

# Notatki z Algorytmów i Struktur Danych

Jakub Kogut

31 marca 2025

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>3</b>
1.1	Informacje . . . . .	3
1.2	Ocenianie . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Wykład 2025-03-03</b>	<b>3</b>
2.1	Przykładowy Problem . . . . .	3
2.2	Jak mierzyć złożoność algorytmów . . . . .	3
2.3	Przykład algorytmu . . . . .	4
2.4	Przykład działania Merge Sort . . . . .	4
2.5	Złożoność Merge Sort . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Wykład 2025-03-10</b>	<b>5</b>
3.1	Notacja Asymptotyczna . . . . .	5
3.2	Rekurencja . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Wykład 2025-03-17</b>	<b>7</b>
4.1	Drzewo rekursji . . . . .	7
4.2	Metoda iteracyjna . . . . .	8
4.3	Master Theorem . . . . .	8
4.4	Metoda dziel i zwyciężaj (D&C) . . . . .	10
4.4.1	Algorytm – Binary Search . . . . .	10
4.4.2	Algorytm – potęgowanie liczby do naturalnej potęgi . . . . .	11
4.4.3	Obliczenie n-tej liczby Fibonacciego . . . . .	11
4.4.4	Mnożenie liczb . . . . .	12
4.4.5	Mnożenie macierzy . . . . .	13
4.4.6	Quick Sort . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Wykład 2025-03-24</b>	<b>15</b>
5.1	Quick Sort . . . . .	15
5.1.1	Lemuto Partition . . . . .	15
5.1.2	Hoare Partition . . . . .	16
5.1.3	Analiza Worst Case . . . . .	17
5.1.4	Best Case Analysis . . . . .	18
5.1.5	Rozważenie przypadku mieszanego . . . . .	19
5.1.6	Average Case Analysis . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Wykład 2025-03-25</b>	<b>21</b>
6.1	Dual Pivot Quick Sort . . . . .	21
6.1.1	Strategia Count Partition . . . . .	22
6.2	Comparison Model . . . . .	22
6.2.1	Drzewo decyzyjne . . . . .	22
6.2.2	Twierdzenie . . . . .	23

6.2.3	Counting Sort . . . . .	23
6.3	Stable Sorting Property . . . . .	24
6.3.1	Radix Sort . . . . .	24
<b>7</b>	<b>Wykład 2025-03-31</b>	<b>25</b>
7.1	Definicja Statystyki Pozycyjnej . . . . .	25
7.1.1	Definicja . . . . .	25
7.1.2	Przykład . . . . .	25
7.2	Algorytm Random Select . . . . .	25
7.3	Algorytm Select . . . . .	28
<b>8</b>	<b>Ćwiczenia</b>	<b>28</b>
8.1	Lista 2 . . . . .	28
8.1.1	zadanie 1 . . . . .	28
8.1.2	zadanie 2 . . . . .	29
8.1.3	zadanie 3 . . . . .	30
8.1.4	zadanie 4 . . . . .	31
8.1.5	zadanie 5 . . . . .	32
8.1.6	zadanie 6 . . . . .	32
8.1.7	zadanie 7 . . . . .	32
8.2	Lista 3 . . . . .	33
8.2.1	zadanie 1 . . . . .	33
8.2.2	zadanie 2 . . . . .	33
8.2.3	zadanie 3 . . . . .	34
8.2.4	zadanie 4 . . . . .	35
8.2.5	zadanie 5 . . . . .	36
8.2.6	zadanie 6 . . . . .	37

# 1 Wstęp

To będą notatki z przedmiotu Algorytmy i struktury danych na Politechnice Wrocławskiej na kierunku Informatyka Algorytmiczna rok 2025 semestr letni.

## 1.1 Informacje

Prowadzący Przedmiot: **Zbychu Gołębiewski**

- Należy kontaktować się przez maila: [mail](#)
- Konsultacje **216/D1**:
  - Wtorek 13:00-15:00
  - Środa 9:00-11:00
- Więcej info na stronie [przedmiotu](#)
- Literatura
  - Algorithms, Dasgupta, Papadimitriou, Vazirani
  - Algorithms, Sedgewick, Wayne (strona internetowa książki)
  - Algorithms Designs, Jon Kleinberg and Eva Tardos
  - Wprowadzenie do algorytmów, Cormen, Leiserson, Rivest, Stein
  - Sztuka programowania (wszystkie tomy), Donald E. Knuth

## 1.2 Ocenianie

Ocena z kursu składa się z:

- Oceny z egzaminu – E
- Oceny z ćwiczeń – C
- Oceny z laboratorium – L

Wszystkie oceny są z zakresu  $[0, 100]$ . Ocena końcowa jest wyliczana ze wzoru:

$$K = \frac{1}{2}E + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}L$$

# 2 Wykład 2025-03-03

## 2.1 Przykładowy Problem

Sortowanie:

- Input:  $n$  liczb  $a_1, a_2, \dots, a_n, |A|$ , gdzie  $|A|$  to długość tablicy
- Output: permutacja  $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$  taka, że  $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

Najważniejsze w algorytmach jest to, żeby były POPRAWNE: edge case, ...

## 2.2 Jak mierzyć złożoność algorytmów

1. Worst Case Analysis  $T(n) \leftarrow$  stosowane najczęściej
2. Average Case Analysis

- zakładamy pewnienn rozkład prawdopodobieństwa na danych wejściowych
- $T$  – zmienna losowa liczby operacji wykonanych przez algorytm

$$T(n) = \max\{\#operacji \text{ dla danego wejścia}\}$$

- $E[T]$  – wartość oczekiwana  $T \rightarrow$  średnia liczba operacji, to co nas interesuje

## 2.3 Przykład algorytmu

W tej sekcji mamy pokazany przykład jak pisać pseudo kod:

---

**Algorithm 1** Merge Sort

---

```
1: procedure MERGESORT( $A, 1, n$ )
2:   if  $|A[1..n]| == 1$  then
3:     return  $A[1..n]$ 
4:   else
5:      $B = \text{MergeSort}(A, 1, \lfloor n/2 \rfloor)$ 
6:      $C = \text{MergeSort}(A, \lfloor n/2 \rfloor, n)$ 
7:     return Merge( $B, C$ )
8:   end if
9: end procedure
```

---

---

**Algorithm 2** Merge

---

```
1: procedure MERGE( $X[1..k], Y[1..n]$ )
2:   if  $X = \emptyset$  then
3:     return  $Y$ 
4:   else if  $Y = \emptyset$  then
5:     return  $X$ 
6:   else if  $X[1] \leq Y[1]$  then
7:     return  $[X[1]] \times \text{Merge}(X[2..k], Y[1..n])$ 
8:   else
9:     return  $[Y[1]] \times \text{Merge}(X[1..k], Y[2..n])$ 
10:  end if
11: end procedure
```

---

## 2.4 Przykład działania Merge Sort

**Example:** Sorting the array  $[10, 2, 5, 3, 7, 13, 1, 6]$  step by step

1. **Initial split:**

$$[10, 2, 5, 3, 7, 13, 1, 6] \longrightarrow [10, 2, 5, 3] \text{ and } [7, 13, 1, 6].$$

2. **Sort the left half**  $[10, 2, 5, 3]$ :

- (a) Split into  $[10, 2]$  and  $[5, 3]$ .
- (b) MergeSort( $[10, 2]$ ):
  - Split into  $[10]$  and  $[2]$ .
  - Each is already sorted (single element).
  - Merge:  $[2, 10]$ .
- (c) MergeSort( $[5, 3]$ ):
  - Split into  $[5]$  and  $[3]$ .
  - Each is already sorted.
  - Merge:  $[3, 5]$ .
- (d) Merge  $[2, 10]$  and  $[3, 5]$  to get  $[2, 3, 5, 10]$ .

3. **Sort the right half**  $[7, 13, 1, 6]$ :

- (a) Split into  $[7, 13]$  and  $[1, 6]$ .

(b) MergeSort([7, 13]):

- Split into [7] and [13].
- Each is already sorted.
- Merge: [7, 13].

(c) MergeSort([1, 6]):

- Split into [1] and [6].
- Each is already sorted.
- Merge: [1, 6].

(d) Merge [7, 13] and [1, 6] to get [1, 6, 7, 13].

4. **Final merge:** Merge the two sorted halves:

$$[2, 3, 5, 10] \quad \text{and} \quad [1, 6, 7, 13] \quad \longrightarrow \quad [1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 13].$$

Hence, after all the recursive splits and merges, the final sorted array is:

$$[1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 13].$$

## 2.5 Złożoność Merge Sort

- Złożoność czasowa

$$- T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

$$- T(n) = \Theta(n \log n)$$

- Złożoność pamięciowa

$$- M(n) = n + M(n/2)$$

$$- M(n) = \Theta(n)$$

## 3 Wykład 2025-03-10

### 3.1 Notacja Asymptotyczna

Na wykładzie będziemy omawiali:

- Notację dużego O  $O(n)$  //ograniczenie górne

– Definicja  $O(n)$ :

$$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

– Uwaga!

Jeśli

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$$

to

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

– Przykład:

\*  $2n^2 = O(n^3)$  dla  $n_0 = 2, c = 1$  Definicja jest spełniona

\*  $f(n) = n^3 + O(n^2)$  jest to jeden z sposobów użycia  $O(n)$

$$\exists h(n) = O(n^2) \quad \text{takie, że} \quad f(n) = n^3 + h(n)$$

- Notację omega //ograniczenie dolne

– Definicja

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)\}$$

– Przykład

$$* n^3 = \Omega(2n^2)$$

$$* n = \Omega(\log n)$$

- Notację theta  $\theta(n)$  //ograniczenie z dwóch stron

– Definicja

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists c_1, c_2 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)\}$$

– Przykład

$$* n^3 = \Theta(n^3)$$

$$* n^3 = \Theta(n^3 + 2n^2)$$

$$* \log n + 8 + \frac{1}{12n} = \Theta(\log n)$$

– Uwaga!

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = O(g(n)) \wedge f(n) = \Omega(g(n))$$

Można to zapisać jako klasy funkcji:

$$\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$$

- Patologiczny przykład: mamy funkcje  $g(n) = n$  oraz  $f(n) = n^{1+\sin \frac{\pi n}{2}}$ , a więc

$$f(n) = \begin{cases} n^2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ n & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

wtedy

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$$

zatem  $f \neq O(g)$  oraz  $g \neq O(f)$

- o małe

– Definicja

$$o(g(n)) = \{f(n) \mid \forall c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq f(n) < c \cdot g(n)\}$$

Równoważnie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

– Przykład

$$* n^2 = o(n^3) \text{ i } n^2 O(n^3) \text{ ale } n^2 \neq o(n^2)$$

$$* n = o(n^2)$$

## 3.2 Rekurencja

- Metoda podstawienia (metoda dowodu indukcyjnego)

1. Zadnij Odpowiedź (bez stałych)
2. Sprawdź przez indukcję czy odpowiedź jest poprawna
3. Wylicz stałe

– Przykład

\*  $T(n) = T(\frac{n}{2}) + n$

\* Pierwotny strzał:  $T(n) = O(n^3)$

\* cel: Pokazać, że  $\exists c > 0 : T(n) \leq c \cdot n^3$

· warunek początkowy:  $T(1) = 1 \leq c$

· krok indukcyjny: założmy, że  $\forall k \leq n : T(k) \leq ck^3$

$$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n \leq 4c(\frac{n}{2})^3 + n = \frac{1}{2}cn^3 + n \leq cn^3 \quad \text{dla } c \geq 2$$

jednakże “Przestrzeliliśmy” znacznie, spróbujmy wzmocnić założenie indukcyjne:

$$T(n) \leq c_1 k^2 - c_2 k, k < n$$

wtedy mamy:

$$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n \leq 4(c_1(\frac{n}{2})^2 - c_2(\frac{n}{2})) + n = c_1 n^2 - 2c_2 n + n \leq c_1 n^2 - c_2 n$$

zatem  $c_1 = 1, c_2 = 1$  i  $T(n) = O(n^2)$  □

– Przykład

\*  $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$

założmy, że  $n$  jest potęgą liczby 2, czyli  $n = 2^m$

$$T(2^m) = 2T(2^{\frac{m}{2}}) + m$$

Co implikuje

$$T(2^{\frac{m}{2}}) \rightarrow S(m)$$

wtedy

$$S(m) = 2S(\frac{m}{2}) + m$$

rozwiązując rekurencję otrzymujemy

$$S(m) = m \log m$$

zatem

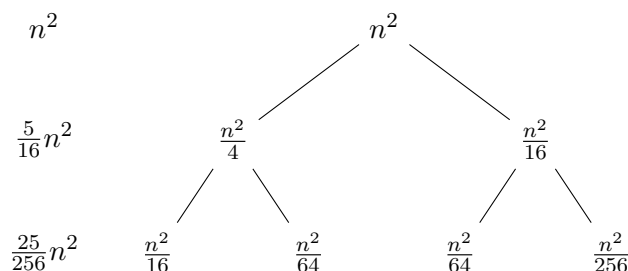
$$T(n) = \log n \log \log n$$

## 4 Wykład 2025-03-17

### 4.1 Drzewo rekursji

Przykład dzewa rekursji:

- $T(n) = T(\frac{n}{2}) + T(\frac{n}{4}) + n^2$



### Uwaga!

Nie jest to formalne rozwiązanie problemu. Nie można używać drzewa rekursji do dowodzenia złożoności algorytmów. Jest to jedynie intuicyjne podejście do problemu. Trzeba policzyć to na piechotę, aby było formalnie.

Aby policzyć  $T(n)$  musimy policzyć sumę wszystkich wierzchołków w drzewie rekursji.

$$T(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{16}\right)^k \cdot n^2 = n^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{16}\right)^k = n^2 \frac{1}{1 - \frac{5}{16}} = n^2 \frac{16}{11} = \frac{16}{11} n^2$$

A więc  $T(n) = O(n^2)$

Możemy to policzyć dokładniej dostając mniejsze wyrazy w sumie.

$$T(n) = O(\hat{T}(n)) = O(\check{T}(n))$$

$$T(n) = \Omega(\check{T}(n))$$

$$T(n) = \Theta(n^2) = \frac{16}{11}n^2 + o(n^2)$$

## 4.2 Metoda iteracyjna

Weźmy na przykład taką rekurencję:

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

Zobaczmy co się dzieje po podstawieniu rekurencji do samej siebie:

1.  $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n$
2.  $T(n) = 3(3T\left(\frac{n}{16}\right) + \frac{n}{4}) + n = 3^2T\left(\frac{n}{16}\right) + \frac{3}{4}n + n$
3.  $T(n) = 3^2(3T\left(\frac{n}{64}\right) + \frac{n}{16}) + \frac{3}{4}n + n = 3^3T\left(\frac{n}{64}\right) + \frac{3}{16}n + \frac{3}{4}n + n$
4. ...<sup>1</sup>

A więc ogólnie wychodzi:

## 4.3 Master Theorem

Niech  $a \geq 1, b > 1, f(n), d \in \mathbb{N}$  oraz  $f(n)$  będzie funkcją nieujemną. Rozważmy rekurencję:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^d)$$

gdzie  $a$  i  $b$  są stałymi, a  $f(n)$  jest funkcją nieujemną. Wtedy:

1.  $\Theta(n^d)$  jeśli  $d > \log_b a$
2.  $\Theta(n^d \log n)$  jeśli  $d = \log_b a$
3.  $\Theta(n^{\log_b a})$  jeśli  $d < \log_b a$

---

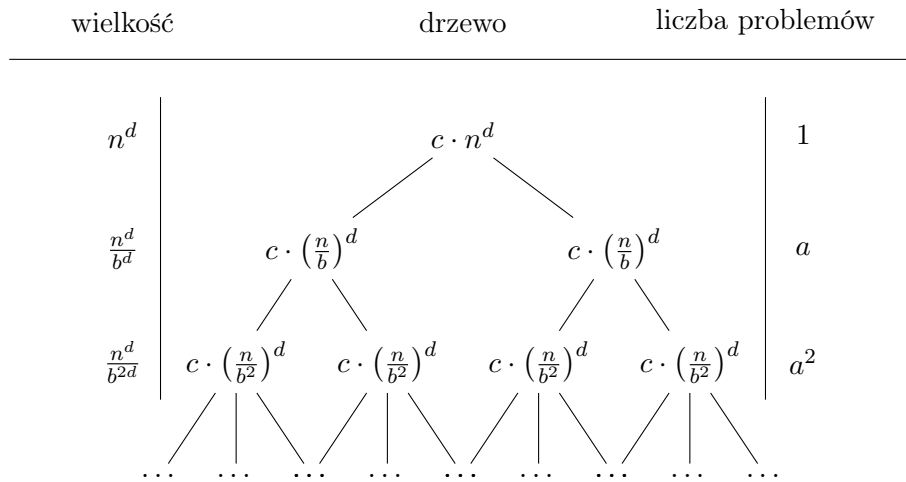
<sup>1</sup>Warto zauważyć, że jest to analogicznie do liczenia sumy wszystkich nodów drzewa rekursji



## Szkic D-d

Do przedstawienia problemu użyjemy drzewa rekursji. Rozważmy rekurencję:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^d)$$



1. suma kosztów w  $k$ -tym kroku

$$a^k c \left(\frac{n}{b^k}\right)^d = c \left(\frac{a}{b^d}\right)^k n^d$$

gdzie  $c \left(\frac{n}{b^k}\right)^d$  to koszt jednego podproblemu w  $k$ -tym kroku

2. obliczenie wysokości drzewa:

$$\frac{n}{b^h} = 1 \rightarrow h = \log_b n$$

3. Obliczenie  $T(n)$

$$T(n) = \Theta\left(\sum_{k=0}^{\log_b n} c \frac{a}{b^k} n^d\right) = \Theta\left(c \cdot n^d \sum_{k=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d}\right)^k\right) = \Theta\left(c \cdot n^d \frac{1 - \left(\frac{a}{b^d}\right)^{\log_b n + 1}}{1 - \frac{a}{b^d}}\right) \Rightarrow T(n) = \Theta(n^d)$$

4. rozważmy 3 przypadki:

(a)  $d > \log_b a$

$$T(n) = \Theta(n^d)$$

root – he  
avy

(b)  $d = \log_b a$

$$T(n) = \Theta(n^d \log n)$$

równy

(c)  $d < \log_b a$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

leaf – he  
avy

## Przykłady

- $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + 11n$

Wtedy korzystając z **Master Theorem** mamy:

$$a = 4, b = 2, d = 1$$

Jak i również

$$\log_b a = \log_2 4 = 2 > 1 = d \Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)7$$

- $T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + 3n^2$

Wtedy

$$a = 4, b = 3, d = 2$$

Jak i również

$$\log_b a = \log_3 4 > 2 = d \implies T(n) = \Theta(n^{\log_3 4})$$

- $T(n) = 27T(\frac{n}{3}) + \frac{n^2}{3}$

Wtedy

$$a = 27, b = 3, d = 2$$

Jak i również

$$\log_b a = \log_3 27 = 3 > 2 = d \implies T(n) = \Theta(n^3 \log n)$$

## 4.4 Metoda dziel i zwyciężaj (D&C)

Na czym ona polega?

1. Podział problemu na mniejsze podproblemy <sup>2</sup>
2. Rozwiązanie rekurencyjnie mniejsze podproblemy
3. połącz rozwiązania podproblemów w celu rozwiązania problemu wejściowego

### 4.4.1 Algorytm – Binary Search

- **Input:** posortowana tablica  $A[1..n]$  oraz element  $x$
- **Output:** indeks  $i$  taki, że  $A[i] = x$  lub 0 jeśli  $x$  nie występuje w  $A$
- przebieg algorytmu:

---

#### Algorithm 3 Binary Search

---

```

1: procedure BINARYSEARCH( $A, x$ )
2:    $l = 1$ 
3:    $r = |A|$ 
4:   while  $l \leq r$  do
5:      $m = \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$ 
6:     if  $A[m] = x$  then
7:       return  $m$ 
8:     else if  $A[m] < x$  then
9:        $l = m + 1$ 
10:    else
11:       $r = m - 1$ 
12:    end if
13:  end while
14:  return 0
15: end procedure

```

---

- **Asymptotyka** Algorytm spełnia następującą rekurencję:

$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + \Theta(1)$$

Rozwiązując za pomocą **Master Theorem** otrzymujemy:

$$T(n) = \Theta(\log n)$$

---

<sup>2</sup>W zapisie rekurencyjnym  $T(n) = cT(\frac{n}{b}) + \underline{n^d}$

#### 4.4.2 Algorytm – potęgowanie liczby do naturalnej potęgi

- **Problem:** obliczanie  $x^n$

Można rozbić mnożenie  $n$   $x$  na odpowiednie podproblemy:

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{\frac{n}{2}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{\frac{n}{2}}$$

A więc mamy:

$$x^n = \begin{cases} x^{\frac{n}{2}} \cdot x^{\frac{n}{2}} & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ x^{\frac{n-1}{2}} \cdot x^{\frac{n-1}{2}} \cdot x & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

- **Asymptotyka:**

Algorytm spełnia następującą rekurencję:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(1)$$

Rozwiązując za pomocą **Master Theorem** otrzymujemy:

$$T(n) = \Theta(\log n)$$

#### 4.4.3 Obliczenie n-tej liczby Fibonacciego

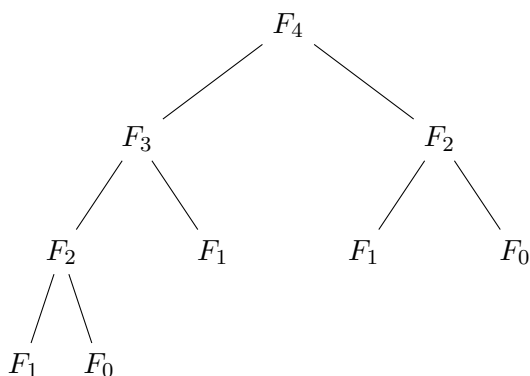
- **Problem:**

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0 \\ 1 & \text{dla } n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{dla } n > 1 \end{cases}$$

- **Algorytmy:**

1. Naiwna rekurencja używająca definicji.

Obliczanie  $F_4$



Kontynuując dostajemy asymptotyke rzędu  $\Theta(\phi^n)$

2. *bottom up* – iteracyjne obliczanie kolejnych liczb Fibonacciego. Asymptotyka wynosi  $\Theta(n)$
3. Kożystanie z wzoru wynikającego z rozwiązanej rekurencji:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Problem z tym podejściem polega na niedokładnym przybliżeniu przez komputery wartości  $\phi$

4. Kożystając z lematu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix},$$

*Dowód.* (a) Warunek początkowy: dla  $n = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & F_0 \\ F_0 & F_{-1} \end{pmatrix}$$

(b) Krok indukcyjny:

załóży, że dla pewnego  $k$  zachodzi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$$

wtedy dla  $k + 1$  mamy:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Algorytm ten ma złożoność  $\Theta(n \log n)$

#### 4.4.4 Mnożenie liczb

- **Input:**  $x, y$  takie, że  $\max\{|x|, |y|\}$
- **Output:**  $x \cdot y$
- **Algorytmy:**

1. standardowe mnożenie szkolne – mnożenia w słupku jego asymptotyka wynosi  $\Theta(n^2)$
2. Podejście metodą **D&C**

- **Podejście:** Rozbijamy liczby na dwie równe części, a następnie mnożymy je przez siebie  
Możemy zapisać  $x$  oraz  $y$  jako:

$$x = \underbrace{x_L \cdot 2^{\frac{n}{2}}}_{\frac{n}{2} \text{ bitów}} + \underbrace{x_R}_{\frac{n}{2} \text{ bitów}}$$

$$y = \underbrace{y_L \cdot 2^{\frac{n}{2}}}_{\frac{n}{2} \text{ bitów}} + \underbrace{y_R}_{\frac{n}{2} \text{ bitów}}$$

Proces mnożenia wygląda następująco:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (x_L \cdot 2^n + x_R) \cdot (y_L \cdot 2^n + y_R) \\ &= x_L y_L \cdot 2^{2n} + ((x_L + x_R)(y_L + y_R) - x_L y_L - x_R y_R) \cdot 2^n \\ &\quad + x_R y_R \end{aligned}$$

Generalnie wszystkie wykonywane powyżej operacje są giga tanie bo operacje takie jak mnożenie przez  $2^k$  wiąże się jedynie z przesunięciem bitowym.

- **Asymptotyka:** Nasz algorytm spełnia następującą rekurencję na podstawie zapisanego wyżej równania

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

Kożystając ponownie z **Master Theorem** można wywnioskować, że algorytm ma złożoność  $\Theta(n^2)$ . Zatem nie ma żadnego znacznego przyspieszenia, nawet prawdopodobnie stała ukryta w  $\Theta(n^2)$  jest gorsza niż w standardowym podjeściu

### 3. Metoda Gaussa

- Rozważmy mnożenie liczb zespolonych

$$(a + ib)(c + id) = ac + i(ad + bc) + bd$$

$$bc + ad = (a + b)(c + d) - ac - bd$$

zatem

$$x \cdot y = x_L y_L \cdot 2^n + ((x_L + x_R)(y_L + y_R) - x_L y_L - x_R y_R) \cdot 2^{\frac{n}{2}} + x_R y_R$$

- **Asymptotyka:** algorytm ten spełnia rekurencję

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

Z **Master Theorem** otrzymujemy, że algorytm ma złożoność  $\Theta(n^{\log_2 3})$ , a  $\log_2 3 \approx 1.58$

4. Istnieją jeszcze szybsze, nowsze algorytmy mnożenia liczb, takie jak algorytm Schönhage’a-Strassena bazuje ono na szybkiej transformacie Fouriera *Fast Fourier Transform*, który ma złożoność  $\Theta(n \log n \log \log n)$ . Jednakże, trzeba wziąć pod uwagę stałą ukrytą w  $\Theta$ . W praktyce, dla liczb o rozmiarze do  $10^6$  lepiej jest użyć standardowego algorytmu mnożenia.

Trochę pseudo kodu dla mnożenia liczb:

---

**Algorithm 4** Mnożenie liczb

---

```
1: procedure MULTIPLY( $x, y$ )
2:    $n = \max\{|x|, |y|\}$ 
3:   if  $n = 1$  then
4:     return  $x \cdot y$ 
5:   end if
6:    $x_L, x_R = \text{LeftMost} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \text{RightMost} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  bits of  $x$ 
7:    $y_L, y_R = \text{LeftMost} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \text{RightMost} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  bits of  $y$ 
8:    $p_1 = \text{Multiply}(x_L, y_L)$ 
9:    $p_2 = \text{Multiply}(x_R, y_R)$ 
10:   $p_3 = \text{Multiply}(x_L + x_R, y_L + y_R)$ 
11:  return  $p_1 \cdot 2^{2n} + (p_3 - p_1 - p_2) \cdot 2^n + p_2$ 
12: end procedure
```

---

#### 4.4.5 Mnożenie macierzy

- **Input:** dwie macierze  $A, B$  rozmiaru  $n \times n$
- **Output:** macierz  $C = A \cdot B$
- **Algorytmy:**

1. Naiwne mnożenie macierzy – jego złożoność wynosi  $\Theta(n^3)$  bo aby policzyć jedną komórkę macierzy  $C$  musimy wykonać  $n$  mnożeń (i  $n - 1$  dodawań<sup>3</sup>), a skoro macierz  $C$  ma  $n^2$  komórek to złożoność wynosi  $\Theta(n^3)$
2. Algorytm Strassena – **D&C**
  - **Podejście:** Rozbijamy macierze na 4 równe części

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

---

<sup>3</sup>w sumie  $n^2$  operacji

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

gdzie

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$$

$$C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$$

$$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}$$

$$C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$$

– **Asymptotyka:** Algorytm ten spełnia rekurencje

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2)$$

Z **Master Theorem** otrzymujemy, że algorytm ma złożoność  $\Theta(n^{\log_2 7})$ , a  $\log_2 7 \approx 2.81$   
4

#### 4.4.6 Quick Sort

Algorytm **Merge Sort** ociera się o minimalną granicę złożoności sortowania, która wynosi  $\Theta(n \log n)$ , jednakże jest z nim problem związany z pamięcią: nie sortuje w miejscu, a więc wymaga dodatkowej pamięci.

- **Input:** tablica  $A[1..n]$
- **Output:** posortowana tablica  $A$
- **Algorytm:**  $\text{QuickSort}(A, p, q)$ 
  1. Podziel tablicę  $A[p \dots q]$  na dwie podtablice  $A[p \dots k-1]$  oraz  $A[k+1 \dots q]$ , gdzie  $A[k]$  jest elementem rozdzielającym – *pivotem*<sup>5</sup> tak, że:

$$\forall i \in [p \dots k-1] : A[i] \leq A[k] : \forall j \in [k+1 \dots q] : A[j] \geq A[k]$$

2. Odpalamy rekurencyjnie  $\text{QuickSort}(A, p, k-1)$  oraz  $\text{QuickSort}(A, k+1, q)$

- **Przykład:**

1. mamy dane  $A = [6, 1, 4, 3, 5, 7, 2, 8]$ , wybieramy *pivot* jako 6
2. Przebieg partycjonowania:

$$A = [1, 4, 3, 5, 2, 6, 7, 8]$$

Elementy mniejsze niż 6 znalazły się po lewej stronie, większe po prawej. Pozycja pivota:  $A[6] = 6$ .

3. Rekurencyjnie sortujemy dwie części:

–  $\text{QuickSort}(A, 1, 5)$  dla tablicy  $[1, 4, 3, 5, 2]$ , np. wybieramy pivot 1:

$$A = [1, 4, 3, 5, 2]$$

Po dalszym sortowaniu otrzymamy  $[1, 2, 3, 4, 5]$

–  $\text{QuickSort}(A, 7, 8)$  dla  $[7, 8]$ , który już jest posortowany.

---

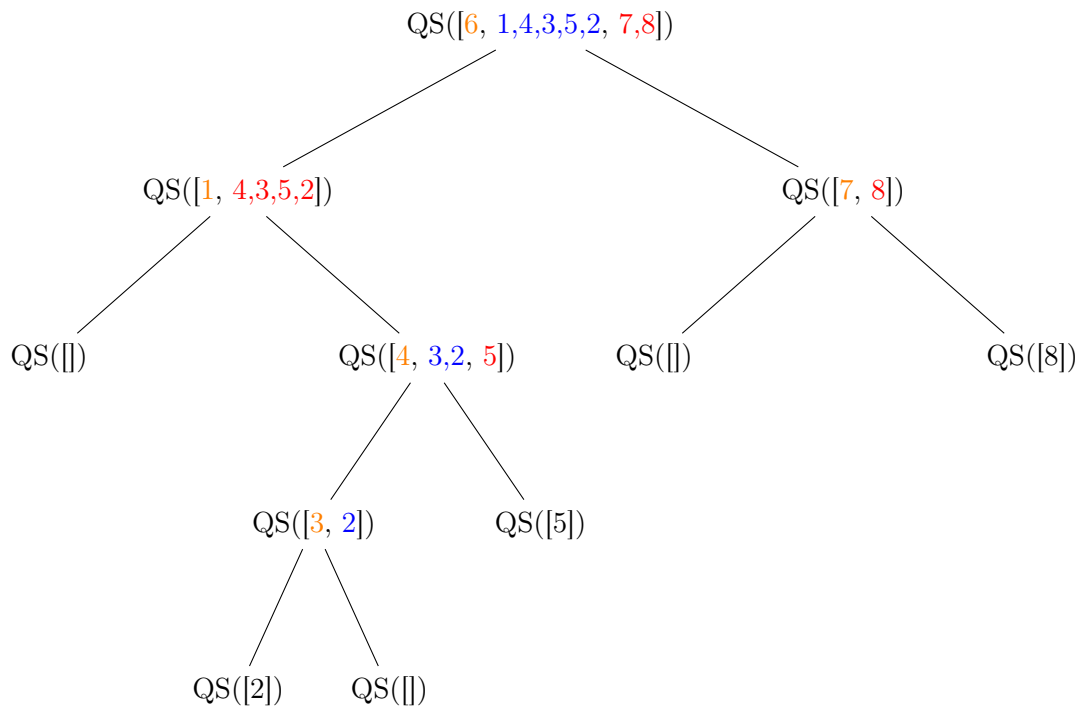
<sup>4</sup>Aby zejść do rekurencji  $T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + \Theta(n^2)$  trzeba wykonać pewne, bardziej wyrafinowane triki, które nie są dokładnie opisane tutaj. Z algorytmu zapisanego wyżej wynika że rekurencja to  $T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + \Theta(n^2)$ , a więc złożoność wynosi  $\Theta(n^3)$

<sup>5</sup>o tym jak ten pivot jest wybierany będziemy mówić później

4. Finalna posortowana tablica:

$$A = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$$

Na koniec przykład w drzewie rekursji:



## 5 Wykład 2025-03-24

### 5.1 Quick Sort

#### 5.1.1 Lemuto Partition

- **Input:** tablica  $A[1..n]$
- **Output:** posortowana tablica  $A$
- **Algorytm:** Lemuto( $A$ ,  $p$ ,  $q$ )

---

**Algorithm 5** Lemuto Partition

---

```
1: procedure LEMUTO( $A$ ,  $p$ ,  $q$ )
2:    $\text{pivot} = A[p]$ 
3:    $i = p$ 
4:   for  $j = p + 1$  to  $q$  do
5:     if  $A[j] < \text{pivot}$  then
6:        $i = i + 1$ 
7:        $\text{swap } A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
8:     end if
9:   end for
10: end procedure
```

---

- **Przykład:**

1. zaczynamy z nieposortowaną tablicą  $A = [6, 10, 13, 5, 8, 3, 2, 11]$
2. wybieramy pivot  $A[1] = 6$
3. inicjalizujemy  $i = 1$

4. iterujemy przez tablicę od  $j = 2$  do  $j = 8$ :

- $j = 2$ :  $A[2] = 10$  (nie mniejsze od pivot)
- $j = 3$ :  $A[3] = 13$  (nie mniejsze od pivot)
- $j = 4$ :  $A[4] = 5$  (mniejsze od pivot)
  - \*  $i = i + 1 = 2$
  - \* zamiana  $A[2] \leftrightarrow A[4] \Rightarrow A = [6, 5, 13, 10, 8, 3, 2, 11]$
- $j = 5$ :  $A[5] = 8$  (nie mniejsze od pivot)
- $j = 6$ :  $A[6] = 3$  (mniejsze od pivot)
  - \*  $i = i + 1 = 3$
  - \* zamiana  $A[3] \leftrightarrow A[6] \Rightarrow A = [6, 5, 3, 10, 8, 13, 2, 11]$
- $j = 7$ :  $A[7] = 2$  (mniejsze od pivot)
  - \*  $i = i + 1 = 4$
  - \* zamiana  $A[4] \leftrightarrow A[7] \Rightarrow A = [6, 5, 3, 2, 8, 13, 10, 11]$
- $j = 8$ :  $A[8] = 11$  (nie mniejsze od pivot)

5. zamiana pivot  $A[1] \leftrightarrow A[4] \Rightarrow A = [2, 5, 3, 6, 8, 13, 10, 11]$

6. pivot 6 jest na pozycji 4

- **Asymptotyka:** Algorytm ten wykonuje w głównej pętli  $n-1$  porównań, natomiast wersja Lemuto Partition wymaga dodatkowo  $n-1$  zamian elementów.

### 5.1.2 Hoare Partition

- **Input:** Tablica  $A[1..n]$
- **Output:** Posortowana Tablica  $A$
- **Algorytm:** Hoare( $A$ ,  $p$ ,  $q$ )

---

**Algorithm 6** Hoare Partition

---

```
1: procedure HOARE( $A$ ,  $p$ ,  $q$ )
2:    $\text{pivot} = A[\frac{p+q}{2}]$ 
3:    $i = p - 1$ 
4:    $j = q + 1$ 
5:   while True do
6:      $i = i + 1$ 
7:     while  $A[j] > \text{pivot}$  do
8:        $j = j - 1$ 
9:       if  $i \geq j$  then
10:        break
11:      end if
12:    end while
13:     $\text{swap}A[i] \leftrightarrow A[j]$ 
14:  end while
15: end procedure
```

---

- **Przykład:** Generalnie algorytm ten działa na zasadzie zamiany elementów w tablicy względem *pivotu* tak, że jeżeli jest element mniejszy od *pivotu* to zamieniamy go z elementem większym od *pivotu* z drugiej strony tablicy. Algorytm kończy się gdy wszystkie elementy mniejsze od *pivotu* są po lewej stronie, a większe po prawej.

1. zaczynamy z nieposortowaną tablicą  $A = [6, 10, 13, 5, 8, 3, 2, 11]$

2. wybieramy pivot  $A[\frac{1+8}{2}] = A[4] = 5$



3. inicjalizujemy  $i = 0$  i  $j = 9$

4. iterujemy aż  $i \geq j$ :

–  $i = 1$ :  $A[1] = 6$  (większe od pivot)

–  $j = 8$ :  $A[8] = 11$  (większe od pivot)

\*  $j = 7$ :  $A[7] = 2$  (mniejsze od pivot)

\* zamiana  $A[1] \leftrightarrow A[7] \Rightarrow$

2	10	13	5	8	3	6	11
---	----	----	---	---	---	---	----

–  $i = 2$ :  $A[2] = 10$  (większe od pivot)

–  $j = 6$ :  $A[6] = 6$  (większe od pivot)

\*  $j = 5$ :  $A[5] = 3$  (mniejsze od pivot)

\* zamiana  $A[2] \leftrightarrow A[5] \Rightarrow$

2	3	13	5	8	10	6	11
---	---	----	---	---	----	---	----

–  $i = 3$ :  $A[3] = 13$  (większe od pivot)

–  $j = 4$ :  $A[4] = 8$  (większe od pivot)

\*  $j = 3$ :  $A[3] = 13$  (większe od pivot)

\* zamiana  $A[3] \leftrightarrow A[3] \Rightarrow$

2	3	5	13	8	10	6	11
---	---	---	----	---	----	---	----

–  $i = 4$ :  $A[4] = 8$  (większe od pivot)

–  $j = 3$ :  $A[3] = 5$  (pivot), kończymy algorytm

5. pivot 5 jest na pozycji 3 i wszystkie elementy są podzielone względem niego

- **Asymptotyka:** *Hoare Partition* wykonuje  $n \pm c$  porównań – o stałą więcej niżeli *Lomuto Partition*, ale za to wykonuje mniej zamian elementów. W praktyce *Hoare Partition* jest szybszy. Całościowa Asymptotyka wynosi  $\Theta(n)$

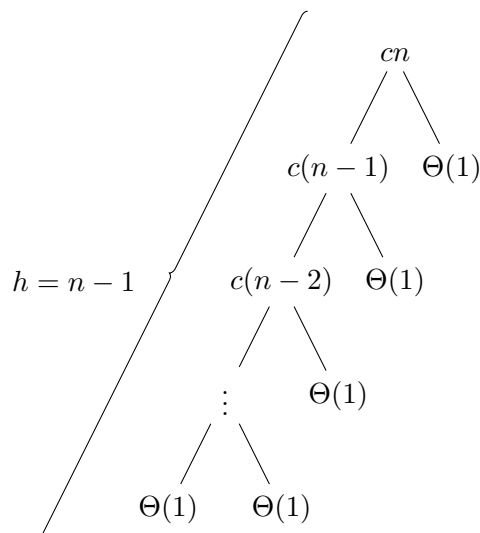
### 5.1.3 Analiza Worst Case

Algorytm sortowania Quick Sort zachowuje się najgorzej w przypadku, gdy dostaje tablicę odwrotnie posortowaną. Wszystkie elementy będą znajdowały się po złej stronie *pivotu*.

Zostaje spełniana rekurencja:

$$T(n) = T(n-1) + \underbrace{T(0)}_{\text{pusta lewa tablica}} + \Theta(n)$$

Można zauważyć, że nie zadziała tu **Master Theorem**, trzeba rozwiązać ją na przykład drzewem rekursji:



Z drzewa rekursji wynika, że powyższa rekurencja to:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= T(n-1) + \Theta(n) \\
 &\leq \sum_{k=0}^n (c(n-k) + \Theta(1)) \\
 &= c \sum_{k=0}^n (n-k) + \Theta(n) \\
 &= c \sum_{k=0}^n k + \Theta(n) \\
 &= \Theta(n^2)
 \end{aligned}$$

Ograniczenie dolne analogicznie...

### 5.1.4 Best Case Analysis

Algorytm sortowania Quick Sort zachowuje się najlepiej w przypadku, gdy dostaje tablicę posortowaną. Wszystkie elementy będą znajdowały się po dobrej stronie *pivotu*.

Zostaje spełniana rekurencja:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

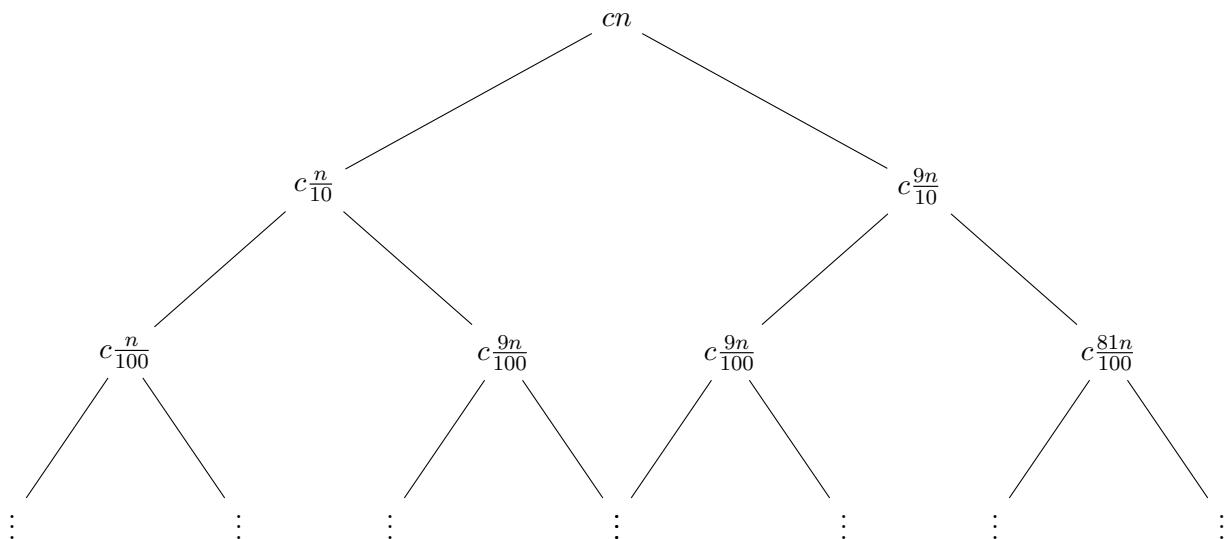
Można zauważyć, z **Master Theorem**, że asymptotyka wynosi:

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

Rozważmy przypadek, w którym algorytm wykonuje się nie koniecznie optymalną ilość razy. Powiedzmy, że spełnia on taką rekurencję:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{10}\right) + T\left(\frac{9n}{10}\right) + \Theta(n)$$

Rozważając drzewo rekursji możemy zauważyć, że



Każdy wiersz tego drzewa sumuje się do  $cn$ . Wysokość drzewa wynosi  $\log_{10/9} n$ , zatem złożoność wynosi  $\Theta(n \log_{10/9} n)$ , co jest tak naprawdę równe  $\Theta(n \log n)$ .

### 5.1.5 Rozważenie przypadku mieszanego

Rozważmy przypadek, w którym algorytm raz wykonuje się z best casem – dzieli się tablica na pół, a raz z worst casem – dzieli się tablica na 1 i  $n - 1$  elementów.

Zostaje spełniana rekurencja:

$$L(n) = 2U\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

$$U(n) = L(n - 1) + \Theta(n)$$

gdzie  $L$  symbolizuje best case, natomiast  $U$  worst case. Rozwiązując powyższą rekurencję otrzymujemy:

$$\begin{aligned} L(n) &= 2(L\left(\frac{n}{2} - 1\right) + \Theta(n)) + \Theta(n) \\ &= 2L\left(\frac{n}{2} - 1\right) + \Theta(n) \\ &= \Theta(n \log n) \end{aligned}$$

### 5.1.6 Average Case Analysis

Algorytm Quick Sort da się “zabezpieczyć” przed złym rozkładem danych poprzez losowym wybraniem pivota i następnie swapnięcie go z naszym deterministycznym miejscem. W ten sposób będziemy mieli zawsze jednostajnie losowy rozkład danych.

Wprowadźmy

$T_n$  – zmienna losowa liczby porównań w Quick Sortcie sortowanej tablicy  $A$ ,  $|A| = n$

Do dziś nie jest znany rozkład zmiennej losowej  $T_n$ .

Niech  $X$  będzie zmienną indykatorową:

$$X_k^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli partition podzieli tablicę } n\text{-elementową na } (k, (n - k - 1)) \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Teraz rozważmy zachowanie zmiennej losowej  $T_n$ :

$$T_n \stackrel{d}{=} \begin{cases} T_0 + T_{n-1} + n - 1 & \text{jeśli } (0, n - 1) \text{ jest partitionem} \\ T_1 + T_{n-2} + n - 1 & \text{jeśli } (1, n - 2) \text{ jest partitionem} \\ \vdots \\ T_k + T_{n-k-1} + n - 1 & \text{jeśli } (k, n - k - 1) \text{ jest partitionem} \\ \vdots \\ T_{n-1} + T_0 + n - 1 & \text{jeśli } (n - 1, 0) \text{ jest partitionem} \end{cases}$$

Stosując zmienną indykatorową  $X$  otrzymujemy

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k^{(n)} (T_k + T_{n-k-1} + n - 1)$$

Rozważmy niezależność zmiennych  $X_k^{(n)}$  i  $T_k$ . Są one niezależne, ponieważ ilość porównań nie jest zależna od tego jak później będzie dzielić się tablica. Zatem można zapisać

$$\mathbb{E}[X_k^{(n)} T_k] = \mathbb{E}[X_k^{(n)}] \mathbb{E}[T_k]$$

Skoro przyjmujemy jednostajny rozkład danych wejściowych to wartość oczekiwana  $X_k^{(n)}$  wynosi:

$$\mathbb{E}[X_k^{(n)}] = 1 \cdot P(X_k^{(n)} = 1) + 0 \cdot P(X_k^{(n)} = 0) = P(X_k^{(n)} = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Teraz policzmy wartość oczekiwaną  $T_n$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_n] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} X_k^{(n)} (T_k + T_{n-k-1} + n - 1) \right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_k^{(n)} (T_k + T_{n-k-1} + n - 1)] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_k^{(n)}] \mathbb{E}[T_k + T_{n-k-1} + n - 1] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \mathbb{E}[T_k + T_{n-k-1} + n - 1] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[T_k] + \mathbb{E}[T_{n-k-1}] + \mathbb{E}[n - 1] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[T_k] + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[T_{n-k-1}] + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} n - 1
\end{aligned}$$

Można zauważyć, że  $\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[T_k] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[T_{n-k-1}]$  ponieważ jest to doawanie tych samych rzeczy w innej kolejności (od przodu i od tyłu). Zatem

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_n] &= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[T_k] + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} n - 1 \\
&= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[T_k] + n - 1
\end{aligned}$$

Przyjmijmy oznaczenie  $\mathbb{E}[T_n] = t_n$ , wtedy

$$t_n = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} t_k + n - 1$$

Jest to rekurencja Można ją rozwiązać w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
t_n &= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} t_k + n - 1 \quad | \cdot n \\
nt_n &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} t_k + n(n - 1)
\end{aligned}$$

Podstawmy za  $n \rightarrow n - 1$

$$(n - 1)t_{n-1} = 2 \sum_{k=0}^{n-2} t_k + (n - 1)(n - 2)$$

Odejmując stronami równanie otrzymujemy:

$$nt_n - (n - 1)t_{n-1} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} t_k + n(n - 1) - 2 \sum_{k=0}^{n-2} t_k - (n - 1)(n - 2)$$

$$nt_n - (n - 1)t_{n-1} = 2t_{n-1} + 2(n - 1)$$

Przekształcając otrzymujemy:

$$nt_n = (n + 1)t_{n-1} + 2(n - 1) \quad | : n(n + 1)$$

$$\frac{t_n}{n+1} = \frac{t_{n-1}}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$$

Przyjmijmy kolejne oznaczenie  $s_n = \frac{t_n}{n+1}$ , wtedy

$$s_n = s_{n-1} + 2\frac{n-1}{n(n+1)}$$

jest już prostą rekurencją, którą można łatwo rozwiązać iteracyjnie.

$$\begin{aligned} s_n &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{k(k+1)} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \left( \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= 4 \left( H_n + \frac{1}{n+1} - 1 \right) - 2H_n \\ &= 4H_n + 4\frac{1}{n+1} - 4 - 2H_n \\ &= 2H_n + \frac{4}{n+1} - 4 \end{aligned}$$

gdzie  $H_n$  to  $n$ -ty element ciągu harmonicznego. Podstawiając z powrotem  $t_n \leftarrow s_n(n+1)$  otrzymujemy

$$t_n = 2(n+1)H_n + 4(n+1) - 4 = 2nH_n + 2H_n + 4n$$

Kożystając z faktu, że  $H_n = \ln n + \gamma + O(\frac{1}{n})$  otrzymujemy

$$\mathbb{E}[T_n] = 2n \log n + 2\gamma n + \Theta(n)$$

## 6 Wykład 2025-03-25

### 6.1 Dual Pivot Quick Sort

W roku 1975 Sedgwick pokazał, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\text{\#porównań w dual pivot partition}] &\approx \frac{16}{9}n \implies \\ \implies \mathbb{E}[\text{\#porównań w dual pivot Quick Sortcie Sedgwick}] &\approx \frac{32}{15}n \log n \end{aligned}$$

Jak się to liczy?

Niech  $T_n$  - #porównań w dual pivot Quick Sortcie Sedgwick oraz  $P_n$  - #porównań w dual pivot partition. Rekurencja spełnia takie równanie:

$$\mathbb{E}[T_n] = \mathbb{E}[P_n] + \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq p < q \leq n} (\mathbb{E}[T_{p-1}] + \mathbb{E}[T_{q-p-1}] + \mathbb{E}[T_{n-q}])$$

Później rozwiązuje się to analogicznie jak na poprzednim wykładzie rozwiązywana była rekurencja dla  $T_n$  5.1.6

Natomiast w roku 2009 pan Yaroslavsky, Bentley, Blach opracował poprzez testowanie w Javie (nie miał backgroundu matematycznego) lepszy algorytm Quick Sort. Później w 2012 Sebastian Wild, Nedel pokazali, że

$$\mathbb{E}[\text{\#porównań w Dual Pivot Quick Sortcie Yaroslavskiego}] \approx 1.9n \log n$$

2015, Aufmüller, Dietzfelbinger zaprojektowali *Strategie Count* oraz pokazali jej optymalność

$$\mathbb{E}[\text{\#porównań w Count Partition}] \approx \frac{3}{2}n \implies$$

$$\implies \mathbb{E}[\text{\#porównań w Dual Pivot z Count Partition}] \approx 1.8n \log n$$

Wartość oczekiwana pojawia się w tych asymptotykach ponieważ jest element losowości związany z porównaniami elementu z pivotami. Nie zawsze trzeba będzie go porównywać z jednym i drugim pivotem.

### 6.1.1 Strategia Count Partition

- Zakładamy  $p < q$

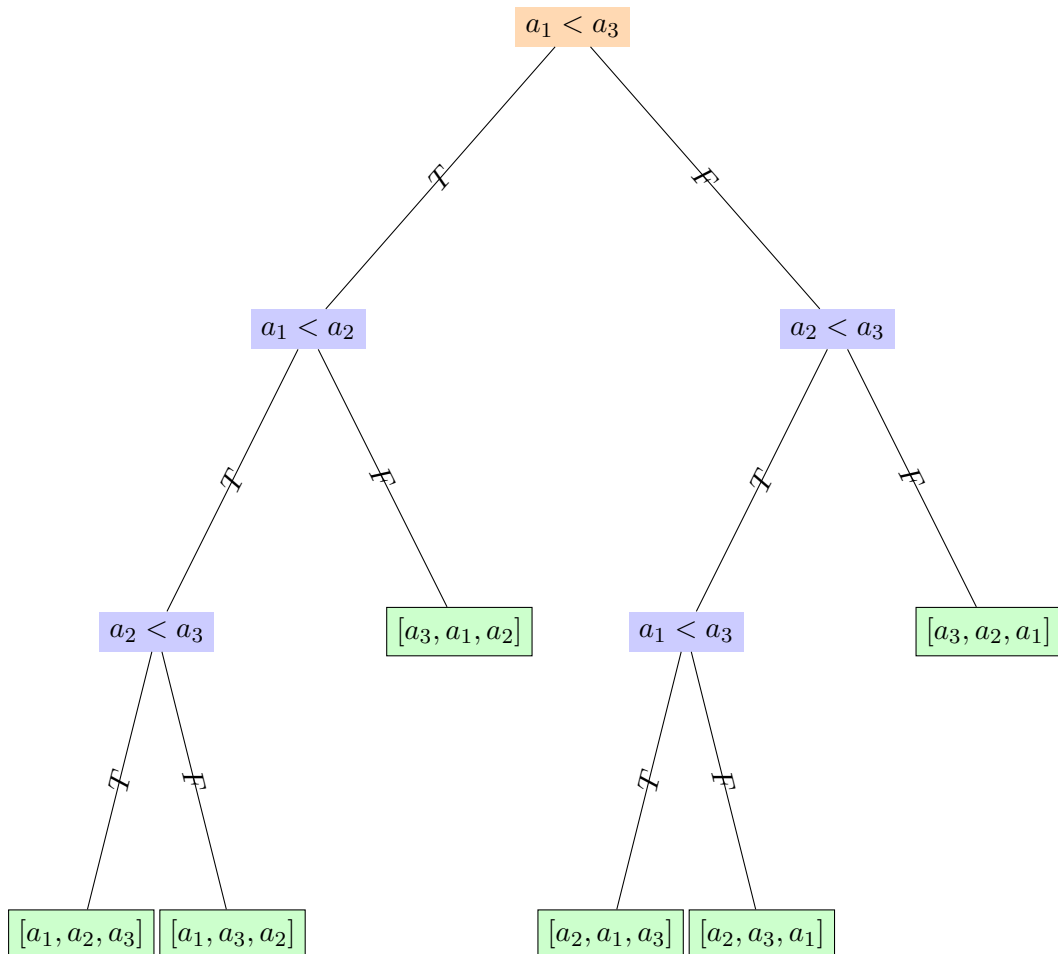
$$\left[ a \mid \underbrace{\dots}_{S_{i-1}} p \mid \dots q \mid \underbrace{\dots}_{L_{i-1}} \boxed{i} \mid b \right]$$

- rozpatrzmy  $i$ -ty element tablicy
- jeśli  $s_{i-1} \geq l_{i-1}$  to porównujemy  $A[i]$  najpierw z  $p$  jeżeli jest potrzeba to z  $q$
- jeśli  $s_{i-1} \leq l_{i-1}$  to porównujemy  $A[i]$  najpierw z  $q$  jeżeli jest potrzeba to z  $p$ <sup>6</sup>

## 6.2 Comparison Model

### 6.2.1 Drzewo decyzyjne

Jak wygląda to na przykładzie? Mamy daną tablicę  $[a_1, a_2, a_3]$  i chcemy ją posortować. W drzewie decyzyjnym każdy węzeł to porównanie dwóch elementów. W liściu znajduje się permutacja elementów.



<sup>6</sup>jest to swoiste przewidywanie przeszłości na podstawie ilości elementów, które są już posortowane

- dla dowolnego algorytmu sortowania w *Comparison Model* można znaleźć drogę na drzewie decyzyjnym
- W tym drzewie występuje  $n!$  liści będących permutacjami tablicy
- *Worst Case* odpowiada najdłuższej ścieżce w drzewie decyzyjnym
- drzewo binarne pełne odpowiada najlepszemu algorytmowi sortowania
- drzewo binarne pełne o wysokości  $h$  ma co najwyżej  $2^h$  liści, ale liści w drzewie decyzyjnym powinno być przynajmniej  $n!$  zatem

$$2^h \geq n! \implies h \geq \log_2 n!$$

### 6.2.2 Twierdzenie

Dolne ograniczenie na liczbę porównań w problemie sortowania w *Comparison Model* wynosi  $\Omega(n \log n)$

*Dowód.* Rozważmy drzewo decyzyjne dla sortowania  $n$  elementów. Każda ścieżka w drzewie decyzyjnym odpowiada jednej permutacji. Zatem drzewo decyzyjne ma przynajmniej  $n!$  liści. Trzeba pokazać, że wysokość drzewa decyzyjnego jest przynajmniej  $\log_2 n!$ .

$$2^h \geq n! \implies h \geq \log n!$$

Używając wzoru Stirlinga

$$\begin{aligned} h \geq \log n! &= \log \left( \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n (1 + O(1)) \right) \\ &= \log \left( \frac{n}{e} \right)^n + \log \left( \sqrt{2\pi n} (1 + O(1)) \right) \\ &= \underbrace{n \log n}_{\Theta(n \log n)} - \underbrace{n \log e}_{\Theta(n)} + \underbrace{\log \sqrt{2\pi n}}_{\Theta(\log n)} + \underbrace{\log(1 + O(1))}_{\Theta(1)} \\ &= \Omega(n \log n) \end{aligned}$$

Zatem dolne ograniczenie na liczbę porównań w problemie sortowania w *Comparison Model* wynosi  $\Omega(n \log n)$

□

### 6.2.3 Counting Sort

- **Input:** Tablica  $A$ ,  $|A| = n$ ,  $\forall i A[i] \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$ ,  $k$  - stała
- **Output:** Posortowana tablica  $A$
- **Algorytm:**
- **Przykład:**
  1.  $A = [4, 1, 3, 4, 3]$ ,  $C = [0, 0, 0, 0]$ ,  $B = [0, 0, 0, 0, 0]$  (tablice indeksowane od 1)
  2.  $A = [4, 1, 3, 4, 3]$ ,  $C = [1, 0, 2, 2]$ ,  $B = [0, 0, 0, 0, 0]$
  3.  $A = [4, 1, 3, 4, 3]$ ,  $C = [1, 1, 3, 5]$ ,  $B = [0, 0, 0, 0, 0]$
  4. Ostatnia pętla, skupmy się na tablicy  $B$ :
    - (a)  $j = 5$ :  $B[5] = A[5] = 3$ ,  $C[3] = 4$
    - (b)  $j = 4$ :  $B[4] = A[4] = 4$ ,  $C[4] = 3$
    - (c)  $j = 3$ :  $B[3] = A[3] = 3$ ,  $C[3] = 3$
    - (d)  $j = 2$ :  $B[2] = A[2] = 1$ ,  $C[1] = 1$
    - (e)  $j = 1$ :  $B[1] = A[1] = 4$ ,  $C[4] = 2$ $B = [1, 3, 3, 4, 4]$  - posortowana tablica
- **Asymptotyka:**  $\Theta(n + k)$ , gdzie  $k = O(n)$

---

**Algorithm 7** Counting Sort

---

```
1: procedure COUNTINGSORT( $A, n, k$ )  
2:   for  $i = 1$  to  $k$  do  $\triangleright \Theta(k)$   
3:      $C[i] = 0$   
4:   end for  
5:   for  $j = 1$  to  $n$  do  $\triangleright \Theta(n)$   
6:      $C[A[j]] = C[A[j]] + 1$   
7:   end for  
8:   for  $i = 2$  to  $k$  do  $\triangleright \Theta(k)$   
9:      $C[i] = C[i] + C[i - 1]$   
10:     $C[i] = C[i] + C[i - 1]$   $\triangleright$  liczba elementów mniejszych lub równych  $i$   
11:  end for  
12:  for  $j = n$  downto  $1$  do  $\triangleright \Theta(n)$   
13:     $B[C[A[j]]] = A[j]$   
14:     $C[A[j]] = C[A[j]] - 1$   
15:  end for  
16:  return  $B$   $\triangleright \Theta(1)$   
17: end procedure
```

---

### 6.3 Stable Sorting Property

Algorytm zachowuje kolejność równych sobie elementów z tablicy wejściowej

#### 6.3.1 Radix Sort

- **Input:** Tablica  $A$ ,  $|A| = n, \forall i A[i] \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$ ,  $k$  - stała
- **Output:** Posortowana tablica  $A$
- **Algorytm:** Zastosuj Counting Sort dla każdej cyfry liczby
- **Przykład:**

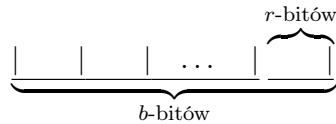
$$A = \begin{bmatrix} 329 \\ 457 \\ 657 \\ 839 \\ 436 \\ 720 \\ 355 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Counting Sort}} \begin{bmatrix} 720 \\ 355 \\ 436 \\ 457 \\ 657 \\ 329 \\ 839 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Counting Sort}} \begin{bmatrix} 329 \\ 355 \\ 436 \\ 457 \\ 657 \\ 720 \\ 839 \end{bmatrix}$$

Algorytm zachowuje kolejność równych sobie elementów z tablicy wejściowej – *Stable Sorting Property*, co umożliwia sortowanie po kolejnych cyfrach.

- **Poprawność:** Indukcja po  $t$  – numer cyfry
  1. jeśli  $t = 1$  to poprawność *Counting Sort* jest trywialna
  2. założmy, że Counting Sort jest poprawny dla  $t - 1$  – cyfrowej liczby
  3. Krok indukcyjny:
    - (a)  $t$ -ta cyfra ... liczby jest ...: to z założenia indukcyjnego oraz *stable counting property Counting Sorta* liczby do  $t$ -tej cyfry dają poprawnie posortowane
    - (b)  $t$ -ta cyfra różna: z poprawności *Counting Sort* ok.
- **Złożoność obliczeniowa:**
  - $n$   $b$ -bitowych liczb



- liczba  $b$ -bitowa dzielę na  $r$ -bitowych cyfr ( $\frac{b}{r}$  takich liczb):



- cyfry są z  $\{0, \dots, 2^r - 1\} \mid = 2^r$
- *Counting Sort* sortujemy  $n$  liczb względem jednej liczby. A więc wykonujemy

$$\Theta(n + 2^r)$$

operacji.

Zatem *Radix Sort* będzie miał złożoność obliczeniową

$$\Theta\left(\frac{b}{r}(n + 2^r)\right)$$

machając trochę rękoma wybieramy  $r$  jako  $r = \log n$ , wtedy

$$\Theta\left(\frac{b}{\log n} (n + 2^{\log n})\right) = \Theta\left(\frac{bn}{\log n}\right)$$

Jeśli  $\{0, \dots, n^d - 1\}$  - zakres sortowanych liczb, wtedy  $b = \log n^d = d \log n$ , a więc

$$\Theta\left(\frac{d \log nn}{\log n}\right) = \Theta\left(\frac{\cancel{\log n} n}{\cancel{\log n}}\right) = \Theta(d \cdot n)$$

## 7 Wykład 2025-03-31

Problem którym się teraz zajmujemy to tak zwany **Statystyka Pozycyjna**

### 7.1 Definicja Statystyki Pozycyjnej

#### 7.1.1 Definicja

$k$ -tą statystyką pozycyjną nazywamy  $k$ -tą najmniejszą wartością z zadanaego zbioru.

#### 7.1.2 Przykład

- $k = 1 \rightarrow O(n)$
- $k = n \rightarrow O(n)$
- $k = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$   $k = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \rightarrow$  sortowanie  $O(n \log n)$

### 7.2 Algorytm Random Select

- **Input:** Tablica  $A$ ,  $|A| = n$ , liczba  $k$
- **Output:**  $k$ -ta statystyka pozycyjna
- **Algorytm:**
- **Przykład:**  $A = [6, 10, 13, 5, 8, 3, 2, 11]$ ,  $\text{RandomSelect}(A, 1, 8, 4)$  Dla tablicy

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 13 & 5 & 8 & 3 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

wywołujemy procedurę  $\text{RandomSelect}(A, 1, 8, 4)$  aby znaleźć 4-ty najmniejszy element.

---

**Algorithm 8** Random Select

---

```
1: procedure RANDOMSELECT( $A, p, q, i$ )
2:   if  $p = q$  then
3:     return  $A[p]$ 
4:   end if
5:    $r = \text{RandomPartition}(A, p, q)$  ▷ losowa partycja
6:    $k = r - p + 1$ 
7:   if  $i = k$  then
8:     return  $A[r]$  ▷  $A[r]$  jest  $i$ -tą statystyką pozycyjną
9:   else if  $i < k$  then
10:    return  $\text{RandomSelect}(A, p, r - 1, i)$ 
11:  else
12:    return  $\text{RandomSelect}(A, r + 1, q, i - k)$ 
13:  end if
14: end procedure
```

---

**Krok 1.**

Zakładamy, że procedura `RandomPartition` wybiera pivot 8.

Po partycjonowaniu tablica wygląda następująco:

$$A = \quad 6 \quad 5 \quad 3 \quad 2 \quad \underline{8} \quad 13 \quad 10 \quad 11$$

Pivot znajduje się na pozycji  $r = 5$ , a  $k = r - p + 1 = 5 - 1 + 1 = 5$ . Ponieważ poszukiwany rząd  $i = 4$  jest mniejszy od  $k = 5$ , następuje wywołanie rekurencyjne:

$$\text{RandomSelect}(A, 1, 4, 4)$$

dla lewego podzbioru

$$\boxed{6 \mid 5 \mid 3 \mid 2}.$$

**Krok 2.**

Dla podtablicy

$$B = \boxed{6 \mid 5 \mid 3 \mid 2},$$

zakładamy, że pivot został wybrany jako 2.

Po partycjonowaniu otrzymujemy:

$$B = \boxed{\underline{2} \mid 5 \mid 3 \mid 6}$$

gdzie pivot 2 znajduje się teraz na pozycji  $r = 1$ . Obliczamy  $k = r - p + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$ .

Ponieważ  $i = 4 > 1$ , odejmujemy  $k$  od  $i$ , czyli nowa wartość to  $i = 4 - 1 = 3$ , i wywołujemy:

$$\text{RandomSelect}(B, 2, 4, 3)$$

dla podtablicy

$$B' = \boxed{5 \mid 3 \mid 6}.$$

**Krok 3.**

Dla podtablicy

$$C = \boxed{5 \mid 3 \mid 6},$$

zakładamy, że pivotem jest 6.

Po partycjonowaniu otrzymujemy:

$$C = \boxed{5 \mid 3 \mid \underline{6}}$$

gdzie pivot 6 znajduje się na pozycji  $r = 3$  (przyjmując indeksowanie od 1). Wówczas  $k = r - p + 1 = 3 - 1 + 1 = 3$ .

Skoro  $i = 3$  jest równe  $k$ , zwracamy pivot:

$$\text{RandomSelect}(C, 1, 3, 3) = 6.$$

**Wniosek:**

Procedura zwraca wartość  $\boxed{6}$ , czyli 4-ty najmniejszy element w tablicy  $A$ .

• **Złożoność obliczeniowa:**

- *Best Case*: W najlepszym przypadku dzielimy tablicę na dwie równe części, zatem

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n)$$

Używając *Master Theorem* otrzymujemy

$$T(n) = \Theta(n)$$

- *Worst Case*: W najgorszym przypadku dzielimy tablicę na  $n - 1$  i 1 elementów (– pivot wybrany przez partition), a więc

$$T(n) = T(n - 1) + \Theta(n)$$

Używając *Master Theorem* otrzymujemy

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

- *Average Case*: W średnim przypadku musimy policzyć wartość oczekiwaną takiej zmiennej losowej:

$$T_n = \begin{cases} T_{n-1} + n - 1 : (0, n - 1) \\ T_{n-2} + n - 1 : (1, n - 2) \\ \vdots \\ T_1 + n - 1 : (n - 2, 1) \end{cases}$$

Aby formalizować analizę, wprowadzamy zmienną indykatorową:

$$X_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli przy partycjonowaniu tablicy } n\text{-elementowej nastąpiło rozbiecie na} \\ & (k, n - k - 1) \text{ oraz dalsze wywołanie rekurencyjne odbywa się na} \\ & \text{podtablicy zawierającej szukany element,} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wówczas możemy zapisać:

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k^{(n)} \left( T(\max(k, n - k - 1)) + n - 1 \right).$$

Przyjmując, że wybór pivotu jest jednostajny, mamy:

$$\mathbb{E}[X_k^{(n)}] = \frac{1}{n} \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Zatem, stosując wartość oczekiwaną i liniowość tej wartości, otrzymujemy:

$$\mathbb{E}[T_n] = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \mathbb{E}[T(\max(k, n - k - 1))] + n - 1 \right).$$

Ponieważ gdy pivot jest szukanym elementem (dla  $k = 0$  lub  $k = n - 1$ , w sensie odpowiedniego ustawienia) nie następuje rekurencja, przyjmujemy  $T_0 = 0$ . Dla pozostałych przypadków (czyli dla  $1 \leq k \leq n - 2$ ) dalsze wywołanie odbywa się na jednej z podtablic o rozmiarze nie większym niż  $\lceil n/2 \rceil$  (ze względu na symetrię rozbicia). Możemy więc oszacować:

$$t_n = \mathbb{E}[T_n] \leq n - 1 + \frac{n - 2}{n} t_{\lceil n/2 \rceil}.$$

Łatwo (przez indukcję) pokazać, że taka rekurencja implikuje, iż

$$t_n = O(n).$$

**Wniosek:** Średnia liczba porównań w algorytmie RandomSelect wynosi  $\Theta(n)$ , czyli algorytm działa w czasie liniowym w średnim przypadku.

### 7.3 Algorytm Select

Algorytm zwany jest także algorytmem *Magicznych Piątek*

- **Input:** Tablica  $A$ ,  $|A| = n$ , liczba  $k$
- **Output:**  $k$ -ta statystyka pozycyjna
- **Algorytm:**
  1. dzielimy  $A[p \dots q]$  na  $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$  pięcio elementowe części oraz ostatnią część z resztą
  2. Sortujemy każdą pięcio elementową część i wybieramy z nich mediany:

$$M = \left\{ m_1, m_2, \dots, m_{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \right\}$$

3. Znaleźć medianę z tablicy  $M$ : wywołujemy  $\text{Select}(M, 1, \lceil \frac{n}{5} \rceil, \lfloor \frac{\lceil \frac{n}{5} \rceil}{2} \rfloor)$  i oznaczmy ją jako  $X^7$
4. Ustaw  $X$  jako pivot w Partition

## 8 Ćwiczenia

tu będą pojawiały się notatki z ćwiczeń do przedmiotu Algorytmy i struktury danych na Politechnice Wrocławskiej na kierunku Informatyka Algorytmiczna rok 2025 semestr letni.

### 8.1 Lista 2

robiona na zajęciach 2025-03-10

#### 8.1.1 zadanie 1

Wylicz ile linii wypisze poniższy program (podaj wynik będący funkcją od  $n$  w postaci asymptotycznej  $\Theta(\cdot)$ ). Można założyć, że  $n$  jest potęgą liczby 3. w pseudo kodzie pojawia się następująca rekurencja:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$$

rozwiąże ją używając metody podstawienia. Niech  $n = 3^k, k = \log_3 n$ , wtedy:

$$T(3^k) = 2T(3^{k-1}) + 1$$

---

<sup>7</sup>nazywana też mediana median

---

```

1: function f(n)
2: if  $n > 1$  then
3:   print_line('still going')
4:   f(n/3)
5:   f(n/3)
6: end if

```

---

Zatem przyjmując  $S(k) = T(3^k)$  mamy:

$$S(k) = 2S(k-1) + 1$$

rozwiązując rekurencję otrzymujemy:

$$S(k) = 2^k - 1$$

zatem

$$T(n) = 2^{\log_3 n} - 1 = n^{\log_3 2} - 1 = \Theta(n^{\log_3 2})$$

analogicznie liczymy jaka jest wykonana “praca” wykonana przez program w drzewie rekursji.

### 8.1.2 zadanie 2

Niech  $f(n)$  i  $g(n)$  będą funkcjami asymptotycznie nieujemnymi (tzn. nieujemnymi dla dostatecznie dużego  $n$ ). Korzystając z definicji notacji  $\Theta$ , udowodnij, że:

$$\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n)).$$

*Dowód.* Z definicji notacji  $\Theta$  mamy:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff \exists c_1, c_2 > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, 0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

skoro  $f(n)$  i  $g(n)$  są asymptotycznie nieujemne to:

$$\exists n_f : \forall n \geq n_f, f(n) \geq 0$$

$$\exists n_g : \forall n \geq n_g, g(n) \geq 0$$

zatem

$$n_0 = \max\{n_f, n_g\}$$

a więc

$$f(n) \leq \max\{f(n), g(n)\}$$

$$g(n) \leq \max\{f(n), g(n)\}$$

dodając obie nierówności otrzymujemy:

$$f(n) + g(n) \leq 2 \cdot \max\{f(n), g(n)\}$$

zatem

$$\forall n \geq n_0 : \max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n) \leq 2 \cdot \max\{f(n), g(n)\}$$

a więc z definicji mamy

$$\max\{f(n), g(n)\} = \Theta(f(n) + g(n))$$

□

---

**Algorithm 9** Pierwszy fragment kodu

---

```
1: for  $i = 1$  to  $n$  do
2:    $j = i$ 
3:   while  $j < n$  do
4:      $sum = P(i, j)$ 
5:      $j = j + 1$ 
6:   end while
7: end for
```

---

---

**Algorithm 10** Drugi fragment kodu

---

```
1: for  $i = 1$  to  $n$  do
2:    $j = i$ 
3:   while  $j < n$  do
4:      $sum = R(i, j)$ 
5:      $j = j + j$ 
6:   end while
7: end for
```

---

### 8.1.3 zadanie 3

Wylicz asymptotyczną złożoność (używając notacji  $\Theta$ ) poniższych fragmentów programów:

Gdzie:

- koszt wykonania procedury  $P(i, j)$  wynosi  $\Theta(1)$ ,
- koszt wykonania procedury  $R(i, j)$  wynosi  $\Theta(j)$ .

*Dowód.*     • Pierwszy fragment kodu

- Wewnętrzna pętla wykonuje się  $n - i$  razy
- Koszt wykonania procedury  $P(i, j)$  wynosi  $\Theta(1)$
- Zatem koszt wykonania wewnętrznej pętli wynosi  $\Theta(n - i)$
- Zatem koszt wykonania całego fragmentu wynosi

$$\sum_{i=1}^n \Theta(n - i) = \Theta(n^2)$$

- Drugi fragment kodu

- Wewnętrzna pętla wykonuje się  $\log_2 n$  razy
- Koszt wykonania procedury  $R(i, j)$  wynosi  $\Theta(j)$
- Zatem koszt wykonania wewnętrznej pętli wynosi  $\Theta(\log_2 n)$
- Zatem koszt wykonania całego fragmentu wynosi

$$\sum_{i=1}^n \Theta(\log_2 n) = \Theta(n \log_2 n)$$

□

Dla pewności sprawdzone empirycznie:



#### 8.1.4 zadanie 4

Wyznacz asymptotyczne oszacowanie górne dla następujących rekurencji:

- $T(n) = 2T(n/2) + 1$
- $T(n) = 2T(n/2) + n$
- $T(n) = 3T(n/2) + n \log n$

Kożystając z **Master Theorem** możemy wyznaczyć ograniczenie dla tych rekurencji.

- $T(n) = 2T(n/2) + 1$

*Dowód.*

$$a = 2, b = 2, d = 0$$

$$\log_b a = \log_2 2 = 1 > 0 = d$$

$$T(n) = \Theta(n)$$

□

- $T(n) = 2T(n/2) + n$

*Dowód.*

$$a = 2, b = 2, d = 1$$

$$\log_b a = \log_2 2 = 1 = d$$

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

□

- $T(n) = 3T(n/2) + n \log n$

*Dowód.* Dolne ograniczenie

$$T(n) = 3T(n/2) + n \implies \text{Master Theorem } T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$$

Górne ograniczenie

$$T(n) = 3T(n/2) + n^{1.1} \implies \text{Master Theorem } T(n) = \Theta(n^{1.1})$$

□

### 8.1.5 zadanie 5

Zaprojektuj algorytm wczytujący z wejścia tablicę liczb  $A[1], \dots, A[N]$  i przygotowujący tablicę  $B$  tak, że na jej podstawie będzie potrafił odpowiadać na pytania:

1. ile wynosi suma elementów tablicy  $A$  od miejsca  $i$  do miejsca  $j$  włącznie, dla  $i < j$ .
2. Jaka jest złożoność czasowa Twojego algorytmu? Ile pamięci zajmuje tablica  $B$ ?
3. Ile zajmuje odpowiedź na jedno pytanie?

---

Przykładowy algorytm mógłby wyglądać następująco:

---

**Algorithm 11** Algorytm do zadania 5.

---

```
1:  $B[1] = A[1]$ 
2: for  $i = 2$  to  $N$  do
3:    $B[i] = B[i - 1] + A[i]$ 
4: end for
5: procedure SUM( $i, j$ )
6:   if  $i = 1$  then
7:     return  $B[j]$ 
8:   else
9:     return  $B[j] - B[i - 1]$ 
10:  end if
11: end procedure
```

---

Co tu się dzieje?

- W pierwszej pętli obliczamy sumy prefiksowe tablicy  $A$  i zapisujemy je w tablicy  $B$ .
- W procedurze Sum zwracamy różnicę między dwoma elementami tablicy  $B$ .
- Złożoność czasowa algorytmu wynosi  $\Theta(n)$ .
- Tablica  $B$  zajmuje  $\Theta(n)$  pamięci.
- Odpowiedź na jedno pytanie zajmuje  $\Theta(1)$  czasu.

### 8.1.6 zadanie 6

Pokaż, jak grać w grę w "10 pytań", w której wiadomo, że wybrana liczba jest dodatnia, ale nie jest na początku znane górne ograniczenie jej wartości. Ile pytań potrzebujesz, żeby zgadnąć dowolną liczbę (liczba pytań może zależeć od wielkości liczby)?

---

W grze "10 pytań" możemy zadać pytania w stylu "czy liczba jest większa od  $x$ ?". W ten sposób możemy zredukować przestrzeń poszukiwań. W pierwszym pytaniu zapytajmy, czy liczba jest większa od 1. Jeśli tak, to zapytajmy, czy liczba jest większa od 2. W ten sposób możemy zredukować przestrzeń poszukiwań do  $2^k$  dla pewnego  $k$ . W ten sposób możemy znaleźć dowolną liczbę w  $k$  pytaniach.

### 8.1.7 zadanie 7

Używając algorytmu **divide-and-conquer** do mnożenia liczb wykonaj mnożenie dwóch liczb binarnych 11011, 1010.

---

Algorytm **divide-and-conquer** do mnożenia liczb działa w następujący sposób:



---

**Algorithm 12** Algorytm do zadania 6.

---

```
1:  $k = 0$ 
2: while  $2^k < x$  do
3:    $k = k + 1$ 
4: end while
5:  $p = 2^{k-1}$ 
6:  $q = 2^k$ 
7: procedure BINARYSEARCH( $p, q$ )
```

---

1. Podziel liczby na dwie równe części.
2. Rekurencyjnie pomnóż te części.
3. Połącz wyniki.

Mnożenie dwóch liczb binarnych 11011 i 1010 możemy zrealizować w następujący sposób:

1. Podziel liczby na dwie równe części: 1101, 1 oraz 10, 10.
2. Rekurencyjnie pomnóż te części:  $1101 \cdot 10 = 11010$ .
3. Połącz wyniki:  $11010 + 110100 = 1000000$ .

---

**Algorithm 13** Algorytm do zadania 7 (pokazany na wykładzie)

---

```
1: procedure MUL( $x, y$ )
2:    $n = \max\{|x|, |y|\}$ 
3:   if  $n = 1$  then
4:     return  $x \cdot y$ 
5:   end if
6:    $x_L, x_R = \text{LeftMost} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \text{RightMost} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  bits of  $x$ 
7:    $y_L, y_R = \text{LeftMost} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \text{RightMost} \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  bits of  $y$ 
8:    $p_1 = \text{Mul}(x_L, y_L)$ 
9:    $p_2 = \text{Mul}(x_R, y_R)$ 
10:   $p_3 = \text{Mul}(x_L + x_R, y_L + y_R)$ 
11:  return  $p_1 \cdot 2^{2n} + (p_3 - p_1 - p_2) \cdot 2^n + p_2$ 
```

---

## 8.2 Lista 3

robiona na zajęciach 2025-03-24

### 8.2.1 zadanie 1

Podaj algorytm scalający  $k$  posortowanych list tak aby powstała jedna posortowana lista  $nb$  (liczba wszystkich elementów na listach to  $n$ ) działający w czasie  $O(n \log k)$ .

---

Algorytm ten można zrealizować w następujący sposób:

### 8.2.2 zadanie 2

Zdefiniujmy algorytm *k-MergeSort* jako uogólnienie algorytmu sortowania przez scalanie. Różni się od omawianego na wykładzie algorytmu sortowania przez scalanie tym, że dzieli sortowaną tablicę rekurencyjnie na  $k$  równych części (zakładamy, że liczba elementów w tablicy jest potęgą  $k$  ( $n = k^l$ )). Używając wyniku z zadania 1 proszę wykazać dla jakiego  $k$  algorytm ma najmniejszą asymptotyczną złożoność obliczeniową liczby porównań (górne ograniczenie  $O(\cdot)$ ).

---

**Algorithm 14** Algorytm do zadania 1.

---

```
1: procedure MERGELISTS( $L_1, L_2, \dots, L_k$ )
2:    $n = \sum_{i=1}^k |L_i|$ 
3:    $B = \text{tablica}[1 \dots n]$ 
4:   heap = MinHeap
5:   for  $i = 1$  to  $k$  do
6:     heap.insert( $L_i.\text{pop}()$ )
7:   end for
8:   for  $i = 1$  to  $n$  do
9:      $B[i] = \text{heap.pop}()$ 
10:    heap.insert( $L_i.\text{pop}()$ )
11:   end for
12: end procedure
```

---

Algorytm *k-MergeSort* spełnia rekurencję:

$$T(n) = kT\left(\frac{n}{k}\right) + \Theta(n \log k)$$

gdzie  $\Theta(n \log k)$  to koszt scalania  $k$  posortowanych list (zadanie 1). Z **Master Theorem** otrzymujemy, że algorytm ma złożoność:

$$T(n) = \Theta(n \log_k n)$$

### 8.2.3 zadanie 3

Założmy że tablica  $A = [a_1, \dots, a_n]$  jest do pewnego momentu  $k$  posortowana malejąco i dalej rosnąco (tzn. dla  $\forall i < k : a_i > a_{i+1}$  oraz  $\forall i \geq k : a_i < a_{i+1}$ ). Zaprojektuj algorytm znajdujący minimalny element w tablicy  $A$ , którego złożoność obliczeniowa będzie wynosić  $O(\log n)$ . Udowodnij poprawność działania zaproponowanego algorytmu.

---

- Algorytm ten można zrealizować w następujący sposób:

---

**Algorithm 15** Algorytm do zadania 3.

---

```
1: procedure FINDMIN( $A, p, q$ )
2:   if  $p = q$  then
3:     return  $A[p]$ 
4:   end if
5:    $m = \lfloor \frac{p+q}{2} \rfloor$ 
6:   if  $A[m] > A[m+1]$  then
7:     return FindMin( $A, m+1, q$ )
8:   else
9:     return FindMin( $A, p, m$ )
10:  end if
11: end procedure
```

---

- Przykład:

- $A = [10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]$
- $m = 5$
- $A[m] = 5, A[m+1] = 4$
- FindMin( $A, 6, 10$ )

- $m = 8$
  - $A[m] = 2, A[m + 1] = 1$
  - $\text{FindMin}(A, 9, 10)$
  - $m = 9$
  - $A[m] = 1, A[m + 1] = 1$
  - **Zwracamy**  $A[m] = 1$
- Złożoność obliczeniowa: Algorytm spełnia rekurencję:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(1)$$

Z **Master Theorem** otrzymujemy, że algorytm ma złożoność:

$$T(n) = \Theta(\log n)$$

□

#### 8.2.4 zadanie 4

Zastąpienie użycia QuickSort'a, dla tablic małych rozmiarów, algorytmem InsertionSort jest częstym sposobem na zwiększenie efektywności algorytmu rozwiązującego problem sortowania. Pokaż, że jeśli zmodyfikujesz bazowy przypadek rekurencji w algorytmie QuickSort w taki sposób, że dla tablic o  $\leq k$  elementach wywoływany będzie InsertionSort (zamiast rekurencyjnego wywołania QuickSort'a), to wartość oczekiwana liczby porównań będzie wynosić  $\Theta(nk + n \log \frac{n}{k})$ . Jakie  $k$  należy wybrać, aby zminimalizować tę złożoność?

---

Należy rozważyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej  $\text{compInsertSort}_n \equiv R_n$

$$\mathbb{E}[R_n] = \frac{n(n-1)}{4}$$

Niech  $T_n$  – liczba porównań w *Hybrid Sortie* oraz

$$X_k^n = \begin{cases} 1 & \Leftarrow \text{partition podzielił tablice na } |k| \text{ } n - k \text{split}(k, n - k) \\ 0 & \Leftarrow \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

bedzie funkcja indykatorową. Wtedy

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} X_k \cdot (T_k + T_{n-k} + n - 1)$$

Przyjmimy oznaczenie  $\mathbb{E}[T_n] = t_n$ , wtedy

$$\begin{aligned} t_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_k] \cdot (t_k + t_{n-k} + n - 1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot (t_k + t_{n-k} + n - 1) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (t_k + t_{n-k} + n - 1) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} t_k + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} t_{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} n - 1 \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} t_k + n - 1 \end{aligned}$$

Mnożąc obie strony równania przez  $n$  otrzymujemy

$$nt_n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} t_k + n^2 - n$$

Zamieniając  $n \rightarrow n-1$  otrzymujemy

$$(n-1)t_{n-1} = 2 \sum_{k=0}^{n-2} t_k + n^2 - 3n + 2$$

Odejmując stronami otrzymujemy

$$nt_n - (n-1)t_{n-1} = 2t_{n-1} + 2n - 2$$

Upraszczając:

$$nt_n = (n+1)t_{n-1} + 2(n-1)$$

Dzieląc obie strony przez  $n(n+1)$  otrzymujemy

$$\frac{t_n}{n+1} = \frac{t_{n-1}}{n} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$$

teraz przyjmujemy oznaczenie  $\varphi_n = \frac{t_n}{n+1}$ , wtedy

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)}$$

naależy rozwiązać powyższą rekurencję itracyjnie, biorąc pod uwagę, że w pewnym momencie następuje zmiana z algorytmu *QuickSort* na *InsertionSort*, niech  $k$  tym momentem, wtedy

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \varphi_{n-1} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} = \\ &= \sum_{i=k+1}^n \frac{2(i-1)}{i(i+1)} + \frac{k(k-1)}{4(k+1)} \\ &= \sum_{i=k+1}^n \left( \frac{2}{i+1} - \frac{1}{i} \right) + \frac{k(k-1)}{4(k+1)} = \\ &= 2 \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i+1} - \sum_{i=k+1}^n \frac{1}{i} + \frac{k(k-1)}{4(k+1)} = \\ &= 2(H_{n+1} - H_k) - (H_n - H_k) + \frac{k(k-1)}{4(k+1)} = \\ &= H_n + \frac{2}{n+1} - H_k - \frac{k(k-1)}{4(k+1)} \end{aligned}$$

Podstawiając  $t_n = (n+1)\varphi_n$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} t_n &= (n+1) \left( H_n + \frac{2}{n+1} - H_k - \frac{k(k-1)}{4(k+1)} \right) = \\ &= (n+1)H_n + 2 - (n+1)H_k - \frac{k(k-1)}{4(k+1)}(n+1) \end{aligned}$$

Ostatecznie prowadzi to do asymptotycznego wzoru na liczbę porównań

$$\mathbb{E}[T_n] = \Theta \left( nk + n \log \frac{n}{k} \right)$$

□

### 8.2.5 zadanie 5

Załóżmy, że masz do wyboru jeden z trzech algorytmów rozwiązujących postawiony Ci problem wielkości  $n$ :

1. **Algorytm A**: rozwiązuje problem dzieląc go rekurencyjnie na 5 pod-problemów o połowę mniejszych i scalając ich rozwiązania w czasie  $\Theta(n \log n)$ .
2. **Algorytm B**: rozwiązuje problem dzieląc go rekurencyjnie na 2 pod-problemy rozmiaru  $n - 1$  i scala ich rozwiązania w czasie stałym.
3. **Algorytm C**: rozwiązuje problem dzieląc go rekurencyjnie na 9 pod-problemów rozmiaru  $n/3$  i scalając ich rozwiązania w czasie  $\Theta(n^2)$ .

Jaka jest złożoność obliczeniowa tych algorytmów? Który z nich byś wybrał? Odpowiedź uzasadnij.

---

1. Spełniona zostaje rekurencja:

$$T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n \log n)$$

Ograniczmy ją sobie z dołu i z góry:

$$T(n) = \Omega(n \log n)$$

$$T(n) = O(n \log n)$$

Zatem z **Master Theorem** otrzymujemy, że złożoność obliczeniowa algorytmu A wynosi  $\Theta(n \log n)$ .

2. Spełniona zostaje rekurencja:

$$T(n) = 2T(n - 1) + \Theta(1)$$

Ograniczmy ją sobie z dołu i z góry:

$$T(n) = \Omega(n)$$

$$T(n) = O(n)$$

Zatem z **Master Theorem** otrzymujemy, że złożoność obliczeniowa algorytmu B wynosi  $\Theta(n)$ .

3. Spełniona zostaje rekurencja:

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + \Theta(n^2)$$

Ograniczmy ją sobie z dołu i z góry:

$$T(n) = \Omega(n^2)$$

$$T(n) = O(n^2)$$

Zatem z **Master Theorem** otrzymujemy, że złożoność obliczeniowa algorytmu C wynosi  $\Theta(n^2)$ .

### 8.2.6 zadanie 6

Powiedzmy, że masz do wykonania  $n$  zadań, gdzie każde z nich wymaga  $t_j$  minut pracy. Chcesz wykonać wszystkie zadania maksymalizując zadowolenie przełożonego poprzez minimalizację średniego czasu zakończenia każdego zadania. Uzasadnij, w jakiej kolejności powinieneś wykonywać zadania.

---

Możemy przyjąć, że mamy tablicę  $T = [t_1, t_2, \dots, t_n]$  z czasami trwania zadań. Możemy zrealizować algorytm w następujący sposób:

- Zadania powinny być wykonywane w kolejności rosnącej czasu pracy. Posortować tablicę  $T$  rosnąco i wykonywać zadania pokoleji.

- Dla każdego zadania  $j$  zakończenie zadania  $j$  w czasie  $t_j$  minimalizuje średni czas zakończenia każdego zadania. Dlaczego się tak dzieje?  
Rozpatrzmy najpierw mały przykład:  
Mamy 3 zadania

$$T = [t_1 = 3, t_2 = 5, t_3 = 4].$$

Posortowane zadania to

$$T = [t_1 = 3, t_3 = 4, t_2 = 5].$$

teraz czasy zakończenia wykonywania zadań, to

$$t = [t_1, t_1 + t_3, t_1 + t_3 + t_2]$$

$$t = [3, 3 + 4, 3 + 4 + 5]$$

Średni czas zakończenia zadania to

$$\frac{3 + 7 + 12}{3} = 7\frac{1}{3}$$

Rozważmy teraz ogólny problem:

- **Input:** tablica z długościami trwania wykonywania zadań  $T = [t_1, t_2, \dots, t_n]$
- **Output:** pewna permutacja tablicy  $T$ , która minimalizuje średni czas zakończenia zadania –  $\sigma(T)$
- **Problem:** należy znaleźć pewne minimum:

$$\min \{f(\sigma(T)) : \sigma \in S_n\}$$

gdzie  $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją postaci:

$$f(T) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i t_j$$

można to zapisać jako:

$$f(T) = \frac{nt_1 + (n-1)t_2 + \dots + 2t_{n-1} + t_n}{n}$$

- **Rozwiązanie:** minimalizacja funkcji  $f$  polega na posortowaniu tablicy  $T$  rosnąco, należy jednak udowodnić, że permutacja  $\sigma$  sortująca tablicę  $T$  jest optymalna. **Dowód:**

Założmy, że istnieje optymalna permutacja  $\tau$ , w której występuje para indeksów  $i < j$  taka, że  $t_i > t_j$ . Rozważmy nową permutację  $\tau'$ , otrzymaną przez zamianę miejscami zadań  $i$  oraz  $j$ , czyli:

$$\tau' = (\dots, t_j, \dots, t_i, \dots)$$

Przyjrzyjmy się wpływowi tej zamiany na funkcję celu

$$f(T) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k t_{\tau(l)}.$$

W wyniku zamiany, zadania  $t_i$  i  $t_j$  pojawiają się na pozycjach  $i$  oraz  $j$ , odpowiednio, co wpływa na sumy częściowe w następujący sposób:

$$\Delta = f(\tau') - f(\tau) = (t_i - t_j)(j - i).$$

Skoro  $j - i > 0$  oraz przy założeniu  $t_i > t_j$ , mamy

$$\Delta > 0.$$

Oznacza to, że funkcja celu  $f$  jest mniejsza dla permutacji  $\tau'$  niż dla  $\tau$ , czyli:

$$f(\tau') < f(\tau).$$

Sprzeczność z założeniem, że  $\tau$  była optymalna, wynika z faktu, iż zawsze można dokonać zamiany pary, gdzie wcześniejsze zadanie trwa dłużej niż późniejsze, co zmniejsza średni czas zakończenia.

W związku z tym, aby nie istniały żadne takie "inwersje", permutacja optymalna musi spełniać warunek

$$t_{\tau(1)} \leq t_{\tau(2)} \leq \dots \leq t_{\tau(n)},$$

czyli musi być uporządkowana rosnąco.

**Wniosek:** Minimalizacja średniego czasu zakończenia zadań jest osiągana przez sortowanie tablicy  $T$  w porządku rosnącym.