

Notatki Programowanie Funkcyjne

Jakub Kogut

15 kwietnia 2025

Spis treści

1	Wstęp	3
2	Wykład 11-03-2025	3
2.1	Struktura kodu w Haskell	3
2.2	Typy w Haskellu	3
2.3	Listy	4
2.3.1	Operacje na listach	5
2.3.2	Podstawowe funkcje operujące na listach	5
2.3.3	List comprehension	6
3	Wykład 18-03-2025	6
3.1	implementacje funkcji w Haskellu	6
3.1.1	QuickSort	6
3.1.2	<i>partition</i>	6
3.1.3	Lepsza implementacja QuickSort'a	6
3.1.4	InsertSort	7
3.1.5	<i>zip</i>	7
3.1.6	<i>zipWith</i>	7
3.1.7	funkcje wykonujące operacje na listach	7
4	Wykład 25-03-2025	8
4.1	Krótki wstęp o automatach	8
4.1.1	Deterministyczne, skończone automaty	8
4.1.2	Niedeterministyczne, skończone automaty	8
5	Wykład 2025-04-01	8
5.1	Struktura	9
5.2	Typy parametryzowalne	9
5.3	Funkturo Maybe	10
5.4	Funktor	11
5.5	Big Data – “Hello World”	12
6	Wykład 2025-04-08	12
6.1	Elementy teorii kategorii	12
6.1.1	Definicja Kategorii	12
6.2	Typy parametryzowalne	14
7	Wykład 2025-04-15	14
7.1	Podstawowe konstruktorów typów danych	14

8	Ćwiczenia	14
8.1	Ćwiczenia 11-03-2025	14
8.1.1	Zadanie 1	14
8.1.2	Zadanie 2	15
8.1.3	Zadanie 3	16
8.1.4	Zadanie 4	16
8.1.5	Zadanie 5	16
8.1.6	Zadanie 6	17
8.1.7	Zadanie 7	18
8.1.8	Zadanie 8	19
8.1.9	Zadanie 9 – (Eliminacja Pętli)	19
8.1.10	Zadanie 10	20
8.1.11	Zadanie 11	22
8.1.12	Zadanie 12	22
8.2	Elementy Teorii Liczb	23
8.2.1	Zadanie 13	23
8.2.2	Zadanie 14	23
8.2.3	Zadanie 15	24
8.2.4	Zadanie 16	24
8.3	Listy – część 1.	25
8.3.1	Zadanie 17	26
8.3.2	Zadanie 18	26
8.3.3	Zadanie 19	27
8.3.4	Zadanie 20	27
8.3.5	Zadanie 21	28
8.3.6	Zadanie 22	28
8.3.7	Zadanie 23 – Klasyczny Problem hetmanów	29
8.3.8	Zadanie 24	29
8.3.9	Zadanie 25	30
8.3.10	Zadanie 26	30
8.3.11	Zadanie 27	30
8.3.12	Zadanie 28	31
8.3.13	Zadanie 29	31
8.3.14	Zadanie 30	31
8.3.15	Zadanie 31	31
8.3.16	Zadanie 32	32
8.3.17	Zadanie 33	32
8.4	Foldy	33
8.4.1	Zadanie 34	33
8.4.2	Zadanie 35	33
8.4.3	Zadanie 36	34
8.4.4	Zadanie 37	34
8.4.5	Zadanie 38	35
8.4.6	Zadanie 39	35
8.4.7	Zadanie 40	35
8.4.8	Zadanie 41	36
8.4.9	Zadanie 42	36
8.4.10	Zadanie 43	36
8.4.11	Zadanie 44	36
8.4.12	Zadanie 45	37

1 Wstęp

Notatki z programowania funkcyjnego prowadzone przez GOATA profesora Jacka Cichonia na semestrze 4 2025. Zajęcia laboratoryjne prowadzone są przez dr Dominika Bojko.

2 Wykład 11-03-2025

Na tym wykładzie skupimy się na przygotowaniu środowiska pracy do programowania funkcyjnego w języku Haskell.

2.1 Struktura kodu w Haskell

Przykładowy kod wygląda następująco:

```
{- file = W2.hs
   autor = JK
   date = 11-03-2025
-}
module W2 where
id' x = x
```

Następnie w terminalu, w którym mamy odpalone GHCI wpisujemy:

```
>:l W2.hs
>:r
>id' 5
5
>:t id'
id' :: a -> a //co oznacza id :: forall a => a->a
```

Co matematycznie można zapisać jako:

$$exp = (\lambda a : Typ \rightarrow (a \rightarrow a))$$

- Przykład:

- $exp(Int) :: Int \rightarrow Int$
- $exp(Bool) :: Bool \rightarrow Bool$
- $exp(Double) :: Double \rightarrow Double$

Cichoń radzi, aby narpiew zastanowić się jaki powinny być typ funkcji, a dopiero potem zastanawiać się nad implementacją, ponoć oszczędza to *czas i nerwy*.

2.2 Typy w Haskellu

- Typy proste:

- Int
- Double
- Char
- Bool

- Typy złożone:

- Listy

- Krotki
- Funkcje

- Przykład:

- funkcja Collatz’a $coll :: Int \rightarrow Int$

```
coll n
  | n==1 = 1
  | even n = coll (n `div` 2)
  | odd n = coll (3*n+1)
```

Symbol `|` oznacza wyrażenie z wykożystaniem strażników *guards*. Zapis taki jest podobny do matematycznego zapisu funkcji:

$$coll(n) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n = 1 \\ coll(\frac{n}{2}) & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \\ coll(3n + 1) & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$$

Nie jest to bezpieczna funkcja, ponieważ dla liczb ujemnych zapętli się ona w nieskończoność. Można zauważyć, że funkcja ta zwraca zawsze liczbę 1. Ciekawa jest liczba kroków, które są potrzebne do osiągnięcia tej wartości. Dla $n = 27$ potrzeba 111 kroków, dla $n = 28$ potrzeba 18 kroków, dla $n = 29$ potrzeba 111 kroków.

- Nowa funkcja Collatz’a
 $collatz :: (Int, Int) \rightarrow (Int, Int)$

```
collatz (n, steps)
  | n==1 = (n, steps)
  | even n = collatz (n `div` 2, steps+1)
  | odd n = collatz (3*n+1, steps+1)
```

Funkcja ta zwraca parę liczb, pierwsza to wynik funkcji Collatz’a, a druga to liczba kroków potrzebna do osiągnięcia tej wartości.

Spróbujmy ją sobie odpalić:

```
>collatz (97,0)
(1,118)
```

Jak widać dla $n = 97$ potrzeba 118 kroków, aby osiągnąć wartość 1.

- Funkcja *lenght of collatz* zwracająca długość ciągu Collatz’a dla danej liczby:
 $lenz :: Int \rightarrow Int$

```
lenz n = snd (collatz (n,0))
```

2.3 Listy

Definicja listy w Haskellu:

`[a]` - lista elementów typu `a`

$$[a] = \{[a_1, \dots, a_k] \mid a_1, \dots, a_k \in a, k \in \mathbb{N}\}$$

```
>:t [1,2,3]
[1,2,3] :: Num a => [a]
>:t [1::Integer, 2, 3]
[1,2,3] :: [Integer]
```

2.3.1 Operacje na listach

- Dodawanie elementu na początku listy

```
>:t (1:[2,3])
(1:[2,3]) :: Num a => [a]
```

- Konkatenacja list

```
>:t [1,2]++[3,4]
[1,2]++[3,4] :: Num a => [a]
```

2.3.2 Podstawowe funkcje operujace na listach

- `length::[a] → Int`

- `length [] = 0`
- `length (x:xs) = 1 + length xs`

- `head::[a] → a`

zwraca pierwszy element listy

- `head (x:xs) = x`
- `head [] = error "empty list"`

- `tail::[a] → [a]`

zwraca listę bez pierwszego elementu

- `tail (x:xs) = xs`
- `tail [] = error "empty list"`

- `last::[a] → a`

zwraca ostatni element listy

- `last [x] = x`
- `last (x:xs) = last xs`
- `last [] = error "empty list"`

- `filter::(a → Bool) → [a] → [a]`

- `filter p [] = []`
- `filter p (x:xs) = if p x then x : filter p xs else filter p xs`
- `filter (n → n>0) [-1,2,-3,4] = [2,4]`
- `filter even [1..10] = [2,4,6,8,10]`

Jak zdefiniować funkcje filter:

```
filter p [] = []
filter p (x:xs)
  | p x = x : filter p xs
  | otherwise = filter p xs
```

- `map::(a → b) → [a] → [b]`

zwraca listę, która powstaje zastosowaniem funkcji do każdego elementu listy

- `map f [] = []`
- `map f (x:xs) = f x : map f xs`

- $\text{map } (n \rightarrow n^2) [1,2,3] = [1,4,9]$
- $\text{map } (n \rightarrow n^3) [1..10] = [1..1000]$

gdzie $[1..10]$ to skrót od $[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]$

2.3.3 List comprehension

Polega na tworzeniu listy na podstawie innych list.

$$[f x_1, x_2, x_3 \mid x_1 \leftarrow xs, x_2 \leftarrow ys, x_3 \leftarrow zs]$$

Przykład:

- chcemy stworzyć listę wszystkich trójek pitagorejskich poniżej liczby n.

```
pitagorasTrzy n = [(x,y,z) | x <- [1..n], y <- [1..n], z <- [1..n],
                          x^2 + y^2 == z^2, gcd xy == 1]
```

3 Wykład 18-03-2025

3.1 implementacje funkcji w Haskellu

3.1.1 QuickSort

w tej implementacji za *pivot* przyjmujemy pierwszy element listy.

```
qS [] = []
qS (x:xs) = (qS [y | y <- xs, y < x]) ++
            [x] ++
            (qS [y | y <- xs, y >= x])
```

3.1.2 partition

```
partition :: (a->Bool) -> [a] -> ([a],[a])
partition _ [] = ([],[])
partition p (x:xs) = if p x then (x:l,r)
                      else (l,x:r)
                      where (l,r) = partition p xs
```

3.1.3 Lepsza implementacja QuickSort'a

```
qSort [] = []
qSort (x:xs) = (qSort l) ++ [x] ++ (qSort r)
               where (l,r) = partition (<x) xs
```

wyrażenie $(<x)$ jest zastosowaniem *slicingu*. Działa to następująco:

$$(<x) \equiv \lambda y \rightarrow y < x$$

3.1.4 InsertSort

```
inSort [] = []
inSort (x:xs) = l ++ [x] ++ r
                where sxs = inSort xs
                      (l,r) = partition (<x) sxs
```

Aby sprawdzić prędkość wykonywania funkcji w Haskellu możemy użyć następującej funkcji

```
>:set +s
>take 10 (inSort [1000,999..1])
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
(0.02 secs, 5,499,824 bytes)
```

3.1.5 zip

Powtórka z ćwiczen *Zadanie 10* [8.1.10](#)

3.1.6 zipWith

Podobnie znowu napisane na ćwiczeniach [8.1.10](#)

3.1.7 funkcje wykonujące operacje na listach

funkcja sumująca:

```
sumList [] = 0
sumList (x:xs) = x + sumList xs

> sumList [1..1000]
500500
```

funkcja mnożąca:

```
pro [] = 1
pro (x:xs) = x * pro xs

>pro [1..9]
362880
```

teraz abstrahując ten koncept możemy napisać funkcję *foldl*¹, która działa na danym monoidzie $M = (M, \cdot, e)$

```
foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
foldl' op e [] = e
foldl' op e (x:xs) = op x (foldl' op e xs)

ghci> foldl' (*) 1 [1..10]
3628800
ghci> foldl' (+) 1 [1..10]
56
ghci> foldl' (+) 0 [1..10]
55
ghci> foldl' (*) 0 [1..10]
0
```

¹jest to operacja składająca liste w następujący sposób $((e \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot x_3 \dots \cdot x_n$, istnieje analogiczna *foldr* działająca odwrotnie $x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot \dots (x_n \cdot e)))$

4 Wykład 25-03-2025

4.1 Krótki wstęp o automatach

4.1.1 Deterministyczne, skończone automaty

Jak działają automaty? Automat składa się z:

$$\mathbb{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F), \Sigma$$

gdzie Q to zbiór stanów, Σ to alfabet, δ to funkcja przejścia, q_0 to stan początkowy, a F to zbiór stanów końcowych.

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$$

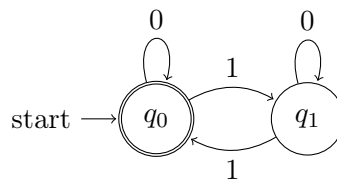
$$q_0 \in Q, F \subseteq Q$$

Jak wygląda to w Haskellu:

```
delta :: s -> c -> s
acc  :: s -> Bool

runDFA :: (s -> c -> s) -> s -> [c] -> s -- run Deterministic Finite Automat
runDFA delta start cs = foldl delta start cs
runDFA = foldl -- pożądniejsza definicja
```

Zobaczmy działanie na prostym przykładzie automatu sprawdzającego parzystość liczby binarnej:



Można odpalić ten automat w następujący sposób:

```
>runDFA delta q0 "10101"
False
>runDFA delta q0 "101010"
True
```

4.1.2 Niedeterministyczne, skończone automaty

Automat niedeterministyczny składa się z:

$$\mathbb{A} = (S, \delta, s_0, F)$$

gdzie S to zbiór stanów, δ to funkcja przejścia, s_0 to stan początkowy, a F to zbiór stanów końcowych.

$$\delta : S \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(S)$$

5 Wykład 2025-04-01

Dzisiaj będziemy omawiać strukturę rekordów w języku Haskell

5.1 Struktura

Weźmy na przykład strukturę reprezentującą osobę:

```
dataOsoba = {  
    id0 :: Int,  
    imie :: String,  
    nazwisko :: String,  
    rokUrodzenia :: Int,  
    miesiacUrodzenia :: Int,  
    dzienUrodzenia :: Int  
} deriving (Show)
```

deklaracja rekordu w Haskellu wygląda następująco:

```
aaa = Osoba {  
    id0 = 1,  
    imie = "Jan",  
    nazwisko = "Kowalski",  
    rokUrodzenia = 2000,  
    miesiacUrodzenia = 1,  
    dzienUrodzenia = 1  
}
```

Poprzez *deriving (Show)* mówimy, że chcemy aby nasz rekord mógł być wyświetlany w konsoli. Haskell automatycznie tworzy te funkcje dla nas.

```
>dzienUrodzenia aaa  
1  
>aaa {dzienUrodzenia = 2}  
Osoba {id0 = 1, imie = "Jan", nazwisko = "Kowalski", rokUrodzenia = 2000, miesiacUrodzenia = 1,
```

Ale jest to nie elegancki sposób deklaracji rekordu, jeżeli chodzi o typ daty. Możemy zaciągnąć z jakiegoś modułu gotowy typ danych:

```
import Data.Time  
data Osoba = {  
    id0 :: Int,  
    imie :: String,  
    nazwisko :: String,  
    dataUrodzenia :: Date  
} deriving (Show)
```

Napiszmy teraz funkcję zmieniającą rok urodzin, korzystając z tego co zostało napisane do tej pory

```
zmienRok :: Osoba -> Int -> Osoba  
zmienRok osoba nowyRok =  
    osoba {dataUrodzenia = (dataUrodzenia osoba) {year = nowyRok}}
```

Później w ramach tego typu problemów omówimy typ *lenses*.

5.2 Typy parametryzowalne

Zobaczmy najpierw jak wygląda zapis pary w języku matematyki:

$$P(X) = X \times X$$

$$\begin{aligned}
f &: \text{Int} \rightarrow \text{String} \\
\tilde{f} &: \text{Int} \times \text{Int} \rightarrow \text{String} \times \text{String} \\
\tilde{f}(x, y) &= (f(x), f(y))
\end{aligned}$$

5.3 Funkturo Maybe

Myślimy o takim przekształceniu MB od słowa *Maybe*:

$$MB(X) = X \cup \{\uparrow_X\}$$

gdzie \uparrow_X to symbol oznaczający brak wartości *Nothing*, definiujemy to tak:

$$\begin{aligned}
\uparrow_X &\notin X \\
\uparrow_X &\notin \text{Maybe}(X) \\
\uparrow_X &\notin \text{Maybe}(X) \setminus X \\
XY &\implies \uparrow_X \neq \uparrow_Y
\end{aligned}$$

Możemy wykozystać tę konstrukcję w Haskellu:

```
safeHead :: [a] -> Maybe a
safeHead [] = Nothing
safeHead (x:_) = Just x
```

```
safeSqrt :: Double -> Maybe Double
safeSqrt x
  | x < 0 = Nothing
  | otherwise = Just (sqrt x)
```

```
safeLog :: Double -> Maybe Double
safeLog x
  | x <= 0 = Nothing
  | otherwise = Just (log x)
```

```
safeDiv x 0 = Nothing
safeDiv x y = Just (x/y)
```

Teraz zaczynamy partyzantkę z *Maybe*:

```
composeMB :: (a -> Maybe b) -> (b -> Maybe c) -> (a -> Maybe c)
composeMB f g x = case f x of
  Nothing -> Nothing
  Just y -> g y
```

Zobaczmy to teraz na przykładzie

```
expr1 = composeMB safeLog safeSqrt

>expr1 (exp 1)
Just 1.0
>expr1 ((exp 1)^4)
Just 2.0
>expr1 0.5
Nothing
```

Inny przykład:

```
composeMB2 :: (a -> b -> Maybe c) -> Maybe a -> Maybe b -> Maybe c
composeMB2 _ Nothing _ = Nothing
composeMB2 _ _ Nothing = Nothing
composeMB2 f (Just x) (Just y) = f x y
```

I na przykładzie

```
expr2 x = let sn = safeSqrt x
           ln = safeLog (x^2-4)
           in composeMB2 safeDiv sn ln
```

```
>expr2 5
Just 0.7344560676556667
>expr2 2
Nothing
```

Fachowo mówi się, że zanurzamy te funkcje w konstruktor *Maybe*.

5.4 Funktor

Zastanówmy się nad konstruktorem typów $F : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$. Kilka przykładów takich konstruktorów:

$$\mathcal{P}(X) = X \times X$$

$$MB(X) = X \cup \{\uparrow_X\}$$

$$L(X) = [X]$$

Funktor: taki konstruktor typów F , że dla każdego $f : X \rightarrow Y$ istnieje funkcja $F[f] : F(X) \rightarrow F(Y)$, która spełnia następujące warunki:

- $F[\text{id}_X] = \text{id}_{F(X)}$
- $F[f \circ g] = F[f] \circ F[g]$

Przykłady funktorów:

•

$$f : X \rightarrow Y$$

$$\tilde{\mathcal{P}}[f](x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2))$$

jak to działa?

$$\tilde{\mathcal{P}}(X) \xrightarrow{\tilde{\mathcal{P}}[f]} \tilde{\mathcal{P}}(Y)$$

•

$$f : X \rightarrow Y$$

$$MB[f]$$

jak to działa?

zastąpmy `pmap` bardziej ogólnym pojęciem *funktor*:

```
instance Functor Para where
  fmap f (Para (x,y)) = Para (f x, f y)
```

5.5 Big Data – “Hello World”

Rozważmy problem policzenia najczęściej występujących słów w tekście. Mamy podany tekst, który interpretujemy jako *String*. Napišmy taki program i po drodze zastanawiamy się co będzie potrzebne

```
module HelloBDWorld where

import Data.List (words, group, sort, sortBy)
import Data.Char (toLower)
import SWEng -- StopWordsEnglish
import Control.Monad
```

należy usunąć z tekstu coś co nazywa się *stop-words* np to, anything itp., oraz inne śmieci np znaki interpunkcyjne oraz w pewnym momencie jednoliterówki

Również należy zamienić wszystkie wielkie litery na małe.

```
oczyszcTxt :: String [String]
oczyszcTxt = map (map toLower) . filter (not . flip elem stopWords) . words
```

podziel słowa na grupy i posortuj je

```
grupuj :: [String] -> [(String, Int)]
grupuj = map (\xs -> (head xs, length xs)) . group . sort
```

posortuj słowa według ilości ich wystąpień

```
sortuj :: [(String, Int)] -> [(String, Int)]
sortuj = sortBy (\(_,n1) (_,n2) -> compare n2 n1)
```

i na koniec podaj liste najczestszych słow

```
najczestsze :: String -> [(String, Int)]
najczestsze = sortuj . grupuj . oczyszcTxt
```

```
> najczestsze "Hello World! Hello Haskell!"
[("hello",2),("world",1),("haskell",1)]
```

6 Wykład 2025-04-08

6.1 Elementy teorii kategorii

6.1.1 Definicja Kategorii

Kategoria \mathcal{C} składa się z:

- obiekty $ob(\mathcal{C})$
- morfizmy $mor(\mathcal{C})$:

$$f \in mor(\mathcal{C}) \implies dom(f), codom(f) \in ob(\mathcal{C})$$

zapisujemy to jako:

$$\mathcal{C} \models (f : A \rightarrow B)$$

albo

$$\mathcal{C} \models (A \xrightarrow{f} B)$$

- złożenie morfizmów:

$$\mathcal{C} \models (f : A \rightarrow B) \wedge (g : B \rightarrow C) \implies g \circ f : A \rightarrow C$$

Przy założeniu, że złożenie \circ jest łączne

- identyfikacja morfizmu:

$$\forall X \in ob(\mathcal{C}) : \exists id_X : X \rightarrow X$$

jest dokładnie jeden morfizm, który jest identyfikacją. Spełnia on warunki:

–

$$\forall f : A \rightarrow B \implies id_B \circ f = f$$

–

$$\forall f : A \rightarrow B \implies f \circ id_A = f$$

- *Set*:

- obiekty \equiv zbiory
- morfizmy $\equiv (A, f, B)$, gdzie $f : A \rightarrow B$ jest funkcją

- *Grp*:

- obiekty \equiv grupy
- morfizmy $\equiv (\mathcal{G}_1, \varphi, \mathcal{G}_2)$, gdzie $\varphi : \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\text{homomorfizm}} \mathcal{G}_2$ jest homomorfizmem grup

- *Cat*(\mathcal{X}):

- obiekty \equiv elementy \mathcal{X}
- morfizmy $\equiv \left((x \xrightarrow{\alpha} y) \equiv x \leq y \right)$ oraz $\left(x \xrightarrow{\beta} y, y \xrightarrow{\beta} z \right) \equiv \left(x \xrightarrow{\alpha \circ \beta} z \right)$

Def

Obiekt c jest końcowy w \mathcal{C} wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall X \in ob(\mathcal{C}) : \exists ! f : X \rightarrow c$$

Def

d jest początkowy w \mathcal{C} wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall X \in ob(\mathcal{C}) : \exists ! f : d \rightarrow X$$

W *Set* jeśli element jest początkowym, to jest to \emptyset

Def

Kategornia dualna

Niech \mathcal{C} –kategoria, wtedy \mathcal{C}^{op} , gdzie

$$\mathcal{C}^{op} \models (x \xrightarrow{f} y) \equiv \mathcal{C} \models (y \xrightarrow{f} x)$$

Inaczej

$$f \circ^{op} g \equiv g \circ f$$

6.2 Typy parametryzowalne

Def

Mamy

$$F : ob(\mathcal{C}) \rightarrow ob(\mathcal{D})$$

$$F : mor(\mathcal{C}) \rightarrow mor(\mathcal{D})$$

F jest funktorem, jeśli spełnia następujące warunki:

- $\mathcal{C} \models X \xrightarrow{f} Y \implies \mathcal{D} \models F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$
- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$
- $F(id_X) = id_{F(X)}$

7 Wykład 2025-04-15

7.1 Podstawowe konstrktorów typów danych

teoria mnogości	Haskell
$A \times B^2$	(a, b)
$A + B$	$La Rb$
B^A	$a \rightarrow b$

Przykład

```
data R a b = Reader(a -> b)
```

Możemy tutaj pomyśleć o takim funktorze:

$$F_A(X) = X^A \leftarrow \text{funtor}$$

```
data CR a b = Reader(b -> a)
```

Jest to w żargonie haskellowym nazywane predykatem Czyli:

$$CR_A(X) = A^X$$

8 Ćwiczenia

W tym miejscu będą pojawiały się notatki z laboratoriów (ćwiczeń)

8.1 Ćwiczenia 11-03-2025

8.1.1 Zadanie 1

```
power :: Int => Int => Int
power x y = y ^ x

p2 = power 4
p3 = power 3
```

1. Wyznacz w GCHI wartość wyrażenia $(p2 \circ p3)^2$ i wyjaśnij, dlaczego otrzymałeś ten wynik.
2. Zbadaj typy funkcji $p2$, $p3$ i $(p2 \circ p3)$.

3. Zapisz powyższe funkcje za pomocą wyrażeń lambda.

$$Int \rightarrow Int \rightarrow Int$$

Zapis strzałkowy definiuje nam typ funkcji operacja \Rightarrow jest wiążąca z prawej strony, więc można by było to również zapisać jako:

$$power :: Int \rightarrow (Int \rightarrow Int)$$

1. podpunkt 1

$$(p2 \circ p3)^2 = p2(p3(x))^2 = 4(3^x)^2 = 4 \cdot 9^x$$

2. podpunkt 2

```
>:t p2
p2 :: Int -> Int
>:t p3
p3 :: Int -> Int
>:t (p2 . p3)
(p2 . p3) :: Int -> Int
```

3. podpunkt 3

```
p2 = \x -> power 4 x
p3 = \x -> power 3 x
```

8.1.2 Zadanie 2

$$2 \wedge 3 \wedge 2, \quad (2 \wedge 3) \wedge 2, \quad 2 \wedge (2 \wedge 3).$$

Dowiedz się, jaka jest łączność oraz siła operatora \wedge za pomocą polecenia:

$$:i(\wedge).$$

```
>:i (^)
(^) :: (Num a, Integral b) => a -> b -> a
      -- Defined in 'GHC.Real'
infixr 8 ^
```

Operator \wedge jest prawostronnie łączny, a jego siła wynosi 8 (najwyższa możliwa wartość, wyłącznie wyższe jest nałożenie funkcji na zmienną). W nawiasie **Num a**, **Integral b** oznacza, że operator \wedge bierze jeden argument typu **Num** i drugi typu **Integral**.

$$2 \wedge 3 \wedge 2 = 2 \wedge (3 \wedge 2) = 2 \wedge 9 = 512$$

$$(2 \wedge 3) \wedge 2 = 8 \wedge 2 = 64$$

$$2 \wedge (2 \wedge 3) = 2 \wedge 8 = 256$$

8.1.3 Zadanie 3

```
f : : Int => Int
f x = x ^ 2
g : : Int => Int => Int
g x y = x+2*y
h : : . . . .
h x y = f ( g x y )
```

1. Jaki jest typ funkcji h ? (tzn. uzupełnij ... w powyższym listingu)
2. Czy $h = f \circ g$?
3. Czy $h x = f(g x)$?

-
1. Typ funkcji h to:

$$h :: Int \rightarrow Int \rightarrow Int$$

2. Nie, ponieważ:

$$h(x, y) = f(g(x, y)) = f(x + 2y) = (x + 2y)^2$$

3. Tak, ponieważ:

$$h(x) = f(g(x)) = f(x + 2x) = (x + 2x)^2 = 9x^2$$

8.1.4 Zadanie 4

Zapisz operacje binarne (+), (*) za pomocą lambda wyrażeń.

```
add = \x -> (\y -> x + y)
mul = \x -> (\y -> x * y)
```

Co to daje? Można teraz zapisać 2+3 jako:

- add 2 3
- (add 2) 3
- add 2 (3)
- (\$3) (2 add)

8.1.5 Zadanie 5

Zapisz funkcje:

$$f(x) = 1 + x \cdot (x + 1), \quad g(x, y) = x + y^2, \quad h(y, x) = x + y^2$$

za pomocą lambda wyrażeń w językach C++, Python, JavaScript oraz Haskell.

W języku Haskell:

```
f = \x -> 1 + x * (x + 1)
g = \x -> \y -> x + y^2
h = \y -> \x -> x + y^2
```


W języku Python:

```
f = lambda x: 1 + x * (x + 1)
g = lambda x, y: x + y**2
h = lambda y, x: x + y**2
```

W języku JavaScript:

```
f = x => 1 + x * (x + 1)
g = (x, y) => x + y**2
h = (y, x) => x + y**2
```

W języku C++:

```
auto f = [](int x) { return 1 + x * (x + 1); };
auto g = [](int x, int y) { return x + y*y; };
auto h = [](int y, int x) { return x + y*y; };
```

8.1.6 Zadanie 6

Ustalmy zbiory A, B, C . Niech

$$\text{curry} : C^{B \times A} \rightarrow (C^B)^A$$

będzie funkcją zadaną wzorem:

$$\text{curry}(\varphi) = \lambda a \in A \rightarrow (\lambda b \in B \rightarrow \varphi(b, a)).$$

oraz niech

$$\text{uncurry} : (C^B)^A \rightarrow C^{B \times A}$$

będzie zadaną wzorem:

$$\text{uncurry}(\psi)(b, a) = (\psi(a))(b).$$

1. Pokaż, że $\text{curry} \circ \text{uncurry} = \text{id}_{(C^B)^A}$ oraz $\text{uncurry} \circ \text{curry} = \text{id}_{C^{B \times A}}$.
2. Wywnioskuj z tego, że $|(C^B)^A| = |C^{B \times A}|$. Przypomnij sobie dowód tego twierdzenia, który poznałeś na pierwszym semestrze studiów.
3. Spróbuj zdefiniować w języku Haskell odpowiedniki funkcji **curry** i **uncurry**.

-
1. Pokażemy, że $\text{curry} \circ \text{uncurry} = \text{id}_{(C^B)^A}$ oraz $\text{uncurry} \circ \text{curry} = \text{id}_{C^{B \times A}}$.

- $\text{curry} \circ \text{uncurry}$

$$\begin{aligned} (\text{curry} \circ \text{uncurry})(\psi) &= \text{curry}(\text{uncurry}(\psi)) \\ &= \text{curry}(\lambda a \in A \rightarrow (\lambda b \in B \rightarrow \psi(a)(b))) \\ &= \lambda a \in A \rightarrow (\lambda b \in B \rightarrow \psi(a)(b)). \end{aligned} \tag{1}$$

- $\text{uncurry} \circ \text{curry}$

$$\begin{aligned} (\text{uncurry} \circ \text{curry})(\varphi) &= \text{uncurry}(\text{curry}(\varphi)) \\ &= \text{uncurry}(\lambda a \in A \rightarrow (\lambda b \in B \rightarrow \varphi(b, a))) \\ &= \lambda b \in B \rightarrow (\lambda a \in A \rightarrow \varphi(b, a)). \end{aligned} \tag{2}$$

Z powyższych równań wynika, że $\text{curry} \circ \text{uncurry} = \text{id}_{(C^B)^A}$ oraz $\text{uncurry} \circ \text{curry} = \text{id}_{C^{B \times A}}$. \square

2. Możemy pokazać że **curry** i **uncurry** są iniekcjami niewprost, nakładając odpowiednio przeciwne funkcje na obie strony równości:

- Załóżmy, że $\text{curry}(\varphi_1) = \text{curry}(\varphi_2)$. Wtedy:

$$\begin{aligned}\text{curry}(\varphi_1)(a)(b) &= \text{curry}(\varphi_2)(a)(b) \\ \varphi_1(b, a) &= \varphi_2(b, a) \\ \varphi_1 &= \varphi_2.\end{aligned}\tag{3}$$

- Załóżmy, że $\text{uncurry}(\psi_1) = \text{uncurry}(\psi_2)$. Wtedy:

$$\begin{aligned}\text{uncurry}(\psi_1)(b, a) &= \text{uncurry}(\psi_2)(b, a) \\ \psi_1(a)(b) &= \psi_2(a)(b) \\ \psi_1 &= \psi_2.\end{aligned}\tag{4}$$

A więc istnieje bijekcja między $(C^B)^A$ i $C^{B \times A}$, co oznacza, że te zbiory mają taką samą moc. \square

3. W języku Haskell funkcje **curry** i **uncurry** można zdefiniować następująco:

```
curry :: ((b, a) -> c) -> a -> b -> c
curry f x y = f (y, x)
```

```
uncurry :: (a -> b -> c) -> (a, b) -> c
uncurry f (x, y) = f x y
```

8.1.7 Zadanie 7

Podaj przykłady funkcji następujących typów:

$$(\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow \text{Int}$$

$$(\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow (\text{Int} \Rightarrow \text{Int})$$

$$(\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow (\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow (\text{Int} \Rightarrow \text{Int})$$

- Funkcja typu $(\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow \text{Int}$:

```
f :: (Int -> Int) -> Int
f g = g 0
```

- Funkcja typu $(\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow (\text{Int} \Rightarrow \text{Int})$:

```
f :: (Int -> Int) -> (Int -> Int)
f g x = g (g x)
```

- Funkcja typu $(\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow (\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow (\text{Int} \Rightarrow \text{Int})$:

```
f :: (Int -> Int) -> (Int -> Int) -> (Int -> Int)
f g h x = g (h x)
```

8.1.8 Zadanie 8

Załóżmy, że chcesz oprogramować funkcję, która dla danych liczb a, b oraz funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oblicza

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Jaki powinien być typ tej funkcji?

Typ tej funkcji powinien być następujący:

$$\text{Num}(a) \implies a \rightarrow a \rightarrow (a \rightarrow a) \rightarrow a$$

mogłaby ona wyglądać następująco:

```
integral :: (Double -> Double) -> Double -> Double -> Double
integral f a b = undefined
```

8.1.9 Zadanie 9 – (Eliminacja Pętli)

Wybierz jeden z języków Python, C++ lub JavaScript.

1. Masz daną (czyli oprogramowaną) funkcję $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Oprogramuj funkcję, która dla danego $n \in \mathbb{N}$ oblicza

$$\sum_{k=0}^n f(k).$$

Zrób to najpierw (standardowo) za pomocą pętli, a potem oprogramuj ją bez użycia pętli, za pomocą rekursji.

2. Rozważamy następującą funkcję napisaną w pseudokodzie:

```
FUNCTION f(x: DOUBLE): DOUBLE
BEGIN
    DOUBLE y = sin(x);
    RETURN y*y + y + x;
ENDFNC
```

Oprogramuj tę funkcję w wybranym języku i następnie wyeliminuj zmienną lokalną y z tego kodu, bez pogarszania jego efektywności.

-
1. Oto rozwiązanie w języku C++:

```
#include <iostream>
using namespace std;

// Example implementation of function f: N -> N.
// You can replace this with any function of type int -> int.
int f(int x) {
    // Example: f(x) = x + 1
    return x + 1;
}

// Function that sums using a loop:
```

```

int sumLoop(int n) {
    int sum = 0;
    for (int k = 0; k <= n; ++k) {
        sum += f(k);
    }
    return sum;
}

// Function that sums using recursion:
int sumRec(int n) {
    if(n == 0)
        return f(0);
    else
        return sumRec(n - 1) + f(n);
}

int main() {
    int n;
    cout << "Enter_n:_";
    cin >> n;
    cout << "Sum_computed_with_loop:_ " << sumLoop(n) << endl;
    cout << "Sum_computed_recursively:_ " << sumRec(n) << endl;
    return 0;
}

```

funkcja `sumLoop` oblicza sumę za pomocą pętli, a funkcja `sumRec` oblicza sumę rekurencyjnie.

$$\text{sumRec}(n) = \begin{cases} f(0) & \text{gdy } n = 0 \\ \text{sumRec}(n-1) + f(n) & \text{gdy } n > 0 \end{cases}$$

2. Rozwiązanie w Haskellu:

```

f :: Double -> Double
f x = sin x * sin x + sin x + x

```

```

f' :: Double -> Double
f' x = sin x * sin x + sin x + x

```

8.1.10 Zadanie 10

Zaimplementuj samodzielnie następujące funkcje działające na listach z Prelude:

1. `map`
2. `zip`
3. `zipWith`
4. `filter`
5. `take`
6. `drop`
7. `fib`

1. Funkcja `map`:

```
map' :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map' f [] = []
map' f (x:xs) = f x : map' f xs
```

2. Funkcja `zip`³:

```
zip' :: [a] -> [b] -> [(a, b)]
zip' [] _ = []
zip' _ [] = []
zip' (x:xs) (y:ys) = (x, y) : zip' xs ys
```

3. Funkcja `zipWith`⁴:

```
zipWith' :: (a -> b -> c) -> [a] -> [b] -> [c]
zipWith' _ [] _ = []
zipWith' _ _ [] = []
zipWith' f (x:xs) (y:ys) = f x y : zipWith' f xs ys
```

4. Funkcja `filter`⁵:

```
filter' :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
filter' _ [] = []
filter' p (x:xs)
  | p x = x : filter' p xs
  | otherwise = filter' p xs
```

5. Funkcja `take`⁶:

```
take' :: Int -> [a] -> [a]
take' 0 _ = []
take' _ [] = []
take' n (x:xs) = x : take' (n - 1) xs
```

6. Funkcja `drop`⁷:

```
drop' :: Int -> [a] -> [a]
drop' 0 xs = xs
drop' _ [] = []
drop' n (_:xs) = drop' (n - 1) xs
```

7. Funkcja `fib`⁸:

³Funkcja `zip` zwraca listę par, które są złożone z elementów listy wejściowej. Jeśli jedna z list jest krótsza, to wynikowa lista będzie miała długość krótszej z nich.

Przykład: `zip [1,2,3] ['a','b','c','d']` zwróci `[(1,'a'),(2,'b'),(3,'c')]`.

⁴Funkcja `zipWith` działa podobnie jak `zip`, ale zamiast zwracać parę elementów, zwraca wynik funkcji, która jest podana jako argument.

Przykład: `zipWith (+) [1,2,3] [4,5,6]` zwróci `[5,7,9]`.

⁵Funkcja `filter` zwraca listę elementów, które spełniają warunek podany jako argument.

Przykład: `filter even [1..10]` zwróci `[2,4,6,8,10]`.

⁶Funkcja `take` zwraca listę składającą się z n pierwszych elementów listy wejściowej.

Przykład: `take 3 [1,2,3,4,5]` zwróci `[1,2,3]`.

⁷Funkcja `drop` zwraca listę, która jest wynikiem usunięcia n pierwszych elementów z listy wejściowej.

Przykład: `drop 3 [1,2,3,4,5]` zwróci `[4,5]`.

⁸Funkcja `fib` zwraca listę liczb Fibonacciego do n -tego elementu.

```

fib :: Int -> [Int]
fib n = take' n (map' fib' [0..])
  where
    fib' 0 = 0
    fib' 1 = 1
    fib' n = fib (n - 1) + fib (n - 2)

```

Fajne złożenie funkcji `fib` z `zipWith`:

```

fib :: [Int]
fib = 0 : 1 : zipWith (+) fib (tail fib)

```

co pozwala na generowanie listy liczb Fibonacciego w nieskończoność. Na przykład `take 10 fib` zwróci `[0,1,1,2,3,5,8,13,21,34]`.

8.1.11 Zadanie 11

Niech $f = (2^{\wedge})$ oraz $g = (\wedge 2)$. Podaj interpretację tych funkcji.

Sprawdź wartości wyrażenia:

`map ($\wedge 2$) [1..10]` oraz `map (2^{\wedge}) [1..10]`

i wyjaśnij otrzymane wyniki.

Funkcja $f = (2^{\wedge})$ podnosi liczbę do kwadratu, a funkcja $g = (\wedge 2)$ podnosi 2 do potęgi danej liczby.

```

> map (^ 2) [1..10]
[1,4,9,16,25,36,49,64,81,100]
> map (2 ^) [1..10]
[2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024]

```

8.1.12 Zadanie 12

Dowiedz się, jak można przekonwertować elementy typu `Int` oraz `Integer` na typy `Float` i `Double`. Dowiedz się, jaki jest format funkcji typu `round` z `Double` do `Int`.

- Konwersja z `Int` na `Float`:

```
fromIntegral :: (Integral a, Num b) => a -> b
```

- Konwersja z `Int` na `Double`:

```
fromIntegral :: (Integral a, Num b) => a -> b
```

- Konwersja z `Integer` na `Float`:

```
fromInteger :: Num a => Integer -> a
```

- Konwersja z `Integer` na `Double`:

```
fromInteger :: Num a => Integer -> a
```

- Funkcja `round` z `Double` na `Int`:

```
round :: (RealFrac a, Integral b) => a -> b
```

8.2 Elementy Teorii Liczb

Trochę teorii liczb, bo czemu nie?

8.2.1 Zadanie 13

Funkcję Eulera φ nazywamy funkcją określoną wzorem:

$$\varphi(n) = \text{card}(\{k \leq n : \gcd(k, n) = 1\}), \quad (5)$$

o dziedzinie \mathbb{N}^+ .

1. Oprogramuj funkcję φ (funkcja gcd jest dostępna w bibliotece **Prelude**).
2. Napisz funkcję, która dla danej liczby naturalnej n wyznacza sumę:

$$\sum_{k|n} \varphi(k).$$

-
1. Oto implementacja funkcji φ w języku Haskell:

```
phi :: Int -> Int
phi n = length [k | k <- [1..n], gcd k n == 1]

> phi 10
4
```

2. Oto implementacja funkcji, która wyznacza sumę $\sum_{k|n} \varphi(k)$:

```
sumPhi :: Int -> Int
sumPhi n = sum [phi k | k <- [1..n], n `mod` k == 0]

> sumPhi 10
10
```

Funkcja sumPhi jest identycznością na \mathbb{N}^+ . Można zapisać to jako:

$$n = N(n) = \sum_{k|n} \varphi(k) \cdot \underbrace{I\left(\frac{n}{k}\right)}_{\equiv 1}$$

8.2.2 Zadanie 14

Liczbę naturalną n nazywamy *doskonałą*, jeżeli spełnia warunek:

$$n = \sum \{d : 1 \leq d < n \wedge d | n\}. \quad (6)$$

Na przykład liczba 6 jest liczbą doskonałą, ponieważ:

$$6 = 1 + 2 + 3. \quad (7)$$

Wyznacz wszystkie liczby doskonałe mniejsze od 10 000.

Uwaga: Do tej pory nie wiadomo, czy istnieje nieskończenie wiele liczb doskonałych.

Oto implementacja funkcji, która znajduje wszystkie liczby doskonałe mniejsze od 10 000:

```

isPerfect :: Int -> Bool
isPerfect n = n == sum [d | d <- [1..n-1], n `mod` d == 0]

perfectNumbers :: [Int]
perfectNumbers = [n | n <- [1..9999], isPerfect n]

> perfectNumbers
[6,28,496,8128]

```

8.2.3 Zadanie 15

Parę liczb naturalnych (m, n) nazywamy *zaprzyjaźnionymi*, jeżeli suma dzielników właściwych każdej z nich równa się drugiej:

$$\sigma(m) - m = n, \quad \sigma(n) - n = m,$$

gdzie $\sigma(n)$ oznacza sumę wszystkich dzielników liczby n .

Znajdź wszystkie zaprzyjaźnione pary, których oba składniki są mniejsze od 10^5 .

Uwaga: Do tej pory nie wiadomo, czy istnieje nieskończenie wiele par liczb zaprzyjaźnionych.

Tak może wyglądać funkcja szukająca liczb zaprzyjaźnionych w podanym zakresie:

```

sumaDzielnikow :: Int -> Int
sumaDzielnikow 1 = 0
sumaDzielnikow n = 1 + sum [ if x * x == n then x
                             else if n `mod` x == 0 then x + (n `div` x)
                             else 0
                             | x <- [2..(floor . sqrt . fromIntegral) n], x * x <= n ]

where
    limit = (floor . sqrt . fromIntegral) n

amicablePairs :: [(Int, Int)]
amicablePairs = [ (n, m)
                  | n <- [2..maxVal-1]
                  , let m = sumaDzielnikow n
                  , m > n, m < maxVal
                  , sumaDzielnikow m == n ]

> amicablePairs
[(220,284),(1184,1210),(2620,2924),(5020,5564),(6232,6368)]

```

8.2.4 Zadanie 16

Dla $n \in \mathbb{N}^+$ definiujemy:

$$\text{dcp}(n) = \frac{1}{2n^2} |\{(k, l) \in \{1, \dots, n\} : \gcd(k, l) = 1\}|. \quad (8)$$

1. Zaimplementuj tę funkcję w języku Haskell za pomocą *list comprehension*.
2. Zoptymalizuj ten kod, pisząc rekurencyjną wersję tej funkcji.
3. Wyznacz wartości tej funkcji dla $n = 100, 200, 300, \dots, 10000$ i postaw jaką rozsądną hipotezę o:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dcp}(n). \quad (9)$$

1. Przykładowa implementacja przy użyciu *list comprehension*:

```
dcg :: Int -> Double
dcg n = 1 / (fromIntegral (n^2))
          * fromIntegral (length [(k, l)
                                   | k <- [1..n], l <- [1..n], gcd k l == 1])

> dcg 10
0.315
```

2. Optimalizacja kodu przy użyciu rekurencji:

```
dcg' :: Int -> Double
dcg' n = 1 / (fromIntegral (n^2)) * fromIntegral (dcg'' n 1 1)

dcg'' :: Int -> Int -> Int -> Int
dcg'' n k l
  | k > n      = 0
  | l > n      = dcg'' n (k + 1) 1
  | gcd k l == 1 = 1 + dcg'' n k (l + 1)
  | otherwise  = dcg'' n k (l + 1)

> dcg' 10
0.315
```

3. Wyznaczenie wartości funkcji dla $n = 100, 200, 300, \dots, 10000$:

```
dcgValues :: [Double]
dcgValues = [dcg' n | n <- [100, 200..10000]]

> dcgValues
[0.6087,0.611575,0.6088333333333333,0.60846875,0.608924,
0.6083305555555556,0.608234693877551,0.6085921875,0.6082111111111111,
0.608383,0.6084586776859504,0.6080354166666667,0.6080988165680473,
0.6082525510204081,0.6081613333333333,0.607993359375,0.6083678200692042,
0.6080601851851852,0.6080096952908588,0.60829375,0.60808231292517,
0.6079518595041322,0.6081570888468809,0.6081019097222222,0.6079608,
0.6081087278106508,0.6080426611796982,0.6079876275510203,
0.6081092746730083,0.6080416666666667,0.6080440166493236,
0.60806005859375,0.6079602387511478,0.6079895328719723,
0.6080508571428571,0.6080030092592593,0.6080139517896275,
...]
```

Na podstawie uzyskanych wartości można postawić hipotezę, że granica funkcji $dcg(n)$ dla $n \rightarrow \infty$ wynosi około 0.608... Wartość ta może być przybliżona do wartości funkcji Eulera $\frac{6}{\pi^2}$. \square Można to interpretować jako gęstość liczb względnie pierwszych w zbiorze $\{1, \dots, n\}$, ale jako iż bierzemy symetrię względem 0 to wartość ta jest podwojona. Jednocześnie wynika to bezpośrednio z funkcji Zeta Riemanna $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

8.3 Listy – część 1.

Na początku tych zadań należało zastanowić się nad implementacją istniejących już funkcji z Prelude, a następnie zaimplementować je samodzielnie.

8.3.1 Zadanie 17

Napisz funkcję `nub`, która usunie z listy wszystkie duplikaty, np.

```
nub [1,1,2,2,2,1,4,1] == [1,2,4]
```

Oto implementacja funkcji `nub` w języku Haskell:

```
nub' :: (Eq a) => [a] -> [a]
nub' [] = []
nub' (x:xs) = x : nub' (filter (/= x) xs)
```

Jak to działa?

1. Jeśli lista pusta to zwróć pustą

```
nub' [] = []
```

2. W przeciwnym przypadku zwróć listę, której pierwszym elementem jest pierwszy element listy wejściowej (`x:xs` dzieli listę – wyciąga pierwszy element), a resztę listy tworzy rekurencyjne wywołanie funkcji `nub'` na liście, z której usunięto wszystkie wystąpienia pierwszego elementu (`filter (/= x) xs` usuwa z `xs` wszystko co jest `x`).

```
nub' (x:xs) = x : nub' (filter (/= x) xs)
```

8.3.2 Zadanie 18

Napisz funkcję `inits`, która dla danej listy wyznaczy listę wszystkich jej odcinków początkowych, np.

```
inits [1,2,3,4] == [], [1], [1,2], [1,2,3], [1,2,3,4]
```

Funkcja `inits` również powinna wykonywać się rekurencyjnie. Zabieramy po jednym elemencie i wpisujemy do listy.

```
inits' :: [a] -> [[a]]
inits' [] = [[]]
inits' (x:xs) = [] : map (x:) (inits' xs)
```

Działa to w bardzo podobny sposób jak poprzednie:

1. Jeśli lista pusta to zwróć pustą listę

```
inits' [] = [[]]
```

2. W przeciwnym przypadku narzuć mapę na wszystkie elementy listy rekurencyjne wywołanie funkcji `inits'` na liście bez pierwszego elementu, a następnie dodaj na początek każdej z tych list pierwszy element listy wejściowej

```
inits' (x:xs) = [] : map (x:) (inits' xs)
```

8.3.3 Zadanie 19

Napisz funkcję `tails`, która dla danej listy wyznaczy listę wszystkich jej odcinków początkowych, np.:

```
tails [1,2,3,4] == [[], [4], [3,4], [2,3,4], [1,2,3,4]]
```

Funkcja `tails` działa analogicznie do funkcji `inits`, ale zamiast zdejmować elementy z początku listy, zdejmuję je z końca.

```
tails' :: [a] -> [[a]]
tails' [] = [[]]
tails' (x:xs) = (x:xs) : tails' xs
```

1. Jeśli lista pusta to zwróć pustą listę

```
tails' [] = [[]]
```

2. W przeciwnym przypadku zwróć listę, której pierwszym elementem jest cała lista wejściowa, a resztę listy tworzy rekurencyjne wywołanie funkcji `tails'` na liście bez pierwszego elementu

```
tails' (x:xs) = (x:xs) : tails' xs
```

8.3.4 Zadanie 20

Napisz funkcję `splits`, która dla danej listy `xs` wyznaczy listę wszystkich par (ys, zs) takich, że

```
xs == ys++zs
```

Funkcja `splits` powinna zwracać listę par, które są wynikiem podziału listy wejściowej na dwie części. Warto zauważyć, że dla każdego elementu listy wejściowej można zrobić podział na dwie części: jedną z elementem i drugą bez niego. W ten sposób można zrobić wszystkie możliwe podziały listy.

```
splits' :: [a] -> [(a, [a])]
splits' [] = [([], [])]
splits' (x:xs) = ([], x:xs) : [(x:ys, zs) | (ys, zs) <- splits' xs]
```

1. Jeśli lista pusta to zwróć listę, której jedynym elementem jest para pustych list

```
splits' [] = [([], [])]
```

2. W przeciwnym przypadku zwróć listę, której pierwszym elementem jest para pustej listy i listy wejściowej, a resztę listy tworzą pary, które są wynikiem rekurencyjnego wywołania funkcji `splits'` na liście bez pierwszego elementu

```
splits' (x:xs) = ([], x:xs) : [(x:ys, zs) | (ys, zs) <- splits' xs]
```

8.3.5 Zadanie 21

Oto jedna z możliwych implementacji funkcji `partition`:

```
partition :: (a => Bool) => [a] => ([a], [a])
partition p xs = (filter p xs , filter (not . p) xs)
```

Ulepsz implementację tej funkcji: powinna zwracać ten sam wynik, ale powinna przechodzić przez listę tylko raz.

Oto ulepszona implementacja funkcji `partition`: funkcja `partition'` przechodzi przez listę tylko raz, dzięki użyciu akumulatorów.

```
partition' :: (a -> Bool) -> [a] -> ([a], [a])
partition' p xs = partition'' p xs [] []

partition'' :: (a -> Bool) -> [a] -> [a] -> [a] -> ([a], [a])
partition'' _ [] ys zs = (ys, zs)
partition'' p (x:xs) ys zs
  | p x = partition'' p xs (ys ++ [x]) zs
  | otherwise = partition'' p xs ys (zs ++ [x])
```

1. Jeśli lista pusta to zwróć parę list `ys` i `zs`

```
partition'' _ [] ys zs = (ys, zs)
```

2. W przeciwnym przypadku jeśli warunek `p` jest spełniony to dodaj element do listy `ys` i rekurencyjnie wywołaj funkcję `partition''` na reszcie listy, a jeśli nie to dodaj element do listy `zs` i rekurencyjnie wywołaj funkcję `partition''` na reszcie listy

```
partition'' p (x:xs) ys zs = ...
```

Przykładowe wywołanie:

```
> partition' even [1..10]
([2,4,6,8,10],[1,3,5,7,9])
```

8.3.6 Zadanie 22

Zaimplementuj samodzielnie funkcję `permutations` (znajduje się ona w module `Data.List`), która dla danej listy wyznaczy listę wszystkich jej permutacji (możemy założyć, że wszystkie elementy listy wejściowej są różne).

Oto implementacja funkcji `permutations` w języku Haskell:

```
permutations' :: [a] -> [[a]]
permutations' [] = [[]]
permutations' (x:xs) = [ys ++ [x] ++ zs | perm <- permutations' xs,
                                     (ys, zs) <- splits' perm]
```

1. Jeśli lista pusta to zwróć listę, której jedynym elementem jest pusta lista

```
permutations' [] = [[]]
```

2. W przeciwnym przypadku zwróć listę, której elementami są wszystkie możliwe permutacje listy wejściowej, które powstają przez dodanie elementu `x` na różne pozycje w permutacjach listy bez pierwszego elementu

```
permutations' (x:xs) = [ys ++ [x] ++ zs
  | perm <- permutations' xs, (ys, zs) <- splits' perm]
```

8.3.7 Zadanie 23 – Klasyczny Problem hetmanów

Celem jest umieszczenie ośmiu hetmanów na szachownicy tak, aby żadne dwa hetmany nie atakowały się nawzajem, tj. nie mogą znajdować się w:

- tym samym rzędzie,
- tej samej kolumnie,
- tej samej przekątnej.

1. Zaimplementuj problem wyszukiwania położeń Hetmanów w Haskell'u korzystając z funkcji `permutations`.
2. Dwa rozwiązania nazywamy równoważne jeśli pierwsze z nich można otrzymać za pomocą złożenia odbicia poziomego (*reverse*) oraz odbicia pionowego (np. `map (\x -> n+1-x)`) z drugiego. Ile jest nierównoważnych poprawnych rozstawień hetmanów?

Wskazówka: Przedstaw pozycje hetmanów jako listę liczb $[1, \dots, n]$. Przykład: ciąg $[4, 2, 7, 3, 6, 8, 5, 1]$ oznacza, że hetman w pierwszej kolumnie jest w rzędzie 4, hetman w drugiej kolumnie jest w rzędzie 2 itd.

1. Oto implementacja problemu hetmanów w języku Haskell:

```
queens :: Int -> [[Int]]
queens n = filter check (permutations [1..n])
  where
    check xs = and [abs (xs !! i - xs !! j)
                     /= j - i | i <- [0..n-1], j <- [i+1..n-1]]
```

2. Aby znaleźć liczbę nierównoważnych poprawnych rozstawień hetmanów, można posłużyć się funkcją `nub` z poprzedniego zadania, która usuwa duplikaty z listy. W ten sposób można znaleźć liczbę nierównoważnych poprawnych rozstawień hetmanów.

```
unique [] = []
unique (x:xs) =
  if reverse x 'elem' xs then unique xs
  else if map (\y -> 9-y) x 'elem' xs then unique xs
  else if reverse x 'elem' map (\y -> 9-y) xs then unique xs
  else x:unique xs
```

8.3.8 Zadanie 24

Napisz funkcję, która oblicza iloma zerami (w układzie dziesiętnym) kończy się liczba $n!$.

Uwaga: taki pomysł: “mam dane n ; obliczam $n!$; zamieniam na łańcuch s ; odwracam go; liczę ilość początkowych zer” traktujemy jako kompletnie beznadziejny

Wskazówka: Jak można wyznaczyć największą potęgę liczby 5 która dzieli daną liczbę n ?

Implementacja funkcji, która oblicza ilość zer na końcu liczby $n!$ w języku Haskell:

```
zeros :: Int -> Int
zeros n = sum [n `div` (5^k) | k <- [1..n], 5^k <= n]
```

Działa to ponieważ liczba zer na końcu liczby $n!$ jest równa największej potędze liczby 5, która dzieli $n!$. Dla każdej domnożonej liczby 5 występuje przynajmniej jedna liczba 2, więc liczba zer na końcu liczby $n!$ jest równa liczbie piątek, które dzielą $n!$.

8.3.9 Zadanie 25

Ulepsz następującą “klasyczną” implementację funkcji quick-sort:

```
qs [] = []
qs (x : xs) = qs [t | t <= xs , t<=x] ++ [x] ++ qs [t | t <= xs , t>x]
```

Wskazówka: Czy warto z rekursją schodzić do list jednoelementowych?

Oto ulepszona implementacja funkcji quickSort w języku Haskell:

```
qsort :: (Ord a) => [a] -> [a]
qsort [] = []
qsort [x] = [x] -- lista jednoelementowa również nie wymaga sortowania
qsort (x:xs) = qsort [y | y <- xs, y <= x]
               ++ [x] ++
               qsort [y | y <- xs, y > x]
```

8.3.10 Zadanie 26

Napisz funkcję isSorted :: (Ord a) => [a] -> Bool, która sprawdza, czy podany argument $[x_1, \dots, x_n]$ jest ciągiem niemalejącym, czyli czy $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.

Implementacja funkcji isSorted w języku Haskell:

```
isSorted :: (Ord a) => [a] -> Bool
isSorted [] = True
isSorted [_] = True
isSorted (x:y:xs) = x <= y && isSorted (y:xs)
```

Proste, iteracyjne sprawdzenie czy każdy element listy jest mniejszy lub równy następnemu.

8.3.11 Zadanie 27

Zaimplementuj w języku Haskell algorytm Bubble Sort.

Implementacja algorytmu Bubble Sort w języku Haskell:

```
bubbleSort :: (Ord a) => [a] -> [a]
bubbleSort xs = bubbleSort' xs (length xs)

bubbleSort' :: (Ord a) => [a] -> Int -> [a]
bubbleSort' xs 0 = xs
bubbleSort' xs n = bubbleSort' (bubble xs) (n - 1)

bubble :: (Ord a) => [a] -> [a]
bubble [x] = [x]
bubble (x:y:xs)
  | x > y = y : bubble (x:xs)
  | otherwise = x : bubble (y:xs)
```

8.3.12 Zadanie 28

Typowe implementacje algorytmu **Quick Sort** sprawdzają przed wywołaniem długość listy i jeśli ma ona długość mniejszą lub równą 10, to do posortowania używają metody **Insertion Sort**. Zaimplementuj tę metodę w języku Haskell.

Implementacja algorytmu **Insertion Sort** w języku Haskell:

```
insertionSort :: (Ord a) => [a] -> [a]
insertionSort xs = foldr insert [] xs

insert :: (Ord a) => a -> [a] -> [a]
insert x [] = [x]
insert x (y:ys)
  | x <= y    = x : y : ys
  | otherwise = y : insert x ys
```

8.3.13 Zadanie 29

Oszacuj złożoność obliczeniową następującej (kiepskiej) funkcji służącej do odwracania listy:

```
rev :: [a] => [a]
rev [] = []
rev (x: xs) = (rev xs) ++ [x]
```

Złożoność obliczeniowa funkcji **rev** jest kwadratowa, ponieważ dla każdego elementu listy wywołana jest funkcja **rev** na reszcie listy, co daje złożoność $O(n^2)$.

8.3.14 Zadanie 30

Funkcja **filter** może być zdefiniowana za pomocą funkcji **map** i **concat**:

```
filter p = concat . map box
where box x =
```

Podaj definicję tej funkcji **box**.

Funkcja **filter** może być zdefiniowana za pomocą funkcji **map** i **concat** jeżeli nałożymy na każdy element listy warunek **p** i zwrócimy listę list, a następnie połączymy wszystkie te listy w jedną listę. Zatem **box** powinno zwracać listę, która zawiera tylko elementy spełniające warunek **p**.

```
filter p = concat . map box
  where box x = if p x then [x] else []
```

8.3.15 Zadanie 31

Funkcje **takeWhile** i **dropWhile** są podobne do funkcji **take** i **drop**, jednakże ich pierwszym argumentem jest funkcja boolowska zamiast liczby naturalnej. Na przykład:

- `takeWhile even [2,4,6,7,8,9] = [2,4,6]`
- `dropWhile even [2,4,6,7,8,9] = [7,8,9]`

Rekurencyjne definicje funkcji `takeWhile` i `dropWhile` w języku Haskell:

- `takeWhile`:

```
takeWhile' :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
takeWhile' _ [] = []
takeWhile' p (x:xs)
  | p x      = x : takeWhile' p xs
  | otherwise = []
```

- `dropWhile`:

```
dropWhile' :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
dropWhile' _ [] = []
dropWhile' p (x:xs)
  | p x      = dropWhile' p xs
  | otherwise = x : xs
```

8.3.16 Zadanie 32

Napisz funkcję która dla ciągu łańcuchów $[L_1, \dots, L_n]$ wyznaczy ich najdłuższy wspólny prefix.

Wskazówka: Możesz skorzystać z funkcji `transpose` z modułu `Data.List`.

Najdłuższy wspólny prefix listy łańcuchów można wyznaczyć poprzez transpozycję listy łańcuchów i zwrócenie wspólnego prefixu pierwszego łańcucha z resztą listy.

```
longestCommonPrefix :: [String] -> String
longestCommonPrefix [] = []
longestCommonPrefix xs = takeWhile allEqual (transpose xs)

allEqual :: (Eq a) => [a] -> Bool
allEqual [] = True
allEqual [x] = True
allEqual (x:y:xs) = x == y && allEqual (y:xs)
```

8.3.17 Zadanie 33

Napisz funkcję `subCard :: Int -> [a] -> [[a]]`, która dla danych parametrów k i $[x_1, \dots, x_n]$ wyznaczy wszystkie podciągi $[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$ takie, że $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

Implementacja funkcji `subCard` w języku Haskell:

```
subCard :: Int -> [a] -> [[a]]
subCard k xs = [ys | ys <- combinations k xs]

combinations :: Int -> [a] -> [[a]]
combinations 0 _ = [[]]
combinations _ [] = []
combinations k (x:xs) = map (x:) (combinations (k - 1) xs) ++ combinations k xs

> subCard 2 [1,2,3,4]
[[1,2],[1,3],[1,4],[2,3],[2,4],[3,4]]
```


Jak działa funkcja `combinations`? Funkcja `combinations` zwraca wszystkie kombinacje k -elementowe listy xs . Jeśli $k = 0$ to zwraca listę jednoelementową, której jedynym elementem jest pusta lista. Jeśli $k = 0$ to zwraca pustą listę. W przeciwnym przypadku zwraca listę, której elementami są wszystkie możliwe kombinacje k -elementowe listy bez pierwszego elementu, do których dodano pierwszy element listy, oraz wszystkie kombinacje k -elementowe listy bez pierwszego elementu.

8.4 Foldy

8.4.1 Zadanie 34

Sprawdź typy i przetestuj działanie funkcji `sum`, `product`, `all` i `any`.

Typy i działanie funkcji `sum`, `product`, `all` i `any` w języku Haskell:

```
> :t sum
sum :: (Num a) => [a] -> a

> sum [1..10]
55
```

```
> :t product
product :: (Num a) => [a] -> a

> product [1..10]
3628800
```

```
> :t all
all :: (a -> Bool) -> [a] -> Bool

> all even [2,4,6,8,9]
False
```

```
> :t any
any :: (a -> Bool) -> [a] -> Bool

> any odd [2,4,6,8,9]
True
```

8.4.2 Zadanie 35

Przetestuj działanie funkcji

1. `foldl (+) 0 xs`,
2. `foldr (+) 0 xs`,
3. `foldl1 (+) xs`,
4. `foldr1 (+) xs` oraz
5. `sum X` na dużych listach liczb X .

Wskazówka: skorzystaj z polecenia `GHCi :set +s`; w celu usunięcia wyświetlania informacji skorzystaj z polecenia `:unset +s`

Przetestuj następnie działanie funkcji `foldl'` oraz `foldr'` (znajdują się one w module `Data.List`).

1. `foldl (+) 0 xs`:

```
> foldl (+) 0 [1..10]
55
```

2. `foldr (+) 0 xs`:

```
> foldr (+) 0 [1..10]
55
```

3. `foldl1 (+) xs`:

```
> foldl1 (+) [1..10]
55
```

4. `foldr1 (+) xs`:

```
> foldr1 (+) [1..10]
55
```

5. `sum` X na dużych listach liczb X:

```
> :set +s
> sum [1..1000000]
500000500000
(0.03 secs, 88,077,128 bytes)
```

6. `foldl'` oraz `foldr'`:

```
> :module Data.List
> :set +s
> foldl' (+) 0 [1..1000000]
500000500000
(0.03 secs, 88,077,144 bytes)
> foldr' (+) 0 [1..1000000]
500000500000
```

8.4.3 Zadanie 36

Samodzielnie zaimplementuj (oraz przetestuj) funkcję `reverse` działającą w czasie liniowym. Porównaj jej skuteczność z algorytmem z Zadania 29 [8.3.13](#).

Implementacja funkcji `reverse` działającej w czasie liniowym w języku Haskell:

```
reverse' :: [a] -> [a]
reverse' = foldl (flip (:)) []
```

8.4.4 Zadanie 37

Zdefiniuj za pomocą funkcji `foldr` funkcję, które dla listy liczb $[a_1, \dots, a_n]$ oblicza ile liczb parzystych występuje w tej liście.

To tak może wyglądać:

```
countEven :: [Int] -> Int
countEven = foldr (\x acc -> if even x then acc + 1 else acc) 0
countEven = foldr ((+) . (\x -> if even x then 1 else 0)) 0
```

8.4.5 Zadanie 38

Korzystając z funkcji `foldl` napisz funkcję `dec2Int` która konwertuje ciąg cyfr na liczbę całkowitą, np. `dec2Int [1,2,1] = 121`.

Implementacja funkcji `dec2Int` w języku Haskell:

```
dec2Int :: [Int] -> Int
dec2Int xs = foldl (\acc x -> acc * 10 + x) 0 xs

> dec2Int [1,2,1]
121
```

Alternatywnie można coś ciekawego napisać przy pomocy funkcji `afib`

```
afib = 1:zipWith (-) 0:afib
...
```

8.4.6 Zadanie 39

Która z następujących równości jest prawdziwa?

1. `foldl (-) e xs = e - sum xs`
2. `foldr (-) e xs = e - sum xs`

Prawdziwa jest równość:

1. `foldl (-) e xs = e - sum xs`

Ponieważ `foldl (-) e xs` to `e - x1 - x2 - ... - xn`, a `sum xs` to `x1 + x2 + ... + xn`.

8.4.7 Zadanie 40

Dla danej listy $x_s = [x_1, \dots, x_n]$ funkcja `lmss xs` wyznacza najdłuższą listę $[x_{j_1}, \dots, x_{j_k}]$ taką, że $j_1 = 1$ oraz $x_{j_a} < x_{j_{a+1}}$ dla wszystkich $a = 1, \dots, k-1$.

Na przykład, dla ciągu `xs = [3,2,1,5,3,2,6,2,3,8]` mamy `lmss xs = [3,5,6,8]`.

`lmss` to skrót od *longest monotonically increasing subsequence*. Oto implementacja funkcji `lmss` w języku Haskell:

```
addWhenSmaller xs n = xs ++ map (++[n]) (filter (\x -> if (x==[])
    then True else last x < n) xs)

longest [x] = x
longest (x:xs) =
    if (length x > length l) then x
    else l
    where l = longest xs
```

8.4.8 Zadanie 41

Funkcja `remdupl` usuwa z listy przylegające duplikaty, np.

`remdupl [1,1,2,1,1,3,3,4,4] = [1,2,1,3,4]`. Oprogramuj tę funkcję za pomocą `foldr` lub `foldl`.

```
remdupl :: (Eq a) => [a] -> [a]
remdupl = foldr (\x acc -> if null acc
  || x /= head acc then x:acc else acc) []
```

8.4.9 Zadanie 42

Korzystając z funkcji `foldl` i `foldr` napisz funkcję `approx n` zdefiniowaną następująco

$$\text{approx}(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$$

Implementacja funkcji `approx` w języku Haskell:

```
approx :: Int -> Double
approx n = foldl (\acc k -> acc + 1 / fromIntegral (product [1..k])) 0 [1..n]

ghci> approx 100
1.7182818284590455
(0.01 secs, 774,656 bytes)
ghci> approx 1000
1.7182818284590455
(0.08 secs, 211,092,144 bytes)
ghci> approx 10000
1.7182818284590455
(34.83 secs, 227,568,464,200 bytes)
```

8.4.10 Zadanie 43

Napisz, korzystając z funkcji `foldl`, funkcję która dla ciągu liczb $[a_1, \dots, a_n]$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot a_k$$

```
altSum :: (Num a) => [a] -> a
altSum xs = foldl (\acc (k, x) -> acc + (-1)^(k+1) * x) 0 (zip [1..] xs)
```

8.4.11 Zadanie 44

Napisz funkcję która dla zadanej listy $[a_1, \dots, a_n]$ elementu typu `[Fractional a]` wyznaczy średnią arytmetyczną oraz wariancję ciągu (a_1, \dots, a_n) . Skorzystaj tylko raz z funkcji `fold`.

```

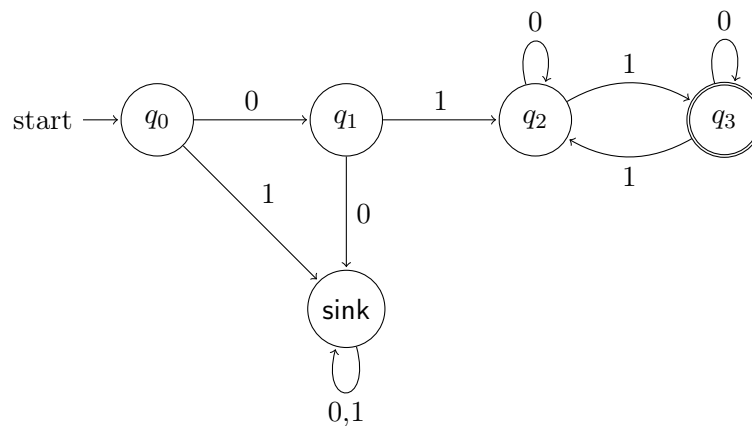
meanVar :: (Fractional a) => [a] -> (a, a)
meanVar xs = (mean, var)
  where
    (mean, var, n) = foldl (\(m, v, n) x -> (m + x, v + x^2, n + 1)) (0, 0, 0) xs
    mean = mean / fromIntegral n
    var = (var - mean^2 * fromIntegral n) / fromIntegral (n - 1)

```

8.4.12 Zadanie 45

Zaimplementuj deterministyczny automat skończony który rozpoznaje język tych zero-jedynkowych ciągów która zaczynają się od 01 i zawierają parzystą liczbę jedynek.

Rozrysujmy najpierw ten automat:



gdzie stan sink jest stanem z którego nie ma wyjścia, a stan q3 jest stanem akceptującym.

```

dfa :: String -> Bool
dfa xs = (foldl f 0 xs) == 3

f :: Int -> Int -> Int
f _ _ = -1
f 0 0 = 1
f 0 1 = -1
f 1 0 = -1
f 1 1 = 2
f 2 0 = 2
f 2 1 = 3
f 3 0 = 3
f 3 1 = 2

```

I es