

Notatki Programowanie Funkcyjne

Jakub Kogut

18 marca 2025

Spis treści

1	Wstęp	3
2	Wykład 11-03-2025	3
2.1	Struktura kodu w Haskell	3
2.2	Typy w Haskellu	3
2.3	Listy	4
2.3.1	Operacje na listach	5
2.3.2	Podstawowe funkcje operujące na listach	5
2.3.3	List comprehension	6
3	Wykład 18-03-2025	6
3.1	implementacje funkcji w Haskellu	6
3.1.1	QuickSort	6
3.1.2	<i>partition</i>	6
3.1.3	Lepsza implementacja QuickSort'a	6
3.1.4	InsertSort	7
3.1.5	<i>zip</i>	7
3.1.6	<i>zipWith</i>	7
3.1.7	funkcje wykonujące operacje na listach	7
4	Ćwiczenia	8
4.1	Ćwiczenia 11-03-2025	8
4.1.1	Zadanie 1	8
4.1.2	Zadanie 2	8
4.1.3	Zadanie 3	9
4.1.4	Zadanie 4	9
4.1.5	Zadanie 5	10
4.1.6	Zadanie 6	10
4.1.7	Zadanie 7	11
4.1.8	Zadanie 8	12
4.1.9	Zadanie 9 – (Eliminacja Pętli)	12
4.1.10	Zadanie 10	14
4.1.11	Zadanie 11	15
4.1.12	Zadanie 12	16
4.2	Elementy Teorii Liczb	16
4.2.1	Zadanie 13	16
4.2.2	Zadanie 14	17
4.2.3	Zadanie 15	17
4.2.4	Zadanie 16	18
4.3	Listy – część 1.	19
4.3.1	Zadanie 17	19
4.3.2	Zadanie 18	19

4.3.3	Zadanie 19	20
4.3.4	Zadanie 20	20
4.3.5	Zadanie 21	21
4.3.6	Zadanie 22	21
4.3.7	Zadanie 23 – Klasyczny Problem hetmanów	22

1 Wstęp

Notatki z programowania funkcyjnego prowadzone przez GOATA profesora Jacka Cichonia na semestrze 4 2025. Zajęcia laboratoryjne prowadzone są przez dr Dominika Bojko.

2 Wykład 11-03-2025

Na tym wykładzie skupimy się na przygotowaniu środowiska pracy do programowania funkcyjnego w języku Haskell.

2.1 Struktura kodu w Haskell

Przykładowy kod wygląda następująco:

```
{- file = W2.hs
   autor = JK
   date = 11-03-2025
-}
module W2 where
id' x = x
```

Następnie w terminalu, w którym mamy odpalone GHCI wpisujemy:

```
>:l W2.hs
>:r
>id' 5
5
>:t id'
id' :: a -> a //co oznacza id :: forall a => a->a
```

Co matematycznie można zapisać jako:

$$exp = (\lambda a : Typ \rightarrow (a \rightarrow a))$$

- Przykład:

- $exp(Int) :: Int \rightarrow Int$
- $exp(Bool) :: Bool \rightarrow Bool$
- $exp(Double) :: Double \rightarrow Double$

Cichoń radzi, aby najpierw zastanowić się jaki powinny być typ funkcji, a dopiero potem zastanawiać się nad implementacją, ponoć oszczędza to *czas i nerwy*.

2.2 Typy w Haskellu

- Typy proste:

- Int
- Double
- Char
- Bool

- Typy złożone:

- Listy

- Krotki
- Funkcje

- Przykład:

- funkcja Collatz’a $coll :: Int \rightarrow Int$

```
coll n
  | n==1 = 1
  | even n = coll (n `div` 2)
  | odd n = coll (3*n+1)
```

Symbol `|` oznacza wyrażenie z wykożystaniem strażników *guards*. Zapis taki jest podobny do matematycznego zapisu funkcji:

$$coll(n) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n = 1 \\ coll(\frac{n}{2}) & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \\ coll(3n + 1) & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$$

Nie jest to bezpieczna funkcja, ponieważ dla liczb ujemnych zapętli się ona w nieskończoność. Można zauważyć, że funkcja ta zwraca zawsze liczbę 1. Ciekawa jest liczba kroków, które są potrzebne do osiągnięcia tej wartości. Dla $n = 27$ potrzeba 111 kroków, dla $n = 28$ potrzeba 18 kroków, dla $n = 29$ potrzeba 111 kroków.

- Nowa funkcja Collatz’a
 $collatz :: (Int, Int) \rightarrow (Int, Int)$

```
collatz (n, steps)
  | n==1 = (n, steps)
  | even n = collatz (n `div` 2, steps+1)
  | odd n = collatz (3*n+1, steps+1)
```

Funkcja ta zwraca parę liczb, pierwsza to wynik funkcji Collatz’a, a druga to liczba kroków potrzebna do osiągnięcia tej wartości.

Spróbujmy ją sobie odpalić:

```
>collatz (97,0)
(1,118)
```

Jak widać dla $n = 97$ potrzeba 118 kroków, aby osiągnąć wartość 1.

- Funkcja *lenght of collatz* zwracająca długość ciągu Collatz’a dla danej liczby:
 $lenz :: Int \rightarrow Int$

```
lenz n = snd (collatz (n,0))
```

2.3 Listy

Definicja listy w Haskellu:

`[a]` - lista elementów typu `a`

$$[a] = \{[a_1, \dots, a_k] \mid a_1, \dots, a_k \in a, k \in \mathbb{N}\}$$

```
>:t [1,2,3]
[1,2,3] :: Num a => [a]
>:t [1::Integer, 2, 3]
[1,2,3] :: [Integer]
```

2.3.1 Operacje na listach

- Dodawanie elementu na początku listy

```
>:t (1:[2,3])  
(1:[2,3]) :: Num a => [a]
```

- Konkatenacja list

```
>:t [1,2]++[3,4]  
[1,2]++[3,4] :: Num a => [a]
```

2.3.2 Podstawowe funkcje operujace na listach

- `length::[a] → Int`

- `length [] = 0`
- `length (x:xs) = 1 + length xs`

- `head::[a] → a`

zwraca pierwszy element listy

- `head (x:xs) = x`
- `head [] = error "empty list"`

- `tail::[a] → [a]`

zwraca listę bez pierwszego elementu

- `tail (x:xs) = xs`
- `tail [] = error "empty list"`

- `last::[a] → a`

zwraca ostatni element listy

- `last [x] = x`
- `last (x:xs) = last xs`
- `last [] = error "empty list"`

- `filter::(a → Bool) → [a] → [a]`

- `filter p [] = []`
- `filter p (x:xs) = if p x then x : filter p xs else filter p xs`
- `filter (n → n>0) [-1,2,-3,4] = [2,4]`
- `filter even [1..10] = [2,4,6,8,10]`

Jak zdefiniować funkcje filter:

```
filter p [] = []  
filter p (x:xs)  
  | p x = x : filter p xs  
  | otherwise = filter p xs
```

- `map::(a → b) → [a] → [b]`

zwraca listę, która powstaje zastosowaniem funkcji do każdego elementu listy

- `map f [] = []`
- `map f (x:xs) = f x : map f xs`

- $\text{map } (n \rightarrow n^2) [1,2,3] = [1,4,9]$
- $\text{map } (n \rightarrow n^3) [1..10] = [1..1000]$

gdzie $[1..10]$ to skrót od $[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]$

2.3.3 List comprehension

Polega na tworzeniu listy na podstawie innych list.

$$[f x_1, x_2, x_3 \mid x_1 \leftarrow xs, x_2 \leftarrow ys, x_3 \leftarrow zs]$$

Przykład:

- chcemy stworzyć listę wszystkich trójek pitagorejskich poniżej liczby n.

```
pitagorasTrzy n = [(x,y,z) | x <- [1..n], y <- [1..n], z <- [1..n],
                          x^2 + y^2 == z^2, gcd xy == 1]
```

3 Wykład 18-03-2025

3.1 implementacje funkcji w Haskellu

3.1.1 QuickSort

w tej implementacji za *pivot* przyjmujemy pierwszy element listy.

```
qS [] = []
qS (x:xs) = (qS [y | y <- xs, y < x]) ++
            [x] ++
            (qS [y | y <- xs, y >= x])
```

3.1.2 partition

```
partition :: (a->Bool) -> [a] -> ([a],[a])
partition _ [] = ([],[])
partition p (x:xs) = if p x then (x:l,r)
                      else (l,x:r)
                      where (l,r) = partition p xs
```

3.1.3 Lepsza implementacja QuickSort'a

```
qSort [] = []
qSort (x:xs) = (qSort l) ++ [x] ++ (qSort r)
               where (l,r) = partition (<x) xs
```

wyrażenie $(<x)$ jest zastosowaniem *slicingu*. Działa to następująco:

$$(<x) \equiv \lambda y \rightarrow y < x$$

3.1.4 InsertSort

```
inSort [] = []
inSort (x:xs) = l ++ [x] ++ r
                where sxs = inSort xs
                      (l,r) = partition (<x) sxs
```

Aby sprawdzić prędkość wykonywania funkcji w Haskellu możemy użyć następującej funkcji

```
>:set +s
>take 10 (inSort [1000,999..1])
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
(0.02 secs, 5,499,824 bytes)
```

3.1.5 zip

Powtórka z ćwiczen *Zadanie 10* [4.1.10](#)

3.1.6 zipWith

Podobnie znowu napisane na ćwiczeniach [4.1.10](#)

3.1.7 funkcje wykonujące operacje na listach

funkcja sumująca:

```
sumList [] = 0
sumList (x:xs) = x + sumList xs

> sumList [1..1000]
500500
```

funkcja mnożąca:

```
pro [] = 1
pro (x:xs) = x * pro xs

>pro [1..9]
362880
```

teraz abstrahując ten koncept możemy napisać funkcję *foldl*¹, która działa na danym monoidzie $M = (M, \cdot, e)$

```
foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
foldl' op e [] = e
foldl' op e (x:xs) = op x (foldl' op e xs)

ghci> foldl' (*) 1 [1..10]
3628800
ghci> foldl' (+) 1 [1..10]
56
ghci> foldl' (+) 0 [1..10]
55
ghci> foldl' (*) 0 [1..10]
0
```

¹jest to operacja składająca liste w następujący sposób $((e \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot x_3 \dots \cdot x_n$, istnieje analogiczna *foldr* działająca odwrotnie $x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot \dots (x_n \cdot e)))$

4 Ćwiczenia

W tym miejscu będą pojawiały się notatki z laboratoriów (ćwiczeń)

4.1 Ćwiczenia 11-03-2025

4.1.1 Zadanie 1

```
power :: Int => Int => Int
power x y = y ^ x

p2 = power 4
p3 = power 3
```

1. Wyznacz w GCHI wartość wyrażenia $(p2 \circ p3)^2$ i wyjaśnij, dlaczego otrzymałeś ten wynik.
2. Zbadaj typy funkcji $p2$, $p3$ i $(p2 \circ p3)$.
3. Zapisz powyższe funkcje za pomocą wyrażeń lambda.

$$Int \rightarrow Int \rightarrow Int$$

Zapis strzałkowy definiuje nam typ funkcji operacja $=>$ jest wiążąca z prawej strony, więc można by było to również zapisać jako:

$$power :: Int \rightarrow (Int \rightarrow Int)$$

1. podpunkt 1

$$(p2 \circ p3)^2 = p2(p3(x))^2 = 4(3^x)^2 = 4 \cdot 9^x$$

2. podpunkt 2

```
>:t p2
p2 :: Int -> Int
>:t p3
p3 :: Int -> Int
>:t (p2 . p3)
(p2 . p3) :: Int -> Int
```

3. podpunkt 3

```
p2 = \x -> power 4 x
p3 = \x -> power 3 x
```

4.1.2 Zadanie 2

$$2 \wedge 3 \wedge 2, \quad (2 \wedge 3) \wedge 2, \quad 2 \wedge (2 \wedge 3).$$

Dowiedz się, jaka jest łączność oraz siła operatora \wedge za pomocą polecenia:

$$:i(\wedge).$$

```
>:i (^)
(^) :: (Num a, Integral b) => a -> b -> a
      -- Defined in 'GHC.Real'
infixr 8 ^
```

Operator \wedge jest prawostronnie łączny, a jego siła wynosi 8 (najwyższa możliwa wartość, wyłącznie wyższe jest nałożenie funkcji na zmienną). W nawiasie **Num a**, **Integral b** oznacza, że operator \wedge bierze jeden argument typu **Num** i drugi typu **Integral**.

$$2 \wedge 3 \wedge 2 = 2 \wedge (3 \wedge 2) = 2 \wedge 9 = 512$$

$$(2 \wedge 3) \wedge 2 = 8 \wedge 2 = 64$$

$$2 \wedge (2 \wedge 3) = 2 \wedge 8 = 256$$

4.1.3 Zadanie 3

```
f :: Int => Int
f x = x ^ 2
g :: Int => Int => Int
g x y = x+2*y
h :: . . . .
h x y = f ( g x y )
```

1. Jaki jest typ funkcji h ? (tzn. uzupełnij ... w powyższym listingu)
2. Czy $h = f \circ g$?
3. Czy $h x = f(g x)$?

1. Typ funkcji h to:

$$h :: Int \rightarrow Int \rightarrow Int$$

2. Nie, ponieważ:

$$h(x, y) = f(g(x, y)) = f(x + 2y) = (x + 2y)^2$$

3. Tak, ponieważ:

$$h(x) = f(g(x)) = f(x + 2x) = (x + 2x)^2 = 9x^2$$

4.1.4 Zadanie 4

Zapisz operacje binarne (+), (*) za pomocą lambda wyrażeń.

```
add = \x -> (\y -> x + y)
mul = \x -> (\y -> x * y)
```

Co to daje? Można teraz zapisać 2+3 jako:

- add 2 3
- (add 2) 3
- add 2 (3)
- (\$3) (2 add)

4.1.5 Zadanie 5

Zapisz funkcje:

$$f(x) = 1 + x \cdot (x + 1), \quad g(x, y) = x + y^2, \quad h(y, x) = x + y^2$$

za pomocą lambda wyrażeń w językach C++, Python, JavaScript oraz Haskell.

W języku Haskell:

```
f = \x -> 1 + x * (x + 1)
g = \x -> \y -> x + y^2
h = \y -> \x -> x + y^2
```

W języku Python:

```
f = lambda x: 1 + x * (x + 1)
g = lambda x, y: x + y**2
h = lambda y, x: x + y**2
```

W języku JavaScript:

```
f = x => 1 + x * (x + 1)
g = (x, y) => x + y**2
h = (y, x) => x + y**2
```

W języku C++:

```
auto f = [](int x) { return 1 + x * (x + 1); };
auto g = [](int x, int y) { return x + y*y; };
auto h = [](int y, int x) { return x + y*y; };
```

4.1.6 Zadanie 6

Ustalmy zbiory A, B, C . Niech

$$\text{curry} : C^{B \times A} \rightarrow (C^B)^A$$

będzie funkcją zadaną wzorem:

$$\text{curry}(\varphi) = \lambda a \in A \rightarrow (\lambda b \in B \rightarrow \varphi(b, a)).$$

oraz niech

$$\text{uncurry} : (C^B)^A \rightarrow C^{B \times A}$$

będzie zadaną wzorem:

$$\text{uncurry}(\psi)(b, a) = (\psi(a))(b).$$

1. Pokaż, że $\text{curry} \circ \text{uncurry} = \text{id}_{(C^B)^A}$ oraz $\text{uncurry} \circ \text{curry} = \text{id}_{C^{B \times A}}$.
2. Wywnioskuj z tego, że $|(C^B)^A| = |C^{B \times A}|$. Przypomnij sobie dowód tego twierdzenia, który poznałeś na pierwszym semestrze studiów.
3. Spróbuj zdefiniować w języku Haskell odpowiedniki funkcji `curry` i `uncurry`.

1. Pokażemy, że $\text{curry} \circ \text{uncurry} = \text{id}_{(C^B)^A}$ oraz $\text{uncurry} \circ \text{curry} = \text{id}_{C^{B \times A}}$.

- $\text{curry} \circ \text{uncurry}$

$$\begin{aligned} (\text{curry} \circ \text{uncurry})(\psi) &= \text{curry}(\text{uncurry}(\psi)) \\ &= \text{curry}(\lambda a \in A \rightarrow (\lambda b \in B \rightarrow \psi(a)(b))) \\ &= \lambda a \in A \rightarrow (\lambda b \in B \rightarrow \psi(a)(b)). \end{aligned} \quad (1)$$

- $\text{uncurry} \circ \text{curry}$

$$\begin{aligned} (\text{uncurry} \circ \text{curry})(\varphi) &= \text{uncurry}(\text{curry}(\varphi)) \\ &= \text{uncurry}(\lambda a \in A \rightarrow (\lambda b \in B \rightarrow \varphi(b, a))) \\ &= \lambda b \in B \rightarrow (\lambda a \in A \rightarrow \varphi(b, a)). \end{aligned} \quad (2)$$

Z powyższych równań wynika, że $\text{curry} \circ \text{uncurry} = \text{id}_{(C^B)^A}$ oraz $\text{uncurry} \circ \text{curry} = \text{id}_{C^{B \times A}}$. \square

2. Możemy pokazać że **curry** i **uncurry** są iniekcjami niewprost, nakładając odpowiednio przeciwne funkcje na obie strony równości:

- Załóżmy, że $\text{curry}(\varphi_1) = \text{curry}(\varphi_2)$. Wtedy:

$$\begin{aligned} \text{curry}(\varphi_1)(a)(b) &= \text{curry}(\varphi_2)(a)(b) \\ \varphi_1(b, a) &= \varphi_2(b, a) \\ \varphi_1 &= \varphi_2. \end{aligned} \quad (3)$$

- Załóżmy, że $\text{uncurry}(\psi_1) = \text{uncurry}(\psi_2)$. Wtedy:

$$\begin{aligned} \text{uncurry}(\psi_1)(b, a) &= \text{uncurry}(\psi_2)(b, a) \\ \psi_1(a)(b) &= \psi_2(a)(b) \\ \psi_1 &= \psi_2. \end{aligned} \quad (4)$$

A więc istnieje bijekcja między $(C^B)^A$ i $C^{B \times A}$, co oznacza, że te zbiory mają taką samą moc. \square

3. W języku Haskell funkcje **curry** i **uncurry** można zdefiniować następująco:

```
curry :: ((b, a) -> c) -> a -> b -> c
curry f x y = f (y, x)
```

```
uncurry :: (a -> b -> c) -> (a, b) -> c
uncurry f (x, y) = f x y
```

4.1.7 Zadanie 7

Podaj przykłady funkcji następujących typów:

$$(\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow \text{Int}$$

$$(\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow (\text{Int} \Rightarrow \text{Int})$$

$$(\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow (\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow (\text{Int} \Rightarrow \text{Int})$$

- Funkcja typu $(\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow \text{Int}$:

```
f :: (Int -> Int) -> Int
f g = g 0
```

- Funkcja typu $(\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow (\text{Int} \Rightarrow \text{Int})$:

```
f :: (Int -> Int) -> (Int -> Int)
f g x = g (g x)
```

- Funkcja typu $(\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow (\text{Int} \Rightarrow \text{Int}) \Rightarrow (\text{Int} \Rightarrow \text{Int})$:

```
f :: (Int -> Int) -> (Int -> Int) -> (Int -> Int)
f g h x = g (h x)
```

4.1.8 Zadanie 8

Załóżmy, że chcesz oprogramować funkcję, która dla danych liczb a, b oraz funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oblicza

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Jaki powinien być typ tej funkcji?

Typ tej funkcji powinien być następujący:

$$\text{Num}(a) \implies a \rightarrow a \rightarrow (a \rightarrow a) \rightarrow a$$

mogłaby ona wyglądać następująco:

```
integral :: (Double -> Double) -> Double -> Double -> Double
integral f a b = undefined
```

4.1.9 Zadanie 9 – (Eliminacja Pętli)

Wybierz jeden z języków Python, C++ lub JavaScript.

1. Masz daną (czyli oprogramowaną) funkcję $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Oprogramuj funkcję, która dla danego $n \in \mathbb{N}$ oblicza

$$\sum_{k=0}^n f(k).$$

Zrób to najpierw (standardowo) za pomocą pętli, a potem oprogramuj ją bez użycia pętli, za pomocą rekursji.

2. Rozważamy następującą funkcję napisaną w pseudokodzie:

```
FUNCTION f(x: DOUBLE): DOUBLE
BEGIN
  DOUBLE y = sin(x);
  RETURN y*y + y + x;
ENDFNC
```

Oprogramuj tę funkcję w wybranym języku i następnie wyeliminuj zmienną lokalną y z tego kodu, bez pogarszania jego efektywności.

1. Oto rozwiązanie w języku C++:

```
#include <iostream>
using namespace std;

// Example implementation of function  $f: N \rightarrow N$ .
// You can replace this with any function of type  $int \rightarrow int$ .
int f(int x) {
    // Example:  $f(x) = x + 1$ 
    return x + 1;
}

// Function that sums using a loop:
int sumLoop(int n) {
    int sum = 0;
    for (int k = 0; k <= n; ++k) {
        sum += f(k);
    }
    return sum;
}

// Function that sums using recursion:
int sumRec(int n) {
    if (n == 0)
        return f(0);
    else
        return sumRec(n - 1) + f(n);
}

int main() {
    int n;
    cout << "Enter n: ";
    cin >> n;
    cout << "Sum computed with loop: " << sumLoop(n) << endl;
    cout << "Sum computed recursively: " << sumRec(n) << endl;
    return 0;
}
```

funkcja `sumLoop` oblicza sumę za pomocą pętli, a funkcja `sumRec` oblicza sumę rekurencyjnie.

$$\text{sumRec}(n) = \begin{cases} f(0) & \text{gdy } n = 0 \\ \text{sumRec}(n - 1) + f(n) & \text{gdy } n > 0 \end{cases}$$

2. Rozwiązanie w Haskellu:

```
f :: Double -> Double
f x = sin x * sin x + sin x + x
```

```
f' :: Double -> Double
f' x = sin x * sin x + sin x + x
```

4.1.10 Zadanie 10

Zaimplementuj samodzielnie następujące funkcje działające na listach z Prelude:

1. map
2. zip
3. zipWith
4. filter
5. take
6. drop
7. fib

-
1. Funkcja map:

```
map' :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map' f [] = []
map' f (x:xs) = f x : map' f xs
```

2. Funkcja zip²:

```
zip' :: [a] -> [b] -> [(a, b)]
zip' [] _ = []
zip' _ [] = []
zip' (x:xs) (y:ys) = (x, y) : zip' xs ys
```

3. Funkcja zipWith³:

```
zipWith' :: (a -> b -> c) -> [a] -> [b] -> [c]
zipWith' _ [] _ = []
zipWith' _ _ [] = []
zipWith' f (x:xs) (y:ys) = f x y : zipWith' f xs ys
```

4. Funkcja filter⁴:

```
filter' :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
filter' _ [] = []
filter' p (x:xs)
  | p x = x : filter' p xs
  | otherwise = filter' p xs
```

5. Funkcja take⁵:

²Funkcja `zip` zwraca listę par, które są złożone z elementów listy wejściowej. Jeśli jedna z list jest krótsza, to wynikowa lista będzie miała długość krótszej z nich.

Przykład: `zip [1,2,3] ['a','b','c','d']` zwróci `[(1,'a'),(2,'b'),(3,'c')]`.

³Funkcja `zipWith` działa podobnie jak `zip`, ale zamiast zwracać parę elementów, zwraca wynik funkcji, która jest podana jako argument.

Przykład: `zipWith (+) [1,2,3] [4,5,6]` zwróci `[5,7,9]`.

⁴Funkcja `filter` zwraca listę elementów, które spełniają warunek podany jako argument.

Przykład: `filter even [1..10]` zwróci `[2,4,6,8,10]`.

⁵Funkcja `take` zwraca listę składającą się z n pierwszych elementów listy wejściowej.

Przykład: `take 3 [1,2,3,4,5]` zwróci `[1,2,3]`.

```
take' :: Int -> [a] -> [a]
take' 0 _ = []
take' _ [] = []
take' n (x:xs) = x : take' (n - 1) xs
```

6. Funkcja `drop`⁶:

```
drop' :: Int -> [a] -> [a]
drop' 0 xs = xs
drop' _ [] = []
drop' n (_:xs) = drop' (n - 1) xs
```

7. Funkcja `fib`⁷:

```
fib :: Int -> [Int]
fib n = take' n (map' fib' [0..])
  where
    fib' 0 = 0
    fib' 1 = 1
    fib' n = fib (n - 1) + fib (n - 2)
```

Fajne złożenie funkcji `fib` z `zipWith`:

```
fib :: [Int]
fib = 0 : 1 : zipWith (+) fib (tail fib)
```

co pozwala na generowanie listy liczb Fibonacciego w nieskończoność. Na przykład `take 10 fib` zwróci `[0,1,1,2,3,5,8,13,21,34]`.

4.1.11 Zadanie 11

Niech $f = (2^{\wedge})$ oraz $g = (\wedge 2)$. Podaj interpretację tych funkcji.

Sprawdź wartości wyrażenia:

$$\text{map } (\wedge 2)[1..10] \quad \text{oraz} \quad \text{map } (2^{\wedge})[1..10]$$

i wyjaśnij otrzymane wyniki.

Funkcja $f = (2^{\wedge})$ podnosi liczbę do kwadratu, a funkcja $g = (\wedge 2)$ podnosi 2 do potęgi danej liczby.

```
> map (^ 2) [1..10]
[1,4,9,16,25,36,49,64,81,100]
> map (2 ^) [1..10]
[2,4,8,16,32,64,128,256,512,1024]
```

⁶Funkcja `drop` zwraca listę, która jest wynikiem usunięcia n pierwszych elementów z listy wejściowej. Przykład: `drop 3 [1,2,3,4,5]` zwróci `[4,5]`.

⁷Funkcja `fib` zwraca listę liczb Fibonacciego do n -tego elementu.

4.1.12 Zadanie 12

Dowiedz się, jak można przekonwertować elementy typu `Int` oraz `Integer` na typy `Float` i `Double`. Dowiedz się, jaki jest format funkcji typu `round` z `Double` do `Int`.

- Konwersja z `Int` na `Float`:

```
fromIntegral :: (Integral a, Num b) => a -> b
```

- Konwersja z `Int` na `Double`:

```
fromIntegral :: (Integral a, Num b) => a -> b
```

- Konwersja z `Integer` na `Float`:

```
fromInteger :: Num a => Integer -> a
```

- Konwersja z `Integer` na `Double`:

```
fromInteger :: Num a => Integer -> a
```

- Funkcja `round` z `Double` na `Int`:

```
round :: (RealFrac a, Integral b) => a -> b
```

4.2 Elementy Teorii Liczb

Trochę teorii liczb, bo czemu nie?

4.2.1 Zadanie 13

Funkcję Eulera φ nazywamy funkcją określoną wzorem:

$$\varphi(n) = \text{card}(\{k \leq n : \gcd(k, n) = 1\}), \quad (5)$$

o dziedzinie \mathbb{N}^+ .

1. Oprogramuj funkcję φ (funkcja `gcd` jest dostępna w bibliotece `Prelude`).
2. Napisz funkcję, która dla danej liczby naturalnej n wyznacza sumę:

$$\sum_{k|n} \varphi(k).$$

-
1. Oto implementacja funkcji φ w języku Haskell:

```
phi :: Int -> Int
phi n = length [k | k <- [1..n], gcd k n == 1]

> phi 10
4
```

2. Oto implementacja funkcji, która wyznacza sumę $\sum_{k|n} \varphi(k)$:


```

sumPhi :: Int -> Int
sumPhi n = sum [phi k | k <- [1..n], n `mod` k == 0]

> sumPhi 10
10

```

4.2.2 Zadanie 14

Liczbę naturalną n nazywamy *doskonałą*, jeżeli spełnia warunek:

$$n = \sum \{d : 1 \leq d < n \wedge d \mid n\}. \quad (6)$$

Na przykład liczba 6 jest liczbą doskonałą, ponieważ:

$$6 = 1 + 2 + 3. \quad (7)$$

Wyznacz wszystkie liczby doskonałe mniejsze od 10 000.

Uwaga: Do tej pory nie wiadomo, czy istnieje nieskończenie wiele liczb doskonałych.

Oto implementacja funkcji, która znajduje wszystkie liczby doskonałe mniejsze od 10 000:

```

isPerfect :: Int -> Bool
isPerfect n = n == sum [d | d <- [1..n-1], n `mod` d == 0]

perfectNumbers :: [Int]
perfectNumbers = [n | n <- [1..9999], isPerfect n]

> perfectNumbers
[6,28,496,8128]

```

4.2.3 Zadanie 15

Parę liczb naturalnych (m, n) nazywamy *zaprzyjaźnionymi*, jeżeli suma dzielników właściwych każdej z nich równa się drugiej:

$$\sigma(m) - m = n, \quad \sigma(n) - n = m,$$

gdzie $\sigma(n)$ oznacza sumę wszystkich dzielników liczby n .

Znajdź wszystkie zaprzyjaźnione pary, których oba składniki są mniejsze od 10^5 .

Uwaga: Do tej pory nie wiadomo, czy istnieje nieskończenie wiele par liczb zaprzyjaźnionych.

Tak może wyglądać funkcja szukająca liczb zaprzyjaźnionych w podanym zakresie:

```

sumaDzielnikow :: Int -> Int
sumaDzielnikow 1 = 0
sumaDzielnikow n = 1 + sum [ if x * x == n then x
                             else if n `mod` x == 0 then x + (n `div` x)
                             else 0
                             | x <- [2..(floor . sqrt . fromIntegral) n], x * x <= n ]

where
    limit = (floor . sqrt . fromIntegral) n

amicablePairs :: [(Int, Int)]
amicablePairs = [ (n, m)
                  | n <- [2..maxVal-1]

```

```

        , let m = sumaDzielnikow n
        , m > n, m < maxVal
        , sumaDzielnikow m == n ]

> amicablePairs
[(220,284),(1184,1210),(2620,2924),(5020,5564),(6232,6368)]

```

4.2.4 Zadanie 16

Dla $n \in \mathbb{N}^+$ definiujemy:

$$\text{dcp}(n) = \frac{1}{2n^2} |\{(k, l) \in \{1, \dots, n\} : \gcd(k, l) = 1\}|. \quad (8)$$

1. Zaimplementuj tę funkcję w języku Haskell za pomocą *list comprehension*.
2. Zoptymalizuj ten kod, pisząc rekurencyjną wersję tej funkcji.
3. Wyznacz wartości tej funkcji dla $n = 100, 200, 300, \dots, 10000$ i postaw jaką rozsądną hipotezę o:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dcp}(n). \quad (9)$$

1. Przykładowa implementacja przy użyciu *list comprehension*:

```

dcp :: Int -> Double
dcp n = 1 / (2 * fromIntegral (n^2))
        * fromIntegral (length [(k, l)
                                | k <- [1..n], l <- [1..n], gcd k l == 1])

> dcp 10
0.315

```

2. Optimalizacja kodu przy użyciu rekurencji:

```

dcp' :: Int -> Double
dcp' n = 1 / (2 * fromIntegral (n^2)) * fromIntegral (dcp'' n 1 1)

dcp'' :: Int -> Int -> Int -> Int
dcp'' n k l
    | k > n      = 0
    | l > n      = dcp'' n (k + 1) 1
    | gcd k l == 1 = 1 + dcp'' n k (l + 1)
    | otherwise = dcp'' n k (l + 1)

> dcp' 10
0.315

```

3. Wyznaczenie wartości funkcji dla $n = 100, 200, 300, \dots, 10000$:

```

dcpValues :: [Double]
dcpValues = [dcp' n | n <- [100, 200..10000]]

> dcpValues

```

```
[0.30435,0.3057875,0.304416666666666667,0.304234375,0.304462,
0.30416527777777778,0.3041173469387755,0.30429609375,0.3041055555555556,
0.3041915,0.3042293388429752,0.30401770833333336,0.30404940828402366,
0.30412627551020405,0.304080666666666667,0.3039966796875,
0.3041839100346021,0.3040300925925926,0.3040048476454294,0.304146875,
0.304041156462585,0.3039759297520661,0.30407854442344046,
0.3040509548611111,0.3039804,0.3040543639053254,0.3040213305898491,
0.30399381377551016,0.3040546373365042,0.30402083333333335,
0.3040220083246618,0.304030029296875,0.3039801193755739,
0.30399476643598616,0.30402542857142856,0.30400150462962966,
0.30400697589481374,0.30404456371191135,0.30397827087442475,
0.30397509375,0.3040405413444378,0.30397174036281177,
0.30401695511087073,0.3040362345041322,0.3039997777777778,
0.30397993856332706,0.3040101177003169,*** Exception: stack overflow
```

Na podstawie uzyskanych wartości można postawić hipotezę, że granica funkcji $dcp(n)$ dla $n \rightarrow \infty$ wynosi około 0.304. Wartość ta może być przybliżona do wartości funkcji Eulera $\frac{6}{\pi^2}$. \square

4.3 Listy – część 1.

Na początku tych zadań należało zastanowić się nad implementacją istniejących już funkcji z Prelude, a następnie zaimplementować je samodzielnie.

4.3.1 Zadanie 17

Napisz funkcję `nub`, która usunie z listy wszystkie duplikaty, np.

```
nub [1,1,2,2,2,1,4,1] == [1,2,4]
```

Oto implementacja funkcji `nub` w języku Haskell:

```
nub' :: (Eq a) => [a] -> [a]
nub' [] = []
nub' (x:xs) = x : nub' (filter (/= x) xs)
```

Jak to działa?

1. Jeśli lista pusta to zwróć pustą

```
nub' [] = []
```

2. W przeciwnym przypadku zwróć listę, której pierwszym elementem jest pierwszy element listy wejściowej (`x:xs` dzieli listę – wyciąga pierwszy element), a resztę listy tworzy rekurencyjne wywołanie funkcji `nub'` na liście, z której usunięto wszystkie wystąpienia pierwszego elementu (`filter (/= x) xs` usuwa z `xs` wszystko co jest `x`).

```
nub' (x:xs) = x : nub' (filter (/= x) xs)
```

4.3.2 Zadanie 18

Napisz funkcję `inits`, która dla danej listy wyznaczy listę wszystkich jej odcinków początkowych, np.

```
inits [1,2,3,4] == [], [1], [1,2], [1,2,3], [1,2,3,4]
```

Funkcja `inits` również powinna wykonywać się rekurencyjnie. Zabieramy po jednym elemencie i wpisujemy do listy.

```
inits' :: [a] -> [[a]]
inits' [] = [[]]
inits' (x:xs) = [] : map (x:) (inits' xs)
```

Działa to w bardzo podobny sposób jak poprzednie:

1. Jeśli lista pusta to zwróć pustą listę

```
inits' [] = [[]]
```

2. W przeciwnym przypadku narzuć mapę na wszystkie elementy listy rekurencyjne wywołanie funkcji `inits'` na liście bez pierwszego elementu, a następnie dodaj na początek każdej z tych list pierwszy element listy wejściowej

```
inits' (x:xs) = [] : map (x:) (inits' xs)
```

4.3.3 Zadanie 19

Napisz funkcję `tails`, która dla danej listy wyznaczy listę wszystkich jej odcinków początkowych, np.:

```
tails [1,2,3,4] == [[], [4], [3,4], [2,3,4], [1,2,3,4]]
```

Funkcja `tails` działa analogicznie do funkcji `inits`, ale zamiast zdejmować elementy z początku listy, zdejmuje je z końca.

```
tails' :: [a] -> [[a]]
tails' [] = [[]]
tails' (x:xs) = (x:xs) : tails' xs
```

1. Jeśli lista pusta to zwróć pustą listę

```
tails' [] = [[]]
```

2. W przeciwnym przypadku zwróć listę, której pierwszym elementem jest cała lista wejściowa, a resztę listy tworzy rekurencyjne wywołanie funkcji `tails'` na liście bez pierwszego elementu

```
tails' (x:xs) = (x:xs) : tails' xs
```

4.3.4 Zadanie 20

Napisz funkcję `splits`, która dla danej listy `xs` wyznaczy listę wszystkich par (ys, zs) takich, że

```
xs == ys++zs
```

Funkcja `splits` powinna zwracać listę par, które są wynikiem podziału listy wejściowej na dwie części. Warto zauważyć, że dla każdego elementu listy wejściowej można zrobić podział na dwie części: jedną z elementem i drugą bez niego. W ten sposób można zrobić wszystkie możliwe podziały listy.

```
splits' :: [a] -> [(a, [a])]
splits' [] = [((), [])]
splits' (x:xs) = ([], x:xs) : [(x:ys, zs) | (ys, zs) <- splits' xs]
```

1. Jeśli lista pusta to zwróć listę, której jedynym elementem jest para pustych list

```
splits' [] = [((), [])]
```

2. W przeciwnym przypadku zwróć listę, której pierwszym elementem jest para pustej listy i listy wejściowej, a resztę listy tworzą pary, które są wynikiem rekurencyjnego wywołania funkcji `splits'` na liście bez pierwszego elementu

```
splits' (x:xs) = ([], x:xs) : [(x:ys, zs) | (ys, zs) <- splits' xs]
```

4.3.5 Zadanie 21

Oto jedna z możliwych implementacji funkcji `partition`:

```
partition :: (a => Bool) => [a] => ([a], [a])
partition p xs = (filter p xs , filter (not . p) xs)
```

Ulepsz implementację tej funkcji: powinna zwracać ten sam wynik, ale powinna przechodzić przez listę tylko raz.

Oto ulepszona implementacja funkcji `partition`: funkcja `partition'` przechodzi przez listę tylko raz, dzięki użyciu akumulatorów.

```
partition' :: (a -> Bool) -> [a] -> ([a], [a])
partition' p xs = partition'' p xs [] []

partition'' :: (a -> Bool) -> [a] -> [a] -> [a] -> ([a], [a])
partition'' _ [] ys zs = (ys, zs)
partition'' p (x:xs) ys zs
  | p x = partition'' p xs (ys ++ [x]) zs
  | otherwise = partition'' p xs ys (zs ++ [x])
```

1. Jeśli lista pusta to zwróć parę list `ys` i `zs`

```
partition'' _ [] ys zs = (ys, zs)
```

2. W przeciwnym przypadku jeśli warunek `p` jest spełniony to dodaj element do listy `ys` i rekurencyjnie wywołaj funkcję `partition''` na reszcie listy, a jeśli nie to dodaj element do listy `zs` i rekurencyjnie wywołaj funkcję `partition''` na reszcie listy

```
partition'' p (x:xs) ys zs = ...
```

Przykładowe wywołanie:

```
> partition' even [1..10]
([2,4,6,8,10],[1,3,5,7,9])
```

4.3.6 Zadanie 22

Zaimplementuj samodzielnie funkcję `permutations` (znajduje się ona w module `Data.List`), która dla danej listy wyznaczy listę wszystkich jej permutacji (możemy założyć, że wszystkie elementy listy wejściowej są różne).

Oto implementacja funkcji `permutations` w języku Haskell:

```
permutations' :: [a] -> [[a]]
permutations' [] = [[]]
permutations' (x:xs) = [ys ++ [x] ++ zs | perm <- permutations' xs,
                                         (ys, zs) <- splits' perm]
```

1. Jeśli lista pusta to zwróć listę, której jedynym elementem jest pusta lista

```
permutations' [] = [[]]
```

2. W przeciwnym przypadku zwróć listę, której elementami są wszystkie możliwe permutacje listy wejściowej, które powstają przez dodanie elementu `x` na różne pozycje w permutacjach listy bez pierwszego elementu

```
permutations' (x:xs) = [ys ++ [x] ++ zs
                        | perm <- permutations' xs, (ys, zs) <- splits' perm]
```

4.3.7 Zadanie 23 – Klasyczny Problem hetmanów

Celem jest umieszczenie ośmiu hetmanów na szachownicy tak, aby żadne dwa hetmany nie atakowały się nawzajem, tj. nie mogły znajdować się w:

- tym samym rzędzie,
- tej samej kolumnie,
- tej samej przekątnej.

1. Zaimplementuj problem wyszukiwania położeń Hetmanów w Haskell'u korzystając z funkcji `permutations`.
2. Dwa rozwiązania nazywamy równoważne jeśli pierwsze z nich można otrzymać za pomocą złożenia odbicia poziomego (*reverse*) oraz odbicia pionowego (np. `map (\x-> n+1-x)`) z drugiego. Ile jest nierównoważnych poprawnych rozstawień hetmanów?

Wskazówka: Przedstaw pozycje hetmanów jako listę liczb $[1, \dots, n]$. Przykład: ciąg $[4, 2, 7, 3, 6, 8, 5, 1]$ oznacza, że hetman w pierwszej kolumnie jest w rzędzie 4, hetman w drugiej kolumnie jest w rzędzie 2 itd.
