Notatki Programowanie Funkcyjne

Jakub Kogut

18 marca 2025

Spis treści

1 Wstęp

Notatki z programowania funkcyjnego prowadzone przez GOATA profesora Jacka Cichonia na semestrze 4 2025. Zajęcia laboratoryjne prowadzone są przez dr Dominika Bojko.

2 Wykład 11-03-2025

Na tym wykładzie skupimy się na przygotowaniu środowiska pracy do programowania funkcyjnego w języku Haskell.

2.1 Struktura kodu w Haskell

Przykładowy kod wygląda następująco:

```
{-  file = W2.hs
    autor = JK
    date = 11-03-2025
-}
module W2 where
id’ x = x
```

Następnie w terminalu, w którym mamy odpalone GHCI wpisujemy:

```
>:l W2.hs
>:r
>id’ 5
5
>:t id’
id’ :: a -> a //co oznacza id :: forall a => a->a
```

Co matematycznie można zapisać jako:

$$exp = (\lambda a : Typ \to (a \to a))$$

- Przykład:
  - $exp(Int) :: Int \to Int$
  - $exp(Bool) :: Bool \to Bool$
  - $exp(Double) :: Double \to Double$

Cichoń radzi, aby narpiew zastanowić się jaki powinnen być typ funkcji, a dopiero potem zastanawiać się nad implementacją, ponoć oszczędza to *czas i nerwy*.

2.2 Typy w Haskellu

- Typy proste:
  - Int
  - Double
  - Char
  - Bool
- Typy złożone:
  - Listy

- Krotki
- Funkcje

- Przykład:
  - funkcja Collatz'a $coll :: Int \to Int$

```
coll n
    | n==1 = 1
    | even n = coll (n ‘div‘ 2)
    | odd n = coll (3*n+1)
```

Symbol | oznacza wyrażenie z wykożystaniem strażników *guards*. Zapis taki jest podobny do matematycznego zapisu funkcji:

$$coll(n) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n = 1 \\ coll(\frac{n}{2}) & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \\ coll(3n+1) & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$$

Nie jest to bezpieczna funkcja, ponieważ dla liczb ujemnych zapętli się ona w nieskończoność. Można zauważyć, że funkcja ta zwraca zawsze liczbę 1. Ciekawa jest liczba kroków, które są potrzebne do osiągnięcia tej wartości. Dla $n = 27$ potrzeba 111 kroków, dla $n = 28$ potrzeba 18 kroków, dla $n = 29$ potrzeba 111 kroków.

  - Nowa funkcja Collatz'a
    collatz::(Int,Int) $\to$ (Int,Int)

```
collatz (n,steps)
    | n==1 = (n,steps)
    | even n = collatz (n ‘div‘ 2,steps+1)
    | odd n = collatz (3*n+1,steps+1)
```

Funkcja ta zwraca parę liczb, pierwsza to wynik funkcji Collatz'a, a druga to liczba kroków potrzebna do osiągnięcia tej wartości.
Spróbujmy ją sobie odpalić:

```
>collatz (97,0)
(1,118)
```

Jak widać dla $n = 97$ potrzeba 118 kroków, aby osiągnąć wartość 1.

  - Funkcja lenz *lenght of collatz* zwracająca długość ciągu Collatz'a dla danej liczby:
    lenz::Int $\to$ Int

```
lenz n = snd (collatz (n,0))
```

2.3 Listy

Definicja listy w Haskellu:
[a] - lista elementów typu a

$$[\mathrm{a}] = \{[a_1, \ldots, a_k] \mid a_1, \ldots, a_k \in a, k \in \mathbb{N}\}$$

```
>:t [1,2,3]
[1,2,3] :: Num a => [a]
>:t [1::Integer, 2, 3]
[1,2,3] :: [Integer]
```

2.3.1 Operacje na listach

- Dodawanie elementu na początku listy

```
>:t (1:[2,3])
(1:[2,3]) :: Num a => [a]
```

- Konkatenacja list

```
>:t [1,2]++[3,4]
[1,2]++[3,4] :: Num a => [a]
```

2.3.2 Podstawowe funkcje operujace na listach

- length::[a] → Int
  - length [] = 0
  - length (x:xs) = 1 + length xs
- head::[a] → a
  zwraca pierwszy element listy
  - head (x:xs) = x
  - head [] = error "empty list"
- tail::[a] → [a]
  zwraca listę bez pierwszego elementu
  - tail (x:xs) = xs
  - tail [] = error "empty list"
- last::[a] → a
  zwraca ostatni element listy
  - last [x] = x
  - last (x:xs) = last xs
  - last [] = error "empty list"
- filter::(a → Bool) → [a] → [a]
  - filter p [] = []
  - filter p (x:xs) = if p x then x : filter p xs else filter p xs
  - filter (n → n>0) [-1,2,-3,4] = [2,4]
  - filter even [1..10] = [2,4,6,8,10]
    Jak zdefiniować funkcje filter:

    ```
    filter p [] = []
    filter p (x:xs)
        | p x = x : filter p xs
        | otherwise = filter p xs
    ```
- map::(a → b) → [a] → [b]
  zwraca listę, która powstaje zastosowaniem funkcji do każdego elementu listy
  - map f [] = []
  - map f (x:xs) = f x : map f xs

– map (n $\rightarrow$ n*n) [1,2,3] = [1,4,9]
– map (n $\rightarrow n^3$) [1..10] = [1..1000]

gdzie **[1..10]** to skrót od **[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]**

2.3.3 List comprehension

Polega na tworzeniu listy na podstawie innych list.

$$\boxed{[fx_1, x_2, x_3 \mid x_1 \leftarrow xs, x_2 \leftarrow ys, x_3 \leftarrow zs]}$$

Przykład:

- chcemy stworzyć listę wszystkich trójek pitagorejskich ponizej liczby n.

```
pitagorasTrzy n = [(x,y,z) | x <- [1..n], y <- [1..n], z <- [1..n],
                   x^2 + y^2 == z^2, gcd xy == 1]
```

3 Wykład 18-03-2025

3.1 implementacje funkcji w Haskellu

3.1.1 QuickSort

w tej implementacji za *pivot* przyjmujemy pierwszy element listy.

```
qS [] = []
qs (x:xs) = (qS [y | y <- xs, y < x]) ++
            [x] ++
            (qS [y | y <- xs, y >= x])
```

3.1.2 *partition*

```
partition :: (a->Bool) -> [a] -> ([a],[a])
partition _ [] = ([],[])
partition p (x:xs) = if p x then (x:l,r)
                            else (l,x:r)
                    where (l,r) = partition p xs
```

3.1.3 Lepsza implementacja QuickSort'a

```
qSort [] = []
qSort (x:xs) = (qSort l) ++ [x] ++ (qSort r)
            where (l,r) = partition (<x) xs
```

wyrażenie `(<x)` jest zastosowaniem *slicingu*. Działa to następująco:

$$(< x) \equiv \lambda y \rightarrow y < x$$

3.1.4 InsertSort

```
inSort [] = []
inSort (x:xs) = l ++ [x] ++ r
                where sxs = inSort xs
                      (l,r) = partition (<x) sxs
```

Aby sprawdzić prędkość wykonywania funkcji w Haskellu możemy użyć następującej funkcji

```
>:set +s
>take 10 (inSort [1000,999..1])
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
(0.02 secs, 5,499,824 bytes)
```

3.1.5 *zip*

Powtórka z ćwiczen *Zadanie 10* **??**

3.1.6 *zipWith*

Podobnie znowu napisane na ćwiczeniach **??**

3.1.7 funkcje wykonujące operacje na listach

funkcja sumująca:

```
sumList [] = 0
sumList (x:xs) = x + sumList xs

> sumList [1..1000]
500500
```

funkcja mnożąca:

```
pro [] = 1
pro (x:xs) = x * pro xs

>pro [1..9]
362880
```

teraz abstrachując ten koncept możemy napisać funkcję *foldl*[1], która działa na danym monoidzie $M = (M, \cdot, e)$

```
foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
foldl’ op e [] = e
foldl’ op e (x:xs) = op x (foldl’ op e xs)

ghci> foldl’ (*) 1 [1..10]
3628800
ghci> foldl’ (+) 1 [1..10]
56
ghci> foldl’ (+) 0 [1..10]
55
ghci> foldl’ (*) 0 [1..10]
0
```

[1] jest to operacja składająca liste w nastepujący sposób $(((e \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot \ldots) \cdot x_n$, istneje analogiczna *foldr* działająca odwrotnie $x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot \ldots (x_n \cdot e)))$

4 Ćwiczenia

W tym miejscu będa pojawiały się notatki z laboratorów (ćwiczeń)

4.1 Ćwiczenia 11-03-2025

4.1.1 Zadanie 1

```
power :: Int => Int => Int
power x y = y ^ x

p2 = power 4
p3 = power 3
```

1. Wyznacz w GCHI wartość wyrażenia $(p2 \circ p3)^2$ i wyjaśnij, dlaczego otrzymałeś ten wynik.
2. Zbadaj typy funkcji $p2$, $p3$ i $(p2 \circ p3)$.
3. Zapisz powyższe funkcje za pomocą wyrażeń lambda.

$$Int \to Int \to Int$$

Zapis strzałkowy definuje nam typ funkcji operacja $=>$ jest wiążaca z prawej strony, wiec można by było to również zapisać jako:

$$power :: Int \to (Int \to Int)$$

1. podpunkt 1
$$(p2 \circ p3)^2 = p2(p3(x))^2 = 4(3^x)^2 = 4 \cdot 9^x$$
2. podpunkt 2
```
>:t p2
p2 :: Int -> Int
>:t p3
p3 :: Int -> Int
>:t (p2 . p3)
(p2 . p3) :: Int -> Int
```
3. podpunkt 3
```
p2 = \x -> power 4 x
p3 = \x -> power 3 x
```

4.1.2 Zadanie 2

$$2 \wedge 3 \wedge 2, \quad (2 \wedge 3) \wedge 2, \quad 2 \wedge (2 \wedge 3).$$

Dowiedz się, jaka jest łączność oraz siła operatora $\wedge$ za pomocą polecenia:

$$: i(\wedge).$$

```
>:i (^)
(^) :: (Num a, Integral b) => a -> b -> a
        -- Defined in ‘GHC.Real’
infixr 8 ^
```

Operator $\wedge$ jest prawostronnie łączny, a jego siła wynosi 8 (najwyższa możliwa wartość, wyłącznie wyższe jest nałożenie funkcji na zmienną). W nawiasie **Num a, Integraf b** oznacza, że operator $\wedge$ bierze jeden argument typu **Num** i drugi typu **Integral**.

$$2 \wedge 3 \wedge 2 = 2 \wedge (3 \wedge 2) = 2 \wedge 9 = 512$$

$$(2 \wedge 3) \wedge 2 = 8 \wedge 2 = 64$$

$$2 \wedge (2 \wedge 3) = 2 \wedge 8 = 256$$

4.1.3 Zadanie 3

```
f : : Int => Int
f x = x ^ 2
g : : Int => Int => Int
g x y = x+2*y
h : : . . . .
h x y = f ( g x y )
```

1. Jaki jest typ funkcji h? (tzn. uzupełnij ... w powyższym listingu)
2. Czy $h = f \circ g$?
3. Czy $h\,x = f(g\,x)$?

---

1. Typ funkcji h to:
$$h :: Int \to Int \to Int$$
2. Nie, ponieważ:
$$h(x, y) = f(g(x, y)) = f(x + 2y) = (x + 2y)^2$$
3. Tak, ponieważ:
$$h(x) = f(g(x)) = f(x + 2x) = (x + 2x)^2 = 9x^2$$

4.1.4 Zadanie 4

Zapisz operacje binarne $(+)$, $(*)$ za pomocą lambda wyrażeń.

```
add = \x -> (\y -> x + y)
mul = \x -> (\y -> x * y)
```

Co to daje? Mozna teraz zapisać 2+3 jako:

- add 2 3
- (add 2) 3
- add 2 (3)
- ($3) (2 add)

4.1.5 Zadanie 5

Zapisz funkcje:

$$f(x) = 1 + x \cdot (x+1), \quad g(x,y) = x + y^2, \quad h(y,x) = x + y^2$$

za pomocą lambda wyrażeń w językach C++, Python, JavaScript oraz Haskell.

W języku Haskell:

```
f = \x -> 1 + x * (x + 1)
g = \x -> \y -> x + y^2
h = \y -> \x -> x + y^2
```

W języku Python:

```
f = lambda x: 1 + x * (x + 1)
g = lambda x, y: x + y**2
h = lambda y, x: x + y**2
```

W języku JavaScript:

```
f = x => 1 + x * (x + 1)
g = (x, y) => x + y**2
h = (y, x) => x + y**2
```

W języku C++:

```
auto f = [](int x) { return 1 + x * (x + 1); };
auto g = [](int x, int y) { return x + y*y; };
auto h = [](int y, int x) { return x + y*y; };
```

4.1.6 Zadanie 6

Ustalmy zbiory A, B, C. Niech

$$\mathrm{curry} : C^{B\times A} \to (C^B)^A$$

będzie funkcją zadaną wzorem:

$$\mathrm{curry}(\varphi) = \lambda a \in A \to (\lambda b \in B \to \varphi(b,a)).$$

oraz niech

$$\mathrm{uncurry} : (C^B)^A \to C^{B\times A}$$

będzie zadana wzorem:

$$\mathrm{uncurry}(\psi)(b,a) = (\psi(a))(b).$$

1. Pokaż, że $\mathrm{curry} \circ \mathrm{uncurry} = \mathrm{id}_{(C^B)^A}$ oraz $\mathrm{uncurry} \circ \mathrm{curry} = \mathrm{id}_{C^{B\times A}}$.
2. Wywnioskuj z tego, że $|(C^B)^A| = |C^{B\times A}|$. Przypomnij sobie dowód tego twierdzenia, który poznałeś na pierwszym semestrze studiów.
3. Spróbuj zdefiniować w języku Haskell odpowiedniki funkcji `curry` i `uncurry`.

1. Pokażemy, że $\text{curry} \circ \text{uncurry} = \text{id}_{(C^B)^A}$ oraz $\text{uncurry} \circ \text{curry} = \text{id}_{C^{B\times A}}$.

   - $\text{curry} \circ \text{uncurry}$

$$
\begin{aligned}
(\text{curry} \circ \text{uncurry})(\psi) &= \text{curry}(\text{uncurry}(\psi)) \\
&= \text{curry}(\lambda a \in A \to (\lambda b \in B \to \psi(a)(b))) \\
&= \lambda a \in A \to (\lambda b \in B \to \psi(a)(b)).
\end{aligned} \tag{1}
$$

   - $\text{uncurry} \circ \text{curry}$

$$
\begin{aligned}
(\text{uncurry} \circ \text{curry})(\varphi) &= \text{uncurry}(\text{curry}(\varphi)) \\
&= \text{uncurry}(\lambda a \in A \to (\lambda b \in B \to \varphi(b, a))) \\
&= \lambda b \in B \to (\lambda a \in A \to \varphi(b, a)).
\end{aligned} \tag{2}
$$

   Z powyższych równań wynika, że $\text{curry} \circ \text{uncurry} = \text{id}_{(C^B)^A}$ oraz $\text{uncurry} \circ \text{curry} = \text{id}_{C^{B\times A}}$. □

2. Możemy pokazać że `curry` i `uncurry` są iniekcjami niewprost, nakładając odpowiednio przeciwne funkcje na obie strony równości:

   - Załóżmy, że $\text{curry}(\varphi_1) = \text{curry}(\varphi_2)$. Wtedy:

$$
\begin{aligned}
\text{curry}(\varphi_1)(a)(b) &= \text{curry}(\varphi_2)(a)(b) \\
\varphi_1(b, a) &= \varphi_2(b, a) \\
\varphi_1 &= \varphi_2.
\end{aligned} \tag{3}
$$

   - Załóżmy, że $\text{uncurry}(\psi_1) = \text{uncurry}(\psi_2)$. Wtedy:

$$
\begin{aligned}
\text{uncurry}(\psi_1)(b, a) &= \text{uncurry}(\psi_2)(b, a) \\
\psi_1(a)(b) &= \psi_2(a)(b) \\
\psi_1 &= \psi_2.
\end{aligned} \tag{4}
$$

   A więc istnieje biekcja między $(C^B)^A$ i $C^{B\times A}$, co oznacza, że te zbiory mają taką samą moc. □

3. W języku Haskell funkcje `curry` i `uncurry` można zdefiniować następująco:

```
curry :: ((b, a) -> c) -> a -> b -> c
curry f x y = f (y, x)
```

```
uncurry :: (a -> b -> c) -> (a, b) -> c
uncurry f (x, y) = f x y
```

4.1.7 Zadanie 7

Podaj przykłady funkcji następujących typów:

$$(\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow \text{Int}$$

$$(\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow (\text{Int} \Rightarrow \text{Int})$$

$$(\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow (\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow (\text{Int} \Rightarrow \text{Int})$$

- Funkcja typu (Int $\Rightarrow$ Int) $\Rightarrow$ Int:

```
f :: (Int -> Int) -> Int
f g = g 0
```

- Funkcja typu (Int $\Rightarrow$ Int) $\Rightarrow$ (Int $\Rightarrow$ Int):

```
f :: (Int -> Int) -> (Int -> Int)
f g x = g (g x)
```

- Funkcja typu (Int $\Rightarrow$ Int) $\Rightarrow$ (Int $\Rightarrow$ Int) $\Rightarrow$ (Int $\Rightarrow$ Int):

```
f :: (Int -> Int) -> (Int -> Int) -> (Int -> Int)
f g h x = g (h x)
```

4.1.8 Zadanie 8

Załóżmy, że chcesz oprogramować funkcję, która dla danych liczb a, b oraz funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblicza

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Jaki powinien być typ tej funkcji?

Typ tej funkcji powinien być następujący:

$$\text{Num(a)} \implies a \to a \to (a \to a) \to a$$

mogłaby ona wyglądać następująco:

```
integral :: (Double -> Double) -> Double -> Double -> Double
integral f a b = undefined
```

4.1.9 Zadanie 9 – (Eliminacja Pętli)

Wybierz jeden z języków Python, C++ lub JavaScript.

1. Masz daną (czyli oprogramowaną) funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Oprogramuj funkcję, która dla danego $n \in \mathbb{N}$ oblicza
$$\sum_{k=0}^{n} f(k).$$
Zrób to najpierw (standardowo) za pomocą pętli, a potem oprogramuj ją bez użycia pętli, za pomocą rekursji.

2. Rozważamy następującą funkcję napisaną w pseudokodzie:

```
FUNCTION f(x: DOUBLE): DOUBLE
BEGIN
    DOUBLE y = sin(x);
    RETURN y*y + y + x;
ENDFNC
```

Oprogramuj tę funkcję w wybranym języku i następnie wyeliminuj zmienną lokalną y z tego kodu, bez pogarszania jego efektywności.

1. Oto rozwiązanie w języku C++:

```cpp
#include <iostream>
using namespace std;

// Example implementation of function f: N -> N.
// You can replace this with any function of type int -> int.
int f(int x) {
    // Example: f(x) = x + 1
    return x + 1;
}

// Function that sums using a loop:
int sumLoop(int n) {
    int sum = 0;
    for (int k = 0; k <= n; ++k) {
        sum += f(k);
    }
    return sum;
}

// Function that sums using recursion:
int sumRec(int n) {
    if(n == 0)
        return f(0);
    else
        return sumRec(n - 1) + f(n);
}

int main() {
    int n;
    cout << "Enter n: ";
    cin >> n;
    cout << "Sum computed with loop: " << sumLoop(n) << endl;
    cout << "Sum computed recursively: " << sumRec(n) << endl;
    return 0;
}
```

funkcja `sumLoop` oblicza sumę za pomocą pętli, a funkcja `sumRec` oblicza sumę rekurencyjnie.

$$\text{sumRec}(n) = \begin{cases} f(0) & \text{gdy } n = 0 \\ \text{sumRec}(n-1) + f(n) & \text{gdy } n > 0 \end{cases}$$

2. Rozwiazanie w Haskellu:

```haskell
f :: Double -> Double
f x = sin x * sin x + sin x + x
```

```haskell
f' :: Double -> Double
f' x = sin x * sin x + sin x + x
```

4.1.10 Zadanie 10

Zaimplementuj samodzielnie następujące funkcje działające na listach z Prelude:

1. map
2. zip
3. zipWith
4. filter
5. take
6. drop
7. fib

---

1. Funkcja `map`:

```
map' :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map' f [] = []
map' f (x:xs) = f x : map' f xs
```

2. Funkcja `zip`[2]:

```
zip' :: [a] -> [b] -> [(a, b)]
zip' [] _ = []
zip' _ [] = []
zip' (x:xs) (y:ys) = (x, y) : zip' xs ys
```

3. Funkcja `zipWith`[3]:

```
zipWith' :: (a -> b -> c) -> [a] -> [b] -> [c]
zipWith' _ [] _ = []
zipWith' _ _ [] = []
zipWith' f (x:xs) (y:ys) = f x y : zipWith' f xs ys
```

4. Funkcja `filter`[4]:

```
filter' :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
filter' _ [] = []
filter' p (x:xs)
    | p x = x : filter' p xs
    | otherwise = filter' p xs
```

5. Funkcja `take`[5]:

[2]Funkcja `zip` zwraca listę par, które są złożone z elementów listy wejściowej. Jeśli jedna z list jest krótsza, to wynikowa lista będzie miała długość krótszej z nich.
Przykład: `zip [1,2,3] ['a','b','c','d']` zwróci `[(1,'a'),(2,'b'),(3,'c')]`.

[3]Funkcja `zipWith` działa podobnie jak `zip`, ale zamiast zwracać parę elementów, zwraca wynik funkcji, która jest podana jako argument.
Przykład: `zipWith (+) [1,2,3] [4,5,6]` zwróci `[5,7,9]`.

[4]Funkcja `filter` zwraca listę elementów, które spełniają warunek podany jako argument.
Przykład: `filter even [1..10]` zwróci `[2,4,6,8,10]`.

[5]Funkcja `take` zwraca listę składającą się z n pierwszych elementów listy wejściowej.
Przykład: `take 3 [1,2,3,4,5]` zwróci `[1,2,3]`.

```
take' :: Int -> [a] -> [a]
take' 0 _ = []
take' _ [] = []
take' n (x:xs) = x : take' (n - 1) xs
```

6. Funkcja `drop`[6]:

```
drop' :: Int -> [a] -> [a]
drop' 0 xs = xs
drop' _ [] = []
drop' n (_:xs) = drop' (n - 1) xs
```

7. Funkcja `fib`[7]:

```
fib :: Int -> [Int]
fib n = take' n (map' fib' [0..])
    where
        fib' 0 = 0
        fib' 1 = 1
        fib' n = fib (n - 1) + fib (n - 2)
```

Fajne złożenie funkcji `fib` z `zipWith`:

```
fib :: [Int]
fib = 0 : 1 : zipWith (+) fib (tail fib)
```

co pozwala na generowanie listy liczb Fibonacciego w nieskończoność. Na przykład `take 10 fib` zwróci `[0,1,1,2,3,5,8,13,21,34]`.

4.1.11 Zadanie 11

Niech $f = (2^\wedge)$ oraz $g = (\wedge 2)$. Podaj interpretację tych funkcji.

Sprawdź wartości wyrażenia:

$$\text{map } (\wedge 2)[1..10] \quad \text{oraz} \quad \text{map } (2^\wedge)[1..10]$$

i wyjaśnij otrzymane wyniki.

Funkcja $f = (2 \wedge)$ podnosi liczbę do kwadratu, a funkcja $g = (\wedge\, 2)$ podnosi 2 do potęgi danej liczby.

```
> map (^ 2) [1..10]
[1,4,9,16,25,36,49,64,81,100]
> map (2 ^) [1..10]
[2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024]
```

[6]Funkcja `drop` zwraca listę, która jest wynikiem usunięcia n pierwszych elementów z listy wejściowej. Przykład: `drop 3 [1,2,3,4,5]` zwróci `[4,5]`.

[7]Funkcja `fib` zwraca listę liczb Fibonacciego do n-tego elementu.

4.1.12 Zadanie 12

Dowiedz się, jak można przekonwertować elementy typu `Int` oraz `Integer` na typy `Float` i `Double`. Dowiedz się, jaki jest format funkcji typu `round` z `Double` do `Int`.

- Konwersja z `Int` na `Float`:

```
fromIntegral :: (Integral a, Num b) => a -> b
```

- Konwersja z `Int` na `Double`:

```
fromIntegral :: (Integral a, Num b) => a -> b
```

- Konwersja z `Integer` na `Float`:

```
fromInteger :: Num a => Integer -> a
```

- Konwersja z `Integer` na `Double`:

```
fromInteger :: Num a => Integer -> a
```

- Funkcja `round` z `Double` na `Int`:

```
round :: (RealFrac a, Integral b) => a -> b
```

4.2 Elementy Teorii Liczb

Trochę teorii liczb, bo czemu nie?

4.2.1 Zadanie 13

Funkcję Eulera φ nazywamy funkcją określoną wzorem:

$$\varphi(n) = \mathrm{card}\left(\{k \leq n : \gcd(k, n) = 1\}\right), \tag{5}$$

o dziedzinie $\mathbb{N}^{+}$.

1. Oprogramuj funkcję φ (funkcja gcd jest dostępna w bibliotece `Prelude`).
2. Napisz funkcję, która dla danej liczby naturalnej n wyznacza sumę:

$$\sum_{k|n} \varphi(k).$$

---

1. Oto implementacja funkcji φ w języku Haskell:

```
phi :: Int -> Int
phi n = length [k | k <- [1..n], gcd k n == 1]

> phi 10
4
```

2. Oto implementacja funkcji, która wyznacza sumę $\sum_{k|n} \varphi(k)$:

```
sumPhi :: Int -> Int
sumPhi n = sum [phi k | k <- [1..n], n `mod` k == 0]

> sumPhi 10
10
```

4.2.2 Zadanie 14

Liczbę naturalną n nazywamy *doskonałą*, jeżeli spełnia warunek:

$$n = \sum\{d : 1 \leq d < n \land d \mid n\}. \tag{6}$$

Na przykład liczba 6 jest liczbą doskonałą, ponieważ:

$$6 = 1 + 2 + 3. \tag{7}$$

Wyznacz wszystkie liczby doskonałe mniejsze od 10 000.
Uwaga: Do tej pory nie wiadomo, czy istnieje nieskończenie wiele liczb doskonałych.

Oto implementacja funkcji, która znajduje wszystkie liczby doskonałe mniejsze od 10 000:

```
isPerfect :: Int -> Bool
isPerfect n = n == sum [d | d <- [1..n-1], n `mod` d == 0]

perfectNumbers :: [Int]
perfectNumbers = [n | n <- [1..9999], isPerfect n]

> perfectNumbers
[6,28,496,8128]
```

4.2.3 Zadanie 15

Parę liczb naturalnych (m, n) nazywamy *zaprzyjaźnionymi*, jeżeli suma dzielników właściwych każdej z nich równa się drugiej:

$$\sigma(m) - m = n, \quad \sigma(n) - n = m,$$

gdzie $\sigma(n)$ oznacza sumę wszystkich dzielników liczby n.
Znajdź wszystkie zaprzyjaźnione pary, których oba składniki są mniejsze od 10^5.
Uwaga: Do tej pory nie wiadomo, czy istnieje nieskończenie wiele par liczb zaprzyjaźnionych.

Tak może wyglądać funkcja szukająca liczb zaprzyjaźnionych w podanym zakresie:

```
sumaDzielnikow :: Int -> Int
sumaDzielnikow 1 = 0
sumaDzielnikow n = 1 + sum [ if x * x == n then x
                             else if n `mod` x == 0 then x + (n `div` x)
                             else 0
                             | x <- [2..(floor . sqrt . fromIntegral) n], x * x <= n ]
    where
        limit = (floor . sqrt . fromIntegral) n

amicablePairs :: [(Int, Int)]
amicablePairs = [ (n, m)
                | n <- [2..maxVal-1]
```

```
               , let m = sumaDzielnikow n
               , m > n, m < maxVal
               , sumaDzielnikow m == n ]

> amicablePairs
[(220,284),(1184,1210),(2620,2924),(5020,5564),(6232,6368)]
```

4.2.4 Zadanie 16

Dla $n \in \mathbb{N}^+$ definiujemy:

$$\mathrm{dcp}(n) = \frac{1}{2n^2} \left|\{(k,l) \in \{1,\ldots,n\} : \gcd(k,l) = 1\}\right|. \tag{8}$$

1. Zaimplementuj tę funkcję w języku Haskell za pomocą *list comprehension*.
2. Zoptymalizuj ten kod, pisząc rekurencyjną wersję tej funkcji.
3. Wyznacz wartości tej funkcji dla $n = 100, 200, 300, \ldots, 10000$ i postaw jaką rozsądną hipotezę o:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dcp}(n). \tag{9}$$

---

1. Przykładowa implementacja przy użyciu *list comprehension*:

```
dcp :: Int -> Double
dcp n = 1 / (2 * fromIntegral (n^2))
        * fromIntegral (length [(k, l)
                               | k <- [1..n], l <- [1..n], gcd k l == 1])

> dcp 10
0.315
```

2. Optymalizacja kodu przy użyciu rekurencji:

```
dcp' :: Int -> Double
dcp' n = 1 / (2 * fromIntegral (n^2)) * fromIntegral (dcp'' n 1 1)

dcp'' :: Int -> Int -> Int -> Int
dcp'' n k l
    | k > n     = 0
    | l > n     = dcp'' n (k + 1) 1
    | gcd k l == 1 = 1 + dcp'' n k (l + 1)
    | otherwise = dcp'' n k (l + 1)

> dcp' 10
0.315
```

3. Wyznaczenie wartości funkcji dla $n = 100, 200, 300, \ldots, 10000$:

```
dcpValues :: [Double]
dcpValues = [dcp' n | n <- [100, 200..10000]]

> dcpValues
```

```
[0.30435,0.3057875,0.30441666666666667,0.304234375,0.304462,
0.3041652777777778,0.3041173469387755,0.30429609375,0.3041055555555556,
0.3041915,0.3042293388429752,0.30401770833333336,0.30404940828402366,
0.30412627551020405,0.30408066666666667,0.3039966796875,
0.3041839100346021,0.3040300925925926,0.3040048476454294,0.304146875,
0.304041156462585,0.3039759297520661,0.30407854442344046,
0.3040509548611111,0.3039804,0.3040543639053254,0.3040213305898491,
0.30399381377551016,0.3040546373365042,0.30402083333333335,
0.3040220083246618,0.304030029296875,0.3039801193755739,
0.30399476643598616,0.30402542857142856,0.30400150462962966,
0.30400697589481374,0.30404456371191135,0.30397827087442475,
0.30397509375,0.3040405413444378,0.30397174036281177,
0.30401695511087073,0.3040362345041322,0.3039997777777778,
0.30397993856332706,0.3040101177003169,*** Exception: stack overflow
```

Na podstawie uzyskanych wartości można postawić hipotezę, że granica funkcji $\mathrm{dcp}(n)$ dla $n \to \infty$ wynosi około 0.304. Wartość ta może być przybliżona do wartości funkcji Eulera $\frac{6}{\pi^2}$. $\square$

4.3 Listy – część 1.

Na początku tych zadań należało zastanowić się nad implementacją istniejących już funkcji z Prelude, a następnie zaimplementować je samodzielnie.

4.3.1 Zadanie 17

Napisz funkcję `nub`, która usunie z listy wszystkie duplikaty, np.

`nub [1,1,2,2,2,1,4,1] == [1,2,4]`

Oto implementacja funkcji `nub` w języku Haskell:

```
nub' :: (Eq a) => [a] -> [a]
nub' [] = []
nub' (x:xs) = x : nub' (filter (/= x) xs)
```

Jak to działa?

1. Jeśli lista pusta to zwróć pustą

   `nub' [] = []`

2. W przeciwnym przypadku zwróć listę, której pierwszym elementem jest pierwszy element listy wejściowej (`x:xs` dzieli listę – wyciąga pierwszy element), a resztę listy tworzy rekurencyjne wywołanie funkcji `nub'` na liście, z której usunięto wszystkie wystąpienia pierwszego elementu (`filter (/= x) xs` usuwa z xs wszystko co jest `x`).

   `nub' (x:xs) = x : nub' (filter (/= x) xs)`

4.3.2 Zadanie 18

Napisz funkcję `inits`, która dla danej listy wyznaczy listę wszystkich jej odcinków początkowych, np.

`inits [1,2,3,4] == [[],[1],[1,2],[1,2,3],[1,2,3,4]]`

Funkcja `inits` również powinna wykonywać się rekurencyjnie. Zabieramy po jednym elemencie i wpisujemy do listy.

```
inits' :: [a] -> [[a]]
inits' [] = [[]]
inits' (x:xs) = [] : map (x:) (inits' xs)
```

Działa to w bardzo podobny sposób jak poprzednie:

1. Jeśli lista pusta to zwróć pustą listę

   `inits' [] = [[]]`

2. W przeciwnym przypadku narzuć mapą na wszystkie elementy listy rekurencyjne wywołanie funkcji `inits'` na liście bez pierwszego elementu, a następnie dodaj na początek każdej z tych list pierwszy element listy wejściowej

   `inits' (x:xs) = [] : map (x:) (inits' xs)`

4.3.3 Zadanie 19

Napisz funkcję `tails`, która dla danej listy wyznaczy listę wszystkich jej odcinków początkowych, np.:

`tails [1,2,3,4] == [[],[4],[3,4],[2,3,4],[1,2,3,4]]`

Funkcja `tails` działa analogicznie do funkcji `inits`, ale zamiast zdejmować elementy z początku listy, zdejmuje je z końca.

```
tails' :: [a] -> [[a]]
tails' [] = [[]]
tails' (x:xs) = (x:xs) : tails' xs
```

1. Jeśli lista pusta to zwróć pustą listę

   `tails' [] = [[]]`

2. W przeciwnym przypadku zwróć listę, której pierwszym elementem jest cała lista wejściowa, a resztę listy tworzy rekurencyjne wywołanie funkcji `tails'` na liście bez pierwszego elementu

   `tails' (x:xs) = (x:xs) : tails' xs`

4.3.4 Zadanie 20

Napisz funkcję `splits`, która dla danej listy xs wyznaczy listę wszystkich par (ys, zs) takich, że

`xs == ys++zs`

Funkcja `splits` powinna zwracać listę par, które są wynikiem podziału listy wejściowej na dwie części. Warto zauważyć, że dla każdego elementu listy wejściowej można zrobić podział na dwie części: jedną z elementem i drugą bez niego. W ten sposób można zrobić wszystkie możliwe podziały listy.

```
splits' :: [a] -> [([a], [a])]
splits' [] = [([], [])]
splits' (x:xs) = ([], x:xs) : [(x:ys, zs) | (ys, zs) <- splits' xs]
```

1. Jeśli lista pusta to zwróć listę, której jedynym elementem jest para pustych list

   `splits' [] = [([], [])]`

2. W przeciwnym przypadku zwróć listę, której pierwszym elementem jest para pustej listy i listy wejściowej, a resztę listy tworzą pary, które są wynikiem rekurencyjnego wywołania funkcji `splits'` na liście bez pierwszego elementu

   `splits' (x:xs) = ([], x:xs) : [(x:ys, zs) | (ys, zs) <- splits' xs]`

4.3.5 Zadanie 21

Oto jedna z możliwych implementacji funkcji `partition`:

```
partition :: (a => Bool) => [a] => ([a], [a])
partition p xs = (filter p xs , filter (not . p) xs)
```

Ulepsz implementację tej funkcji: powinna zwracać ten sam wynik, ale powinna przechodzić przez listę tylko raz.

Oto ulepszona implementacja funkcji `partition`: funkcja `partition'` przechodzi przez listę tylko raz, dzięki użyciu akumulatorów.

```
partition' :: (a -> Bool) -> [a] -> ([a], [a])
partition' p xs = partition'' p xs [] []

partition'' :: (a -> Bool) -> [a] -> [a] -> [a] -> ([a], [a])
partition'' _ [] ys zs = (ys, zs)
partition'' p (x:xs) ys zs
    | p x = partition'' p xs (ys ++ [x]) zs
    | otherwise = partition'' p xs ys (zs ++ [x])
```

1. Jeśli lista pusta to zwróć parę list `ys` i `zs`

   `partition'' _ [] ys zs = (ys, zs)`

2. W przeciwnym przypadku jeśli warunek `p` jest spełniony to dodaj element do listy `ys` i rekurencyjnie wywołaj funkcję `partition''` na reszcie listy, a jeśli nie to dodaj element do listy `zs` i rekurencyjnie wywołaj funkcję `partition''` na reszcie listy

   `partition'' p (x:xs) ys zs = ...`

Przykładowe wywołanie:

```
> partition' even [1..10]
([2,4,6,8,10],[1,3,5,7,9])
```

4.3.6 Zadanie 22

Zaimplementuj samodzielnie funkcje `permutations` (znajduje się ona w module **Data.List**), która dla danej listy wyznaczy listę wszystkich jej permutacji (możemy założyć, ze wszystkie elementy listy wejściowej sa różne).

Oto implementacja funkcji `permutations` w języku Haskell:

```
permutations' :: [a] -> [[a]]
permutations' [] = [[]]
permutations' (x:xs) = [ys ++ [x] ++ zs | perm <- permutations' xs,
                                         (ys, zs) <- splits' perm]
```

1. Jeśli lista pusta to zwróć listę, której jedynym elementem jest pusta lista

   `permutations' [] = [[]]`

2. W przeciwnym przypadku zwróć listę, której elementami są wszystkie możliwe permutacje listy wejściowej, które powstają przez dodanie elementu `x` na różne pozycje w permutacjach listy bez pierwszego elementu

   ```
   permutations' (x:xs) = [ys ++ [x] ++ zs
                | perm <- permutations' xs, (ys, zs) <- splits' perm]
   ```

4.3.7 Zadanie 23 – Klasyczny Problem hetmanów

Celem jest umieszczenie ośmiu hetmanów na szachownicy tak, aby żadne dwa hetmany nie atakowały się nawzajem, tj. nie mogą znajdować się w:

- tym samym rzędzie,
- tej samej kolumnie,
- tej samej przekątnej.

1. Zaimplementuj problem wyszukiwania położeń Hetmanów w Haskell'u korzystając z funkcji `permutations`.
2. Dwa rozwiązania nazywamy równoważne jeśli pierwsze z nich można otrzymać za pomocą złożeń odbicia poziomego *(reverse)* oraz odbicia pionowego (np. `map (λ x-> n+1-x))` z drugiego. Ile jest nierównoważnych poprawnych rozstawień hetmanów?

Wskazówka: Przedstaw pozycje hetmanów jako listę liczb [1, ..., n]. Przykład: ciąg [4, 2, 7, 3, 6, 8, 5, 1] oznacza, że hetman w pierwszej kolumnie jest w rzędzie 4, hetman w drugiej kolumnie jest w rzędzie 2 itd.
