Zadanie 5. – Lista 1.

Jakub Kogut

24 października 2025

1 Wprowadzenie

Do rozwiązania zadania będę wykorzystywał następujące definicje i twierdzenia podane na wykładzie.
Niech L L_1 i L_2 będą językami nad alfabetem Σ. Wtedy:

$$L_1L_2 = xy : x \in L_1, y \in L_2 \tag{1.1}$$

$$L^0 = \varepsilon \tag{1.2}$$

$$L^{i+1} = LL^i \quad \text{dla } i > 0 \tag{1.3}$$

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i \tag{1.4}$$

Jeżeli r i s są wyrażeniami regularnymi reoprezentującymi języki $L(r)$ i $L(s)$, to:

- $r + s$ jest wyrażeniem regularnym reprezentującym język $L(r) \cup L(s)$,
- rs jest wyrażeniem regularnym reprezentującym język $L(r)L(s)$,
- r^* jest wyrażeniem regularnym reprezentującym język $L(r)^*$.

2 Zadanie 5.

Należy udowodnić następujące tożsamości dla wyrażeń regularnych r, s i t, przy czym $r = s$ oznacza, że $L(r) = L(s)$.

1. Kożystając z łączności sumy zbiorów mamy:

$$\begin{aligned}(r+s)+t &= (L(r) \cup L(s)) \cup L(t) \\ &= L(r) \cup \big(L(s) \cup L(t)\big) \\ &= r + (s+t)\end{aligned} \tag{2.1}$$

2. Z definicji konkatenacji oraz łączności konunkcji:

$$\begin{aligned}(rs)t &= (L(r)L(s))L(t) \\ &= \{xyz : xy \in L(r)L(s), z \in L(t)\} \\ &= \{xyz : (x \in L(r), y \in L(s)) \wedge (z \in L(t))\} \\ &= \{xyz : x \in L(r), (y \in L(s), z \in L(t))\} \\ &= \{xyz : x \in L(r), yz \in L(s)L(t)\} \\ &= L(r)(L(s)L(t)) \\ &= r(st)\end{aligned} \tag{2.2}$$

3. Kożystając z rozdzielności konkatenacji względem alternatywy otrzymujemy:

$$\begin{aligned}(r+s)t &= (L(r) \cup L(s))\, L(t) \\ &= \{xy : x \in L(r) \cup L(s), y \in L(t)\} \\ &= \{xy : (x \in L(r), y \in L(t)) \wedge (x \in L(s), y \in L(t))\} \\ &= \{xy : x \in L(r), y \in L(t)\} \cup \{xy : x \in L(s), y \in L(t)\} \\ &= L(r)L(t) \cup L(s)L(t) \\ &= rt + st\end{aligned} \tag{2.3}$$

4. Analogicznie do poprzedniego:

$$\begin{aligned}r(s+t) &= L(r)(L(s) \cup L(t)) \\ &= \{xy : x \in L(r), y \in L(s) \cup L(t)\} \\ &= \{xy : (x \in L(r), y \in L(s)) \wedge (x \in L(r), y \in L(t))\} \\ &= \{xy : x \in L(r), y \in L(s)\} \cup xy : x \in L(r), y \in L(t)\} \\ &= L(r)L(s) \cup L(r)L(t) \\ &= rs + rt\end{aligned} \tag{2.4}$$

5. Kożystając z definicji otoczki Kleenego:

$$\begin{aligned}\emptyset^* &= \bigcup_{i=0}^{\infty} \emptyset^i \\ &= \emptyset^0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \emptyset^i \\ &= \{\varepsilon\} \cup \emptyset \\ &= \{\varepsilon\} \\ &= \varepsilon\end{aligned} \tag{2.5}$$

6. Można udowodnić tożsamość $(r^*)^* = r^*$, poprzez pokazanie inkluzji w obie strony. Przyjmuje, że $L(r) = L$.
   (a) $L^* \subseteq (L^*)^*$
   Wynika to wprost z definicji:

$$L^* = (L^*)^1 \subseteq (L^*)^1 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (L^*)^i = \bigcup_{i=0} (L^*)^i = (L^*)^*$$

   (b) $(L^*)^* \subseteq L^*$
   Niech $w \in (L^*)^*$. Z definicji otoczki Kleenego istnieje takie $k \geq 0$ oraz $u_1, u_2, \ldots, u_k \in L^*$ takie, że

$$w = u_1 u_2 \ldots u_k$$

   Natomiast każde u_i można rozpisać jako

$$u_i = v_{i,1} v_{i,2} \ldots v_{i,n_i}$$

   gdzie $n_i \geq 0$ oraz $v_{i,j} \in L$ dla $1 \leq j \leq n_i$. Zatem w ma postać:

$$w = (v_{1,1} v_{1,2} \ldots v_{1,n_1})(v_{2,1} v_{2,2} \ldots v_{2,n_2}) \ldots (v_{k,1} v_{k,2} \ldots v_{k,n_k})$$

   Czyli w jest konkatenacją skończonej liczby słów należących do L, a więc $w \in L^*$. Stąd $(L^*)^* \subseteq L^*$.

A skoro obie inkluzje zachodzą, to $L^* = (L^*)^*$, czyli $(r^*)^* = r^*$.

7. Podobnie jak powyższą tożsamość, $\left(r^* s^*\right)^* = (r+s)^*$ też można udowodnić przez inkluzję:
   (a) $(R^*S^*)^* \subseteq (R+S)^*$
   Niech $w \in (R^*S^*)^*$. Z definicji otoczki Kleenego istnieje $k \geq 0$ oraz $u_1, \ldots, u_k \in R^*S^*$ takie, że
   $$w = u_1 u_2 \ldots u_k.$$
   Każdy u_i ma postać $x_i y_i$ z $x_i \in R^*$ oraz $y_i \in S^*$. Dalej, z definicji:
   $$x_i = r_{i,1} r_{i,2} \ldots r_{i,p_i} \quad (p_i \geq 0,\ r_{i,j} \in R),$$
   $$y_i = s_{i,1} s_{i,2} \ldots s_{i,q_i} \quad (q_i \geq 0,\ s_{i,j} \in S).$$
   Zatem w jest skończoną konkatenacją słów, z których każde należy do R albo do S, czyli $w \in (R+S)^*$. Stąd $(R^*S^*)^* \subseteq (R+S)^*$.
   (b) $(R+S)^* \subseteq (R^*S^*)^*$
   Niech $w \in (R+S)^*$. Wówczas istnieje $m \geq 0$ oraz $t_1, \ldots, t_m \in R \cup S$ takie, że
   $$w = t_1 t_2 \ldots t_m.$$
   Zgrupujmy maksymalne kolejne bloki elementów z R oraz z S. Otrzymujemy rozkład
   $$w = (R \cdots R)(S \cdots S)(R \cdots R) \cdots (S \cdots S),$$
   gdzie każdy blok $R \cdots R$ należy do R^*, a każdy blok $S \cdots S$ do S^*. Zatem w jest konkatenacją skończonej liczby elementów z R^*S^*, czyli $w \in (R^*S^*)^*$. Stąd $(R+S)^* \subseteq (R^*S^*)^*$.

   Z obu inkluzji otrzymujemy równość $\left(r^* s^*\right)^* = (r+s)^*$.