Sprawozdanie – Laboratoria 2.

Jakub Kogut

27 października 2025

1 Zadanie 1.

Zadanie 1. przedstawia problem transportowy, gdzie celem jest minimalizacja kosztów przewozu towarów producentów (supplyers) do odbiorców (demand).

1.1 Opis modelu

Mamy dane:

- Zbiór dostawców paliwa (firmy paliwowe – supply) $S = \{1, 2, \ldots, m\}$, gdzie m to liczba dostawców.
- Zbiór odbiorców paliwa (lotniska – demand) $D = \{1, 2, \ldots, n\}$, gdzie n to liczba odbiorców.
- $s_i \geq 0$ – ilość paliwa dostępna u dostawcy $i \in S$.
- $d_j \geq 0$ – ilość paliwa wymagana przez odbiorcę $j \in D$.
- $c_{ij} \geq 0$ – koszt transportu jednostki paliwa od dostawcy $i \in S$ do odbiorcy $j \in D$.

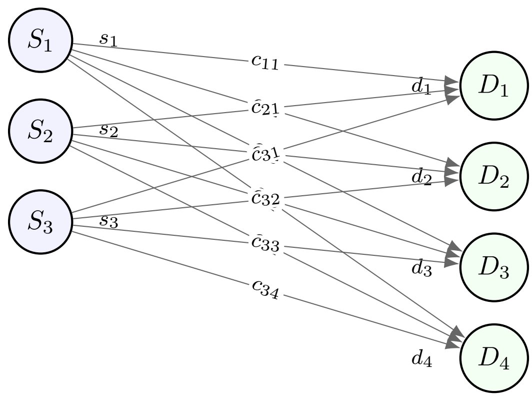
1.1.1 Definicje zmiennych decyzyjnych

Zmiennymi decyzyjnymi są:

- x_{ij} – ilość paliwa transportowana od dostawcy $i \in S$ do odbiorcy $j \in D$.

Problem można zwizualizować grafem:

Dostawcy $I = \{1, \ldots, 3\}$ Odbiorcy $J = \{1, \ldots, 4\}$



1.1.2 Funkcja celu

Celem jest minimalizacja całkowitych kosztów transportu paliwa, co można zapisać jako:

$$\min \sum_{i \in S} \sum_{j \in D} c_{ij} x_{ij}$$

1.1.3 Ograniczenia

Ograniczenia, które musi spełniać model to:

- podaż dla każdego dostawcy $i \in S$ nie może przekroczyć jego możliwości produkcyjnych:

$$\sum_{j \in D} x_{ij} \leq s_i$$

- popyt dla każdego odbiorcy $j \in D$ musi być w pełni zaspokojony:

$$\sum_{i \in S} x_{ij} = d_j$$

- zmienne decyzyjne nie mogą być ujemne:

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i \in S, j \in D$$

- aby egzemplarz problemu był możliwy do rozwiązania, całkowita podaż musi być mniejsza bądź równa całkowitemu popytowi:

$$\sum_{i \in S} s_i \geq \sum_{j \in D} d_j$$

1.2 Opis rozwiązywanych egzemplarzy

Kod rozwiązujący egzemplarze znajduje się w pliku `kody/transport.jl`. W pliku należy podać dane:

- wektor podaży s,
- wektor popytu d.
- macierz kosztów transportu C,

Dla danych podanych w zadaniu mamy zadane 4 lotniska (odbiorców) i 3 firmy paliwowe (dostawców). Ilości paliwa są podane w galonach, a koszty transportu w dolarach za galon:

- $s = [275000, 550000, 660000]$,
- $d = [110000, 220000, 330000, 440000]$,
- $C = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 9 & 11 \\ 7 & 11 & 12 & 13 \\ 8 & 14 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 165000 & 0 & 110000 \\ 110000 & 55000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 330000 & 330000 \end{bmatrix}$$

gdzie $X = [x_{ij}]$ to macierz ilości paliwa transportowanego od dostawców do odbiorców.

1.3 Wnioski

(a) Całkowity, minimalny koszt transportu wynosi $8\,525\,000$.

(b) Tak, każda firma paliwowa wysyła paliwo do więcej niż jednego lotniska:

$$\sum_j x_{1j} > 0, \quad \sum_j x_{2j} > 0, \quad \sum_j x_{3j} > 0$$

(c) Nie, nie każda firma paliwowa wysyła całkowicie swoją potencjalną produkcję paliwa:

$$\sum_j x_{1j} = 275000 = s_1, \quad \sum_j x_{2j} = 165000 < s_2, \quad \sum_j x_{3j} = 660000 = s_3$$

2 Zadanie 2.

Zadanie przedstawia problem zarządzania linią produkcyjną, w której dostępne są różne maszyny do obróbki surowców w celu produkcji określonych wyrobów gotowych. Celem jest maksymalizacja zysku z produkcji przy jednoczesnym spełnieniu ograniczeń dotyczących zasobów i zdolności produkcyjnych maszyn.

2.1 Opis modelu

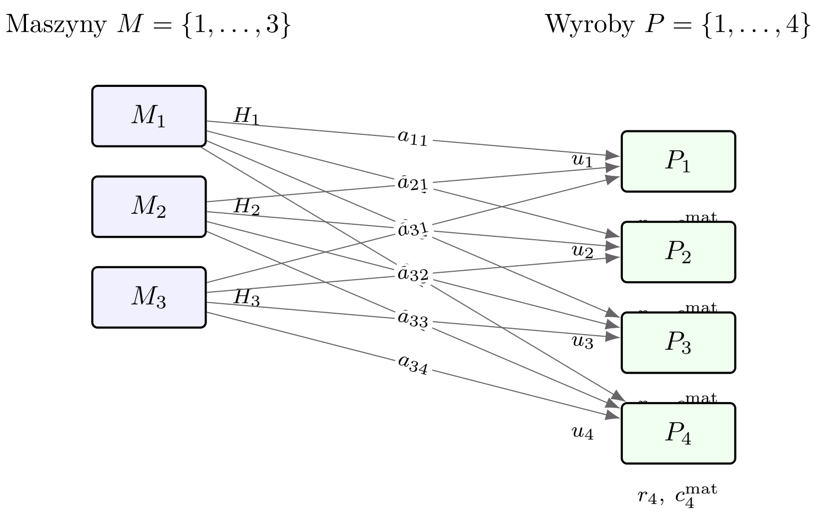
Mamy dane:

- Zbiór maszyn $M = \{1, 2, \dots, m\}$, gdzie m to liczba maszyn.
- Zbiór wyrobów gotowych $P = \{1, 2, \dots, n\}$, gdzie n to liczba wyrobów.
- $a_{mp} \geq 0$ – czas obróbki jednoski materiału $m \in M$ w jednostce czasu na maszynie $p \in P$.
- H_m – dostępny czas pracy maszyny $m \in M$.
- $u_p \geq 0$ – maksymalny popyt na wyrób $p \in P$.
- $r_p \geq 0$ – zysk ze sprzedaży jednostki wyrobu $p \in P$.
- $c_p \geq 0$ – koszt mareiałów potrzebnych do produkcji jednostki wyrobu $p \in P$.
- $d_m \geq 0$ – koszt eksploatacji maszyny $m \in M$ na jednostkę czasu pracy.

2.1.1 Definicje zmiennych decyzyjnych

Zmiennymi decyzyjnymi są:

- x_p – ilość wyprodukowanych jednostek wyrobu $p \in P$.



2.1.2 Funkcja celu

Celem jest maksymalizacja zysku z produkcji wyrobów, co można zapisać jako:

$$\max \underbrace{\sum_{p \in P} r_p x_p}_{\text{przychód}} - \underbrace{\sum_{p \in P} c_p x_p}_{\text{koszt materiałów}} - \underbrace{\sum_{m \in M} d_m \left(\sum_{p \in P} a_{mp} x_p \right)}_{\text{koszt eksploatacji maszyn}}$$

Co można uprościć do:

$$\max \sum_{p \in P} \left(r_p - c_p - \sum_{m \in M} d_m a_{mp} \right) x_p$$

2.1.3 Ograniczenia

Ograniczenia, które musi spełniać model to:

- Dostępność czasu pracy każdej maszyny $m \in M$ nie może zostać przekroczona:

$$\sum_{p \in P} a_{mp} x_p \leq H_m$$

- Produkcja każdego wyrobu $p \in P$ nie może przekroczyć maksymalnego popytu oraz musi być nieujemna:

$$0 \leq x_p \leq u_p$$

2.2 Opis rozwiązywanych egzemplarzy

Kod rozwiązujący egzemplarze znajduje się w pliku `kody/schedule.jt`. W pliku należy podać dane:

- macierz czasów obróbki A [min/kg],
- wektor dostępnych czasów pracy maszyn H [min],
- wektor maksymalnego popytu u [kg],
- wektor zysków ze sprzedaży r [$/kg],
- wektor kosztów materiałów c [$/kg],
- wektor kosztów eksploatacji maszyn d [$/min].

W przykładzie z zadania mamy $P = \{1, 2, 3, 4$ wyrobów oraz $M = \{1, 2, 3\}$ maszyn. Dane wejściowe to:

- $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 10 & 6 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, gdzie $A = [a_{mp}]$, dla $m \in M$, $p \in P$,
- $H = [3600, 3600, 3600]$
- $u = [400, 100, 150, 500]$,
- $r = [9, 7, 6, 5]$,
- $c = [4, 1, 1, 1]$,
- $d = [2, 2, 3]$.

Otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$$X = [125, 100, 150, 500] \quad X = [x_p]$$

to wektor ilości wyprodukowanych jednostek wyrobów p $\in P$ Maksymalny zysk wynosi 3632,5 dolarów. Czas pracy maszyn wynosi odpowiednio:

- Maszyna 1: 3525 min,
- Maszyna 2: 3600 min,
- Maszyna 3: 2100 min.

3 Zadanie 3.

W tym zadaniu należy znaleść optymalny plan produkcji oraz magazynowania towaru przez pewną firmę, która w danym okresie czasu może zwiększać jego produkcję lub magazynować nadwyżki w celu zaspokojenia przyszłego popytu.

3.1 Opis modelu

Mamy dane:

- Okresy czasu $T = \{1, \ldots, K\}$, gdzie K to liczba okresów.

- Maksymalna okresowa produkcja P_{max} – maksymalna ilość towaru, którą firma może wyprodukować w jednym okresie czasu.
- c_j – koszt produkcji jednostki towaru w nie ponadmiarowej produkcji w okresie $j \in T$.
- a_j – ilość możliwej dodatkowej produkcji w okresie $j \in T$.
- o_j – koszt produkcji jednostki towaru w ponadmiarowej produkcji w okresie $j \in T$.
- d_j – popyt na towar w okresie $j \in T$.
- h – koszt magazynowania jednostki towaru przez jeden okres czasu.
- S_{max} – maksymalna pojemność magazynu.
- s_0 – początkowa ilość towaru w magazynie.

3.1.1 Definicje zmiennych decyzyjnych

Zmiennymi decyzyjnymi są:

- x_j – ilość towaru wyprodukowana w okresie $j \in T$ w nie ponadmiarowej produkcji,
- y_j – ilość towaru wyprodukowana w okresie $j \in T$ w ponadmiarowej produkcji,
- s_j – ilość towaru magazynowana na koniec okresu $j \in T$.

3.1.2 Funkcja celu

Celem jest minimalizacja całkowitych kosztów produkcji i magazynowania towaru, co można zapisać jako:

$$\min \sum_{j \in T} (c_j x_j + o_j y_j + h s_j)$$

3.1.3 Ograniczenia

Ograniczenia, które musi spełniać model to:

- Bilans zapasu w każdym okresie $j \in T$:

$$s_{j-1} + x_j + y_j = d_j + s_j$$

- Produkcja w nie ponadmiarowej produkcji nie może przekroczyć maksymalnej produkcji:

$$0 \leq x_j \leq P_{max}$$

- Produkcja w ponadmiarowej produkcji nie może przekroczyć dostępnej dodatkowej produkcji:

$$0 \leq y_j \leq a_j$$

- Ilość towaru w magazynie nie może przekroczyć jego pojemności:

$$0 \leq s_j \leq S_{max}$$

3.2 Opis rozwiązywanych egzemplarzy

Kod rozwiązujący egzemplarze znajduje się w pliku `kody/production.jl`. W pliku należy podać dane:

- c – wektor kosztów produkcji w nie ponadmiarowej produkcji,
- o – wektor kosztów produkcji w ponadmiarowej produkcji,
- a – wektor dostępnej dodatkowej produkcji,
- d – wektor popytu,
- P_{max} – maksymalna produkcja w okresie,
- S_{max} – maksymalna pojemność magazynu,
- h – koszt magazynowania jednostki towaru przez

- s_0 – początkowa ilość towaru w magazynie,

Dla danych podanych w zadaniu mamy:

- $c = [6000, 4000, 8000, 9000]$,
- $o = [8000, 6000, 10000, 11000]$,
- $a = [60, 65, 70, 60]$,
- $d = [130, 80, 125, 195]$,
- $P_{max} = 100$,
- $S_{max} = 70$,
- $h = 1500$,
- $s_0 = 15$,

otrzymujemy następujące rozwiązanie:

- Okres 1: $x_1 = 100$, $y_1 = 15$, $s_1 = 0$,
- Okres 2: $x_2 = 100$, $y_2 = 50$, $s_2 = 70$,
- Okres 3: $x_3 = 100$, $y_3 = 0$, $s_3 = 45$,
- Okres 4: $x_4 = 100$, $y_4 = 50$, $s_4 = 0$,

3.3 Wnioski

(a) Całkowity minimalny koszt produkcji i magazynowania to 3 842 500$.

(b) W okresach 1, 2 i 4 firma korzysta z ponadmiarowej produkcji:

$$y_1 = 15 > 0, \quad y_2 = 50 > 0, \quad y_4 = 50 > 0$$

(c) W okresach 1 oraz 4 magazyn jest pusty na koniec okresu:

$$s_1 = 0, \quad s_4 = 0$$

4 Zadanie 4.

W zadaniu dany jest Graf $G = (N, A)$, gdzie N to zbiór wierzchołków – miast, a A to zbiór łuków – dróg łączących miasta. Celem jest znalezienie najtańszej trasy z miasta początkowego $j^\circ \in N$ do miasta docelowego $j^\circ \in N$, która nie przekracza określonego czasu podróży T.

4.1 Opis modelu

Mamy dane:

- Zbiór miast $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, gdzie n to liczba miast.
- Zbiór dróg $A \subseteq N \times N$, gdzie każda droga $(i, j) \in A$ łączy miasto $i \in N$ z miastem $j \in N$.
- $c_{ij} \geq 0$ – koszt przejazdu drogą $(i, j) \in A$.
- $t_{ij} \geq 0$ – czas przejazdu drogą $(i, j) \in A$.
- $i^\circ \in N$ – miasto początkowe.
- $j^\circ \in N$ – miasto docelowe.
- $T \geq 0$ – maksymalny dozwolony czas podróży.

4.1.1 Definicje zmiennych decyzyjnych

Zmiennymi decyzyjnymi są:

- $x_{ij} \in \{0, 1\}$ – zmienna binarna wskazująca, czy droga $(i, j) \in A$ jest wybrana w trasie.

4.1.2 Funkcja celu

Celem jest minimalizacja całkowitego kosztu przejazdu z miasta początkowego do miasta docelowego, co można zapisać jako:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

4.1.3 Ograniczenia

Ograniczenia, które musi spełniać model to:

- Zachowanie przepływu w każdym mieście $k \in N$:

$$\sum_{j:(k,j)\in A} x_{kj} - \sum_{i:(i,k)\in A} x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } k = i^\circ \\ -1, & \text{jeśli } k = j^\circ \\ 0, & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

- Całkowity czas podróży nie może przekroczyć dozwolonego czasu T:

$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij} \le T$$

- Zmienne decyzyjne są binarne:

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in A$$