Obliczenia Naukowe – Sprawozdanie Laboratoria 4.

Jakub Kogut

7 grudnia 2025

1 Wstęp

Na liście pojawia się problem interpolacji funkcji; polega ona na znalezieniu funkcji wielomianowej, która przechodzi przez zadane punkty i w "dobry sposób" przybliża funkcję oryginalną.
Dokładniej dla zadanych $(x_i, f(x_i))$ *węzłów interpolacji*, gdzie $i = 0, 1, \ldots, n$ chcemy znaleźć wielomian $p_n(x)$ stopnia co najwyżej n, taki że:

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Również celem jest zapisanie go w postacji Newtona:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j), \tag{2}$$

gdzie $f[x_0, x_1, \ldots, x_i]$ są *ilorazami różnicowymi* funkcji f w punktach $x_0, x_1, \ldots, x_i$.

1.1 Motywacja

W tej sekcji wyjaśnie dlaczego stosujemy postać Newtona do zapisu wielomianu interpolacyjnego.

1.1.1 Dlaczego nie postać naturalna?

Postać naturalna wielomianu to:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n. \tag{3}$$

Chociaż jest to najprostsza postać, to ma kilka wad:

- Trudność w obliczaniu współczynników a_i z danych punktów (rozwiązanie równania z macierzą Vandermonde'a, która jest źle uwarunkowana).
- Niestabilność numeryczna dla dużych n

1.1.2 Dlaczego postać Newtona?

Postać Newtona jest zbudowana na innej bazie:

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) : k = 0, 1, \ldots, n \right\} \\ &= \{1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \ldots, (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Wtedy $p_n(x)$ można zapisać jako:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j), \tag{5}$$

gdzie współczynniki c_i są równe ilorazom różnicowym:

$$c_i = f[x_0, x_1, \ldots, x_i]. \tag{6}$$

Postać Newtona ma kilka zalet:

- Łatwość obliczania współczynników za pomocą ilorazu różnicowego (zadanie 1.)
- Łatwe obliczanie wartości wielomianu w danym punkcie za pomocą schematu Hornera (zadanie 2.)
- Stabilność numeryczna (mniejsze błędy przy dużych n)

2 Implementacja

Implementacja algorytmów znajduje się w pliku `interpolacja.jl`. Poniżej znajduje się opis zadań.

3 Zadanie 1.

W zadaniu 1. należy zaimplementować funkcję obliczającą ilorazy różnicowe dla zadanych węzłów interpolacji i wartości funkcji w tych punktach.
Poniżej znajduje się pseudokod algorytmu:

Algorithm 1 ilorazyRoznicowe

function ILORAZYROZNICOWE(x, f)
    $n \leftarrow \text{length}(x)$
    $F \leftarrow$ array of size n
    for $i \leftarrow 0$ to $n-1$ **do**
        $F[i] \leftarrow f[i]$
    end for
    for $j \leftarrow 1$ to $n-1$ **do**
        for $i \leftarrow n-1$ downto j **do**
            $F[i] \leftarrow \dfrac{F[i] - F[i-1]}{x[i] - x[i-j]}$
        end for
    end for
    return F
end function