastøttende sentralkraft

```
% Physics
C = 1.0;
m = 1.0;
time = 5.0;
dt = 0.001;
for v0y=[0.1 0.2 0.4 0.8]
    v0 = [-2.0 v0y];
    r0 = [4.0 0.0];
    % Numerical
    n = round(time/dt);
    r = zeros(n,2);
    v = zeros(n,2);
    t = zeros(n,1);
    r(1,:) = r0;
    v(1,:) = v0;
    % Calculation loop
    for i=1:n-1
        rr3 = norm(r(i,:))^3;
        F = C*r(i,:)/rr3;
        a = F/m;
        v(i+1,:) = v(i,:) + a*dt;
        r(i+1,:) = r(i,:) + v(i+1,:)*dt;
        t(i+1) = t(i) + dt;
    end
    % Plot
    plot(r(:,1),r(:,2));
    hold on;
end
hold off
xlabel('x')
ylabel('y')
axis equal;
```



Eksempel:

spredning av partikler fra en akselerator
klassisk tilnærming for kvantemekanisk problem

fri bevegelse

bevegelsen bestemmes av
kreftene og initialbetingelser

samme initialbetingelser
$\Rightarrow$ samme bevegelse på samme bane

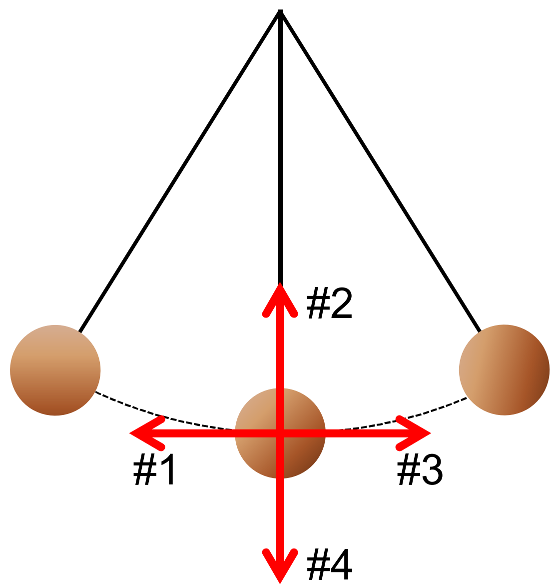
betinget bevegelse

banen er gitt

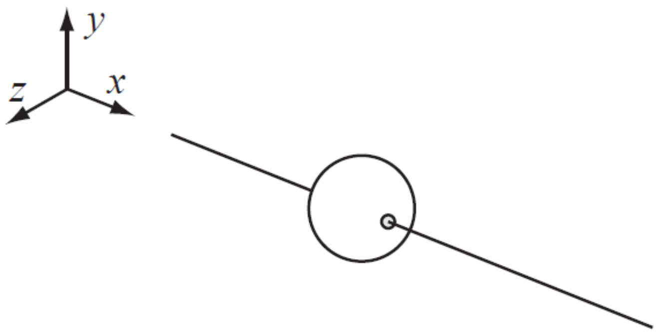
kreftene og initialbetingelser
bestemmer hvordan objektet
beveger seg på denne banen

En pendel svinger fra venstre til høyre. Hvilken pil angir retningen på akselerasjonen til pendelloddet i det laveste punktet i banen?

1. Pil #1
2. Pil #2
3. Pil #3
4. Pil #4
5. a = 0



Lineær bevegelse



Perlen kan ikke bevege seg utenfor snoren.

Snoren gir en betingelse for bevegelsen til perlen.

$\Rightarrow$ betinget bevegelse

Vi velger et koordinatsystem:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + 0\,\hat{j} + 0\,\hat{k}$$

Perlen beveger seg langs x aksen.

betinget bevegelse
$\Rightarrow$ bevegelse langs en bane

Posisjon til legeme
$\Rightarrow$ hvor langt har legemet kommet langs banen ?
$\Rightarrow$ vi måler avstand *s*(*t*) langs banen

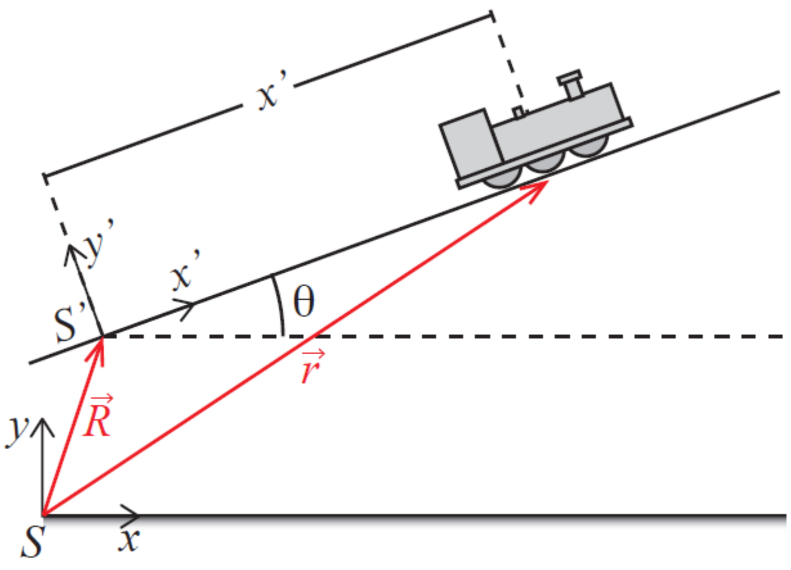
her er det enkelt: $s(t) = x(t)$

hastighet:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\hat{i} = \frac{ds}{dt}\,\hat{i}$$

generell for betinget bevegelser:

bane: $\vec{r}(s)$
posisjon langs banen: $s(t)$



posisjon til toget i system S: $\vec{r}(t) = \vec{R} + \hat{u}\, s(t)$

enhetsvektor i bevegelsesretning:

$$\hat{u} = \cos(\theta)\,\hat{i} + \sin(\theta)\,\hat{j}$$

bane til toget i system S: $\vec{r}(s) = \vec{R} + \hat{u}\, s$

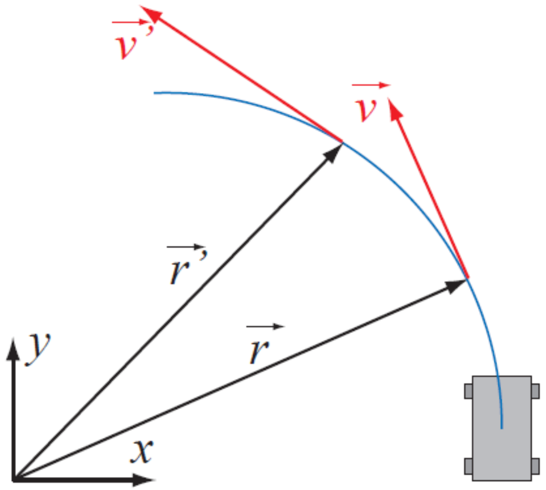
posisjon langs banen: $s(t) = x'(t)$

hastighet: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{R} + \hat{u}\, s(t)\right) = \hat{u}\,\frac{ds}{dt}$

fart: $v(t) = \left|\vec{v}(t)\right| = \frac{ds}{dt}$

$\frac{ds}{dt}$ måler hastigheten langs banen

En bil kjører rund en sving



posisjonsvektor: $\vec{r}(t)$

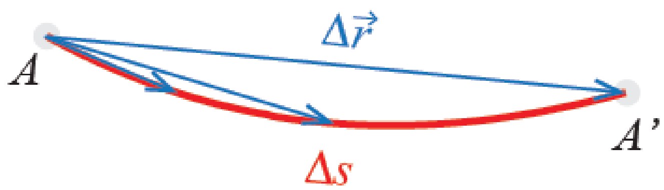
kjørelengde langs banen: $s(t)$

vi parametriserer banen med kjørelengden: $\vec{r}(s)$

hastighet er tangential langs veien: $\vec{v}(t) = v(t)\,\hat{u}_T(t)$

tangensialvektor: $\hat{u}_T = \hat{u}_T(s(t))$
er avhengig av hvor på banen bilen er
og dermed også tidsavhengig.

vi kan måle farten langs banen: $v(t) = |\vec{v}(t)| = \dfrac{ds}{dt}$



for små intervaller er kjørelengden
og forflyttningen det samme: $\Delta s \approx |\Delta\vec{r}|$
og forflyttningsvektor peker i tangensial retning.

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \approx \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \hat{u}_T(s(t)) \qquad \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = |\hat{u}_T| = 1$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \hat{u}_T\, v(t)$$

vi kan beskriver hastigheten: $\vec{v}(t) = v(t)\,\hat{u}_T(t) = \frac{ds}{dt}\,\hat{u}_T(t)$

vi finner for akselerasjonen: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$

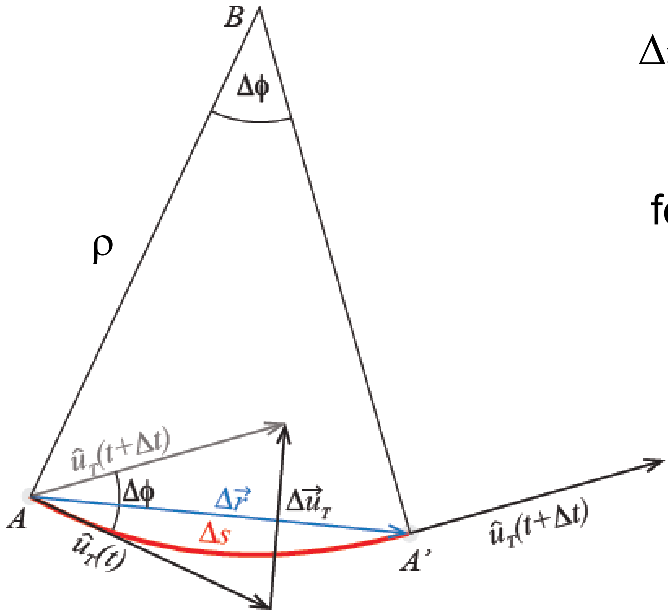
$$= \frac{d}{dt}\left(v(t)\,\hat{u}_T(t)\right)$$

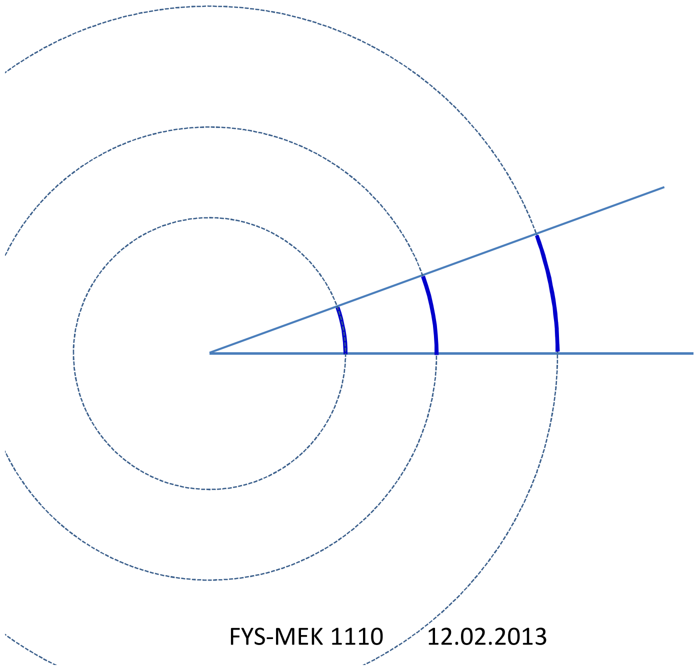
$$= \hat{u}_T(t)\frac{dv}{dt} + v(t)\frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

akselerasjon har to komponenter:

forandring av farten langs banen $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{ds}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$

forandring av tangensialvektoren $\Rightarrow$ krumning





$$\Delta\vec{u}_T = \hat{u}_T(t+\Delta t) - \hat{u}_T(t)$$

for små intervaller:

$$\left|\Delta\vec{u}_T\right| \approx \left|\Delta\varphi\,\hat{u}_T(t)\right| = \Delta\varphi = \frac{\Delta s}{\rho}$$

retning av $\Delta\vec{u}_T$ er normal på tangensialvektoren

enhetsvektor $\hat{u}_N$ som står vinkelrett på enhetsvektoren i tangensialretning

$$\hat{u}_T \cdot \hat{u}_T = \hat{u}_N \cdot \hat{u}_N = 1$$
$$\hat{u}_T \cdot \hat{u}_N = 0$$

$$\Delta\vec{u}_T = \Delta\varphi\,\hat{u}_N = \frac{\Delta s}{\rho}\,\hat{u}_N$$

lengden ρ er invers proporsjonal til banens krumning κ

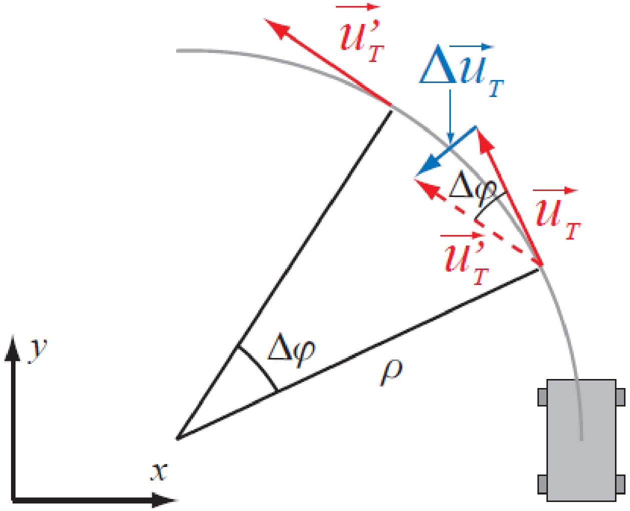
$$\kappa = \frac{1}{\rho}$$

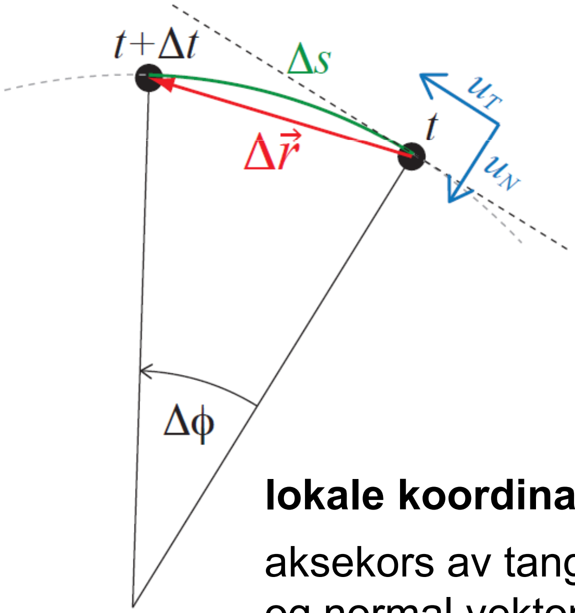
$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\rho\,\Delta t}\hat{u}_N = \frac{v}{\rho}\hat{u}_N = \frac{v(t)}{\rho(t)}\hat{u}_N(t)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\big(v(t)\,\hat{u}_T(t)\big) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{u}_T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\rho\,\Delta t}\hat{u}_N = \frac{v}{\rho}\hat{u}_N$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N = a_T\hat{u}_T + a_N\hat{u}_N$$





lokale koordinater:

aksekors av tangensial
og normal vektorer følger
med objektet langs banen

tangensialkomponent av akselerasjon:

- forandring av farten langs banen

$$a_T = \frac{dv}{dt} \qquad \text{tangensialakselerasjon}$$

normalkomponent av akselerasjon:

- forandring av bevegelsesretning
- akselerasjon som trengs for å bli på banen

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \qquad \text{sentripetalakselerasjon}$$

Eksempel: Et legeme beveger seg med konstant fart på en sirkelbane med radius R.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = v_0 \qquad \vec{v}(t) = v_0\,\hat{u}_T(t)$$

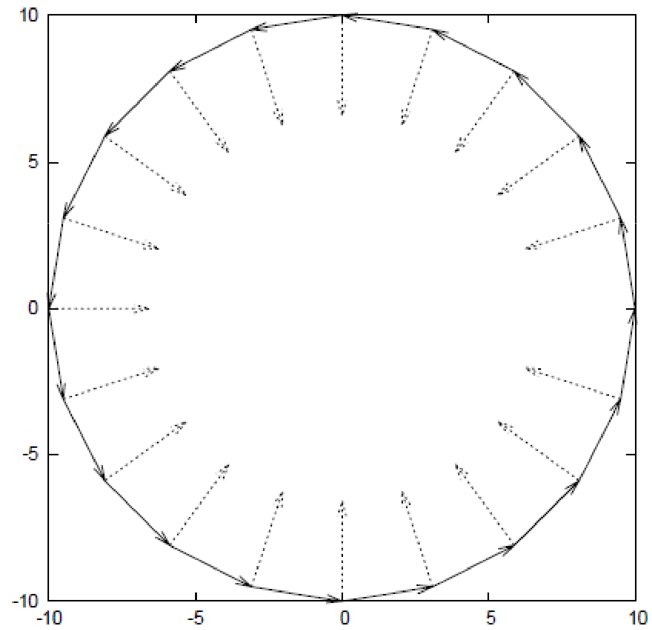
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T(t) + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N = a_T\hat{u}_T + a_N\hat{u}_N$$

tangensialakselerasjon: $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$

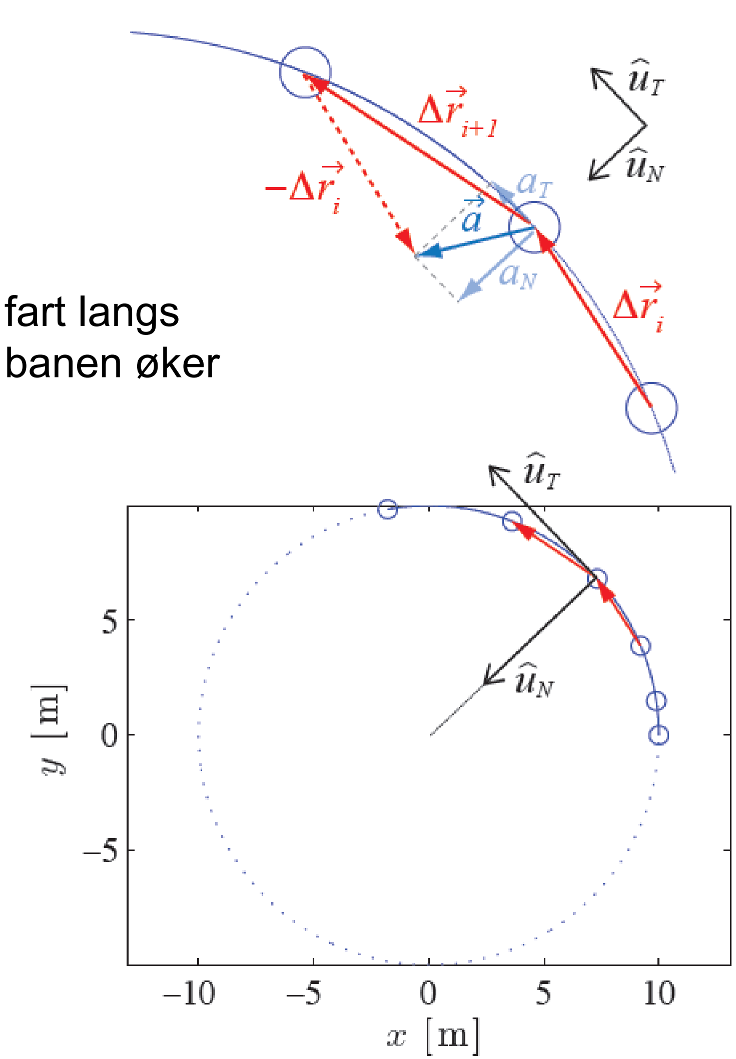
legemet beveger seg med konstant fart og har ingen akselerasjon langs sirkelbanen.

sentripetalakselerasjon: $a_N = \frac{v^2(t)}{\rho(t)} = \frac{v_0^2}{R}$

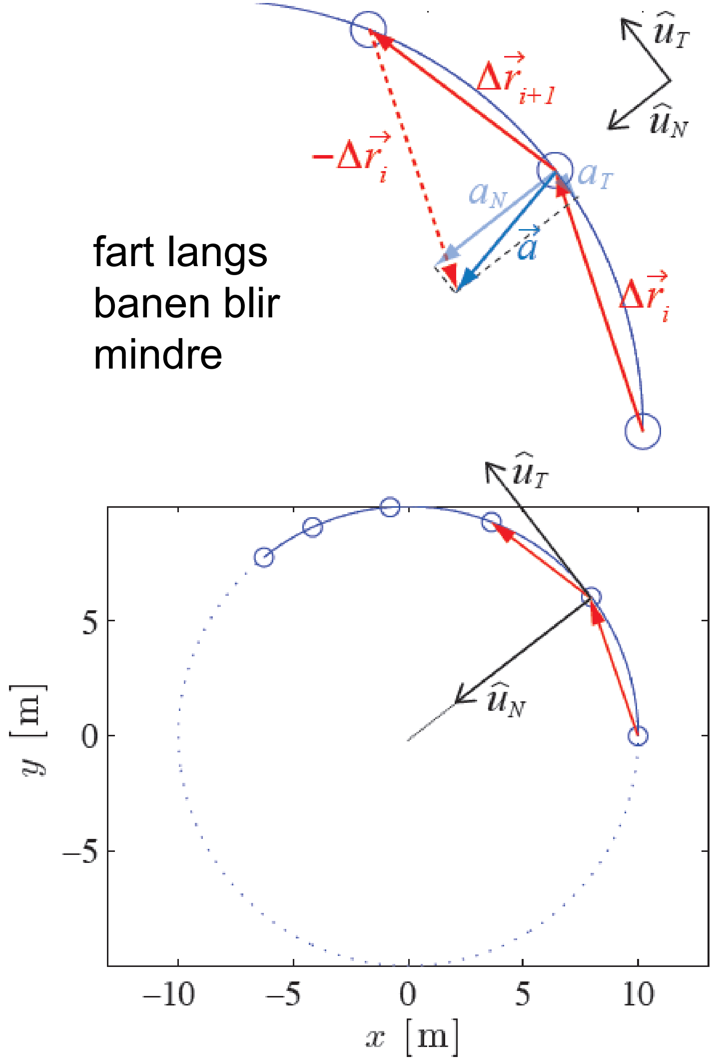
sentripetalakselerasjonen har konstant størrelse og peker mot sirkelens sentrum.



$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_N = a_T\hat{u}_T + a_N\hat{u}_N$$



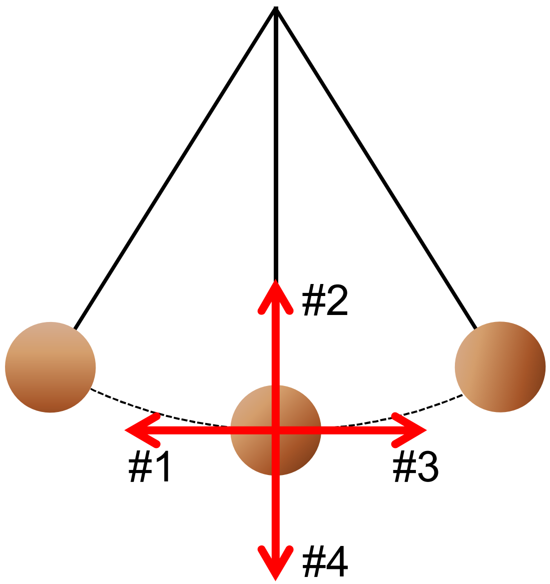
fart langs banen øker



fart langs banen blir mindre

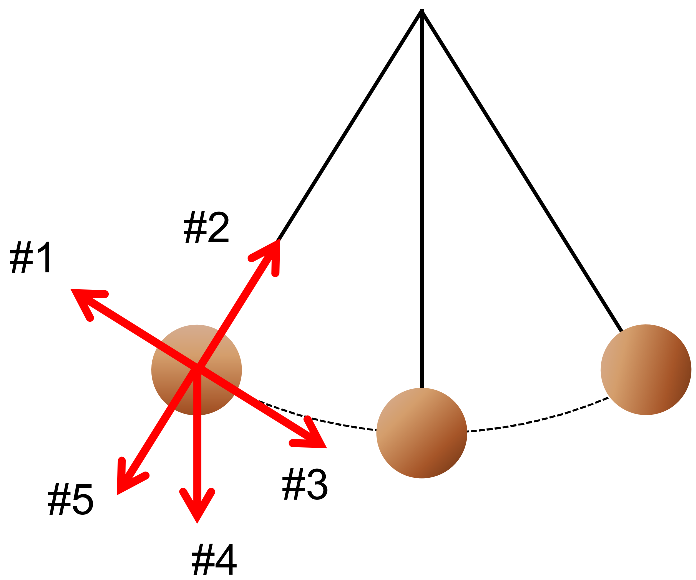
En pendel svinger fra venstre til høyre. Hvilken pil angir retningen på akselerasjonen til pendelloddet i det laveste punktet i banen?

1. Pil #1
2. Pil #2
3. Pil #3
4. Pil #4
5. a = 0



Pendelen er nå i sitt høyeste punkt. Hvilken pil angir retningen på akselerasjonen til pendelloddet?

1. Pil #1
2. Pil #2
3. Pil #3
4. Pil #4
5. Pil #5
6. a = 0



Pendelen svinger fra venstre til høyre og er halvveis ned.
Hvilken pil angir retningen på akselerasjonen til pendelloddet?

1. Pil #1
2. Pil #2
3. Pil #3
4. Pil #4
5. Pil #5