Zadanie 5. – Lista 1.

Jakub Kogut

22 października 2025

1 Wprowadzenie

Do rozwiązania zadania będę wykorzystywał następujące definicje i twierdzenia podane na wykładzie.
Niech L L_1 i L_2 będą językami nad alfabetem Σ. Wtedy:

$$L_1L_2 = xy : x \in L_1, y \in L_2 \tag{1.1}$$

$$L^0 = \varepsilon \tag{1.2}$$

$$L^{i+1} = LL^i \quad \text{dla } i > 0 \tag{1.3}$$

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i \tag{1.4}$$

Jeżeli r i s są wyrażeniami regularnymi reoprezentującymi języki $L(r)$ i $L(s)$, to:

- $r + s$ jest wyrażeniem regularnym reprezentującym język $L(r) \cup L(s)$,
- rs jest wyrażeniem regularnym reprezentującym język $L(r)L(s)$,
- r^* jest wyrażeniem regularnym reprezentującym język $L(r)^*$.

2 Zadanie 5.

Należy udowodnić następujące tożsamości dla wyrażeń regularnych r, s i t, przy czym $r = s$ oznacza, że $L(r) = L(s)$.

1.
$$\begin{aligned}(r + s) + t &= (L(r) \cup L(s)) \cup L(t)\\ &= L(r) \cup (L(s) \cup L(t))\\ &= r + (s + t)\end{aligned} \tag{2.1}$$

2.
$$\begin{aligned}(rs)t &= (L(r)L(s))L(t)\\ &= \{xy : x \in L(r)L(s), y \in L(t)\}\\ &= \{xy : (x \in L(r), y \in L(s)), y \in L(t)\}\\ &= \{xy : x \in L(r), y \in L(s)L(t)\}\\ &= L(r)(L(s)L(t))\\ &= r(st)\end{aligned} \tag{2.2}$$

3.
$$\begin{aligned}(r + s)t &= (L(r) \cup L(s))\, L(t)\\ &= \{xy : x \in L(r) \cup L(s), y \in L(t)\}\\ &= \{xy : (x \in L(r), y \in L(t)) \wedge (x \in L(s), y \in L(t))\}\\ &= \{xy : x \in L(r), y \in L(t)\} \cup xy : x \in L(s), y \in L(t)\}\\ &= L(r)L(t) \cup L(s)L(t)\\ &= rt + st\end{aligned} \tag{2.3}$$

4.
$$
\begin{aligned}
r(s+t) &= L(r)(L(s) \cup L(t)) \\
&= \{xy : x \in L(r), y \in L(s) \cup L(t)\} \\
&= \{xy : (x \in L(r), y \in L(s)) \wedge (x \in L(r), y \in L(t))\} \\
&= \{xy : x \in L(r), y \in L(s)\} \cup xy : x \in L(r), y \in L(t)\} \\
&= L(r)L(s) \cup L(r)L(t) \\
&= rs + rt
\end{aligned} \tag{2.4}
$$

5. Kożystając z definicji otoczki Kleenego:

$$
\begin{aligned}
\emptyset^* &= \bigcup_{i=0}^{\infty} \emptyset^i \\
&= \emptyset^0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \emptyset^i \\
&= \{\varepsilon\} \cup \emptyset \\
&= \{\varepsilon\} \\
&= \varepsilon
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

6.
$$
\begin{aligned}
(r^*)^* &= \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} L(r)^i\right)^* \\
&= \bigcup_{j=0}^{\infty} \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} L(r)^i\right)^j \\
&= \bigcup_{j=0}^{\infty} \Big(L(r)^0 \cup L(r)^1 \cup L(r)^2 \cup \dots\Big)^j \\
&= \bigcup_{j=0}^{\infty} \Big(L(r)^0 L(r)^0 \dots L(r)^0 \cup L(r)^1 L(r)^0 \dots L(r)^0 \cup \dots \\
&\quad \cup L(r)^i L(r)^k \dots L(r)^m \cup \dots\Big) \\
&= \bigcup_{j=0}^{\infty} L(r)^0 \cup L(r)^1 \cup L(r)^2 \cup \dots \\
&= r^*
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

7.
$$
\begin{aligned}
r^* s^* &= \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} L(r)^i\right)\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} L(s)^j\right) \\
&= \bigcup_{i=0}^{\infty}\bigcup_{j=0}^{\infty} L(r)^i L(s)^j \\
&= \bigcup_{k=0}^{\infty} \Big(L(r)^0 L(s)^k \cup L(r)^1 L(s)^{k-1} \cup \dots \cup L(r)^k L(s)^0\Big) \\
&= (r+s)^*
\end{aligned} \tag{2.7}
$$