Obliczenia Naukowe – Sprawozdanie Laboratoria 3.

Jakub Kogut

24 listopada 2025

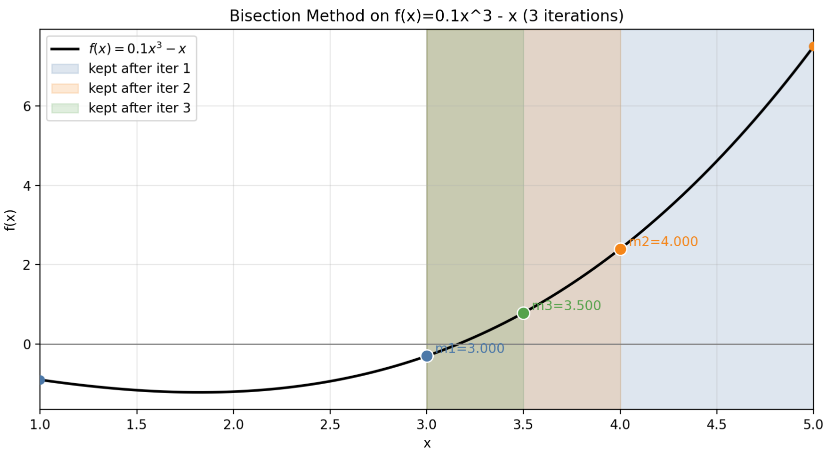
1 Wstęp

Na 3. liscie zadań mamy za zadanie napisać oraz przetowstować różne metody rozwiązywania równiań $f(x) = 0$, gdzie f jest zadaną funkcją rzeczywistą jednej zmiennej.

2 Metody iteracyjne

2.1 Metoda bisekcji

Metoda bisekcji polega na podziale przedziału $[a, b]$, na którym funkcja f zmienia znak, na pół i wyborze podprzedziału, na którym funkcja również zmienia znak. Proces ten iterujemy aż do uzyskania zadowalającej dokładności. Z twierdzenia Darboux wynika, że jeżeli f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$ i $f(a)f(b) < 0$, to istnieje co najmniej jedno miejsce zerowe f w przedziale (a, b).



Rysunek 1: Ilustracja metody bisekcji z wykładu. Watości początkowe $a = 1, b = 5$.

Algorytm działania metody wygląda następująco:

1. wyznacz środek przedziału $c = \frac{a+b}{2}$
2. należy zbadać w którym z przedziałów $[a, c]$ lub $[c, b]$ funkcja zmienia znak poprzez sprawdzenie wartości $f(a)f(c)$
3. jeżeli $f(a)f(c) < 0$, to należy przyjąć $b \leftarrow c$, w przeciwnym wypadku $a \leftarrow c$
4. powtarzamy kroki 1-3 aż do uzyskania zadowalającej dokładności

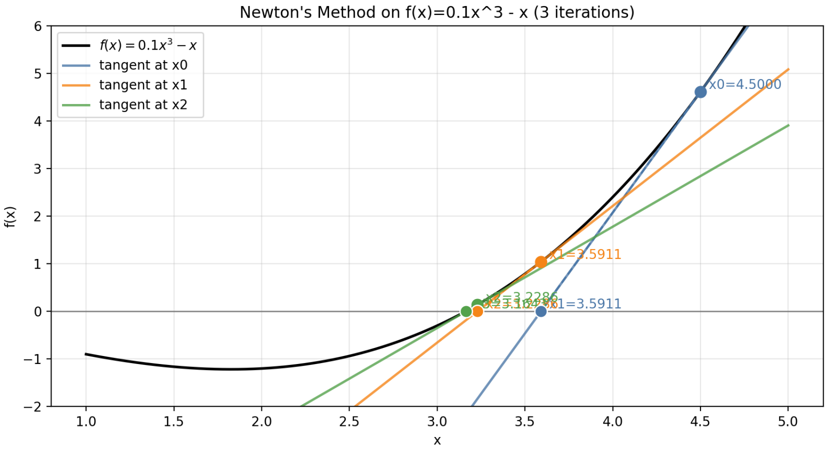
Z wykładu wiemy, że metoda ta jest zbieżna liniowo i działa globalnie.

2.2 Metoda Newtona

Metoda Newtona polega na przybliżaniu miejsca zerowego funkcji f poprzez kolejne styczne do wykresu funkcji. Wybieramy punkt startowy x_0 i obliczamy kolejne przybliżenia według wzoru:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Proces ten powtarzamy aż do uzyskania zadowalającej dokładności. Jednym z założeń tej metody



Rysunek 2: Ilustracja metody Newtona z wykładu. Wartość początkowa $x_0 = 4.5$.

jest to, że musi ona być podwójnie różniczkowalna w otoczeniu miejsca zerowego. Zatem, jeżeli badamy funkcję f na przedziale $[a, b]$ musi ona spełniać:

$$f \in C^2[a, b]$$

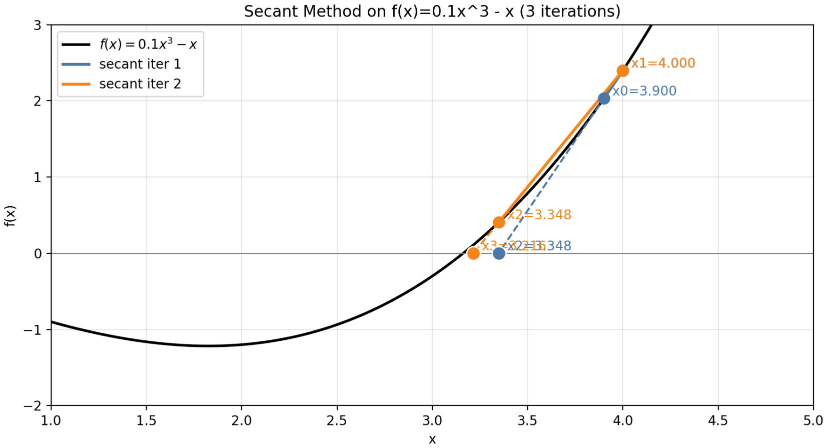
Z wykładu wiemy, że jest ona lokalnie zbieżna kwadratowo.

2.3 Metoda siecznych

Metoda siecznych jest podobna do metody Newtona, jednak zamiast korzystać z pochodnej funkcji, korzysta z przybliżenia pochodnej za pomocą dwóch ostatnich punktów. Wybieramy dwa punkty startowe x_0 i x_1 i obliczamy kolejne przybliżenia według wzoru:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Proces ten powtarzamy aż do uzyskania zadowalającej dokładności. Natomiast ta metoda jest również lokalnie zbieżna, ale z wykładnikiem zbieżności $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Rysunek 3: Ilustracja metody siecznych z wykładu. Wartości początkowe $x_0 = 1, x_1 = 5$.

3 Zadanie 4

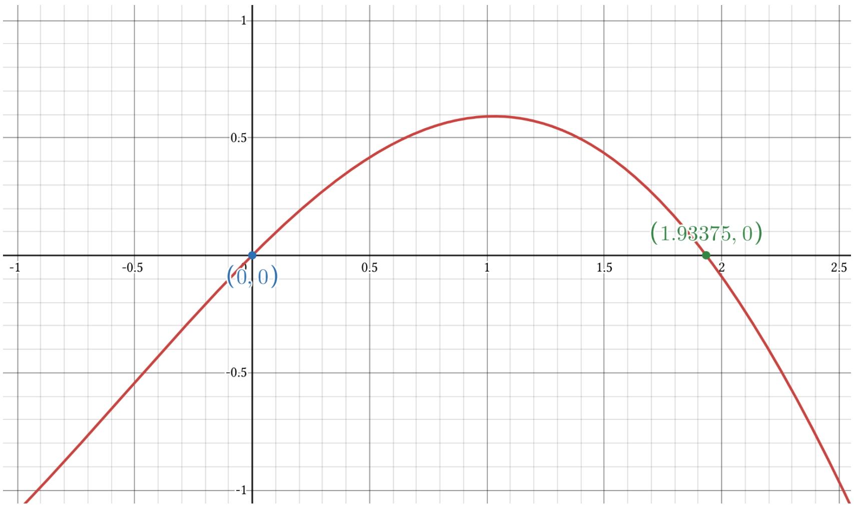
W zadaniu 4 należało przetestować zachowania zaimplementowanych metod na funkcji:

$$f(x) = sin(x) - \frac{x^2}{4}$$

Możemy łatwo policzyć jej pochodną, która będzie potrzebna w metodzie Newtona:

$$f'(x) = cos(x) - \frac{x}{2}$$

Dla wszystkich metod dana jest ta sama dokładność $\epsilon = 10^{-5}, \delta = 10^{-5}$.



Rysunek 4: Wykres funkcji: $f(x) = sin(x) - \frac{x^2}{4}$.

Jak widać każda z metod wyszukuje poprawnie miejsca zerowego funkcji z zadaną dokładnością. Najszybciej zbiega metoda Newtona oraz metoda siecznych, które potrzebują jedynie 4 iteracji do uzyskania zadowalającego wyniku. Wynika to z faktu, że obie te metody są lokalnie zbieżne kwadratowo (Newton) oraz z wykładnikiem zbieżności $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (sieczne). Metoda bisekcji potrzebuje aż 16 iteracji, co jest zgodne z jej liniową zbieżnością. Wszystkie wartości początkowe zostały dobrze dobrane. Ponieważ metody siecznych oraz Newtona są metodami lokalnymi, a ich punkty startowe znajdowały się wystarczająco blisko rzeczywistego miejsca zerowego funkcji.

Metoda	Przybliżone r	Wartość $f(r)$	Liczba iteracji	Kod Błędu
Bisekcja	1.9337539672851562	$-2.7027680138402843 \cdot 10-7$	16	0
Newton	1.933753779789742	$-2.2423316314856834 \cdot 10^{-8}$	4	0
Sieczne	1.933753644474301	$1.564525129449379 \cdot 10^{-7}$	4	0

Tabela 1: Wyniki działania metod na funkcji $f(x) = sin(x) - \frac{x^2}{4}$.

4 Zadanie 5

W zadaniu 5 mamy wyznaczyć punkt przecięcia się dwóch funkcji:

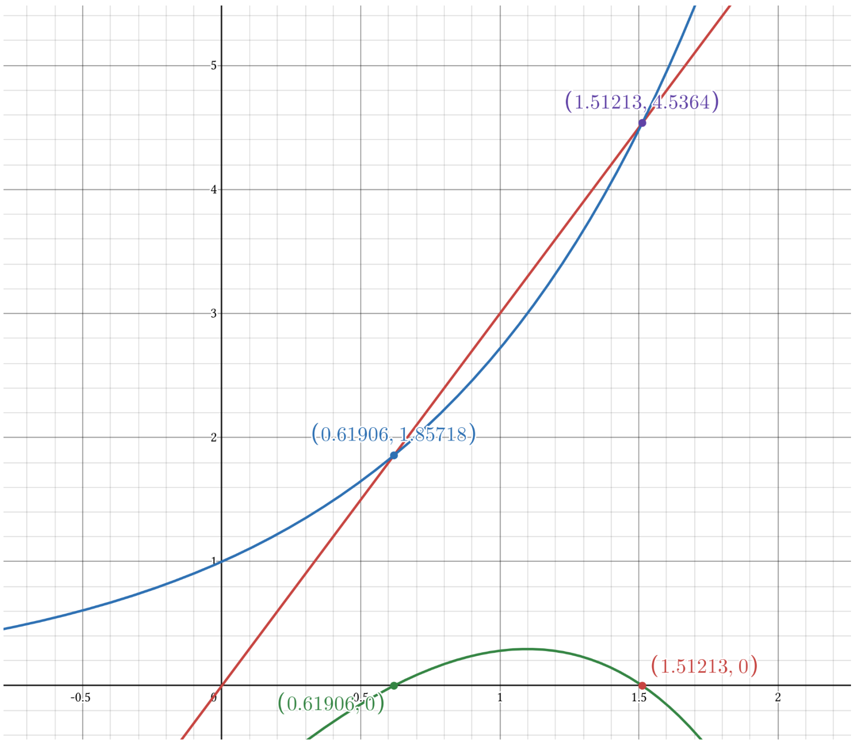
$$f_1(x) = 3x$$

$$f_2(x) = e^x$$

Aby to zrobić, musimy rozwiązać równanie:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) = 3x - e^x = 0$$

Zobaczmy również wykres tej funkcji: Jak widać na wykresie, funkcja f ma dwa miejsca zerowe:



Rysunek 5: Wykres funkcji: $f(x) = 3x - e^x$, $f_1(x) = 3x$, $f_2(x) = e^x$.

jedno w przedziale $[0, 1]$ oraz drugie w przedziale $[1, 2]$. Zatem aby znaleźć oba miejsca zerowe, zastosujemy metodę bisekcji na obu przedziałach.

Przedział	Przybliżone r	Wartość $f_1(r)$	Wartość $f_2(r)$	Liczba iteracji
$[0, 1]$	0.61907958984375	1.85723876953125	1.8572178527553258	14
$[1, 2]$	1.51214599609375	4.53643798828125	4.536455571851486	14

Tabela 2: Wyniki działania metody bisekcji na funkcji $f(x) = 3x - e^x$ na dwóch przedziałach.

Aby nie sprawdzać ilości miejsc zerowych funkcji na danym przedziale, moglibyśmy zmodyfikować metodę bisekcji tak, aby działała rekurencyjnie na podprzedziałach, aż do znalezienia wszystkich miejsc zerowych z zadaną dokładnością. Wtedy można by było uniknąć pułkapki z wyborem złych przedziałów startowych.

5 Zadanie 6

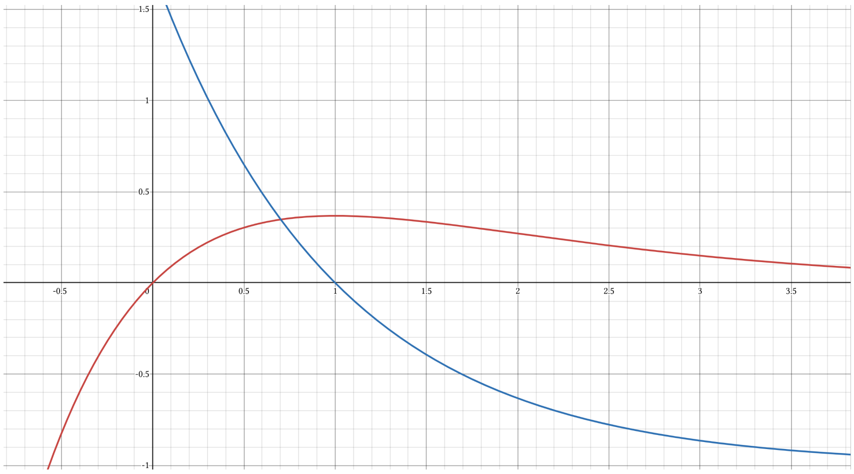
W zadaniu należy znaleść miejsca zerowe funkcji:

$$f_1(x) = e^{1-x} - 1$$

oraz

$$f_2(x) = xe^{-x}$$

przy użyciu wsytkich dotyczasowych metod iteracyjnych. Zobaczmy wykresy tych funkcji:



Rysunek 6: Wykresy funkcji: $f_1(x) = e^{1-x} - 1$, $f_2(x) = xe^{-x}$.

Również dokładność dla wszystkich metod wynosi $\epsilon = 10^{-5}, \delta = 10^{-5}$.

5.1 Metoda bisekcji

Dla funkcji f_1 uruchomiłem metodę na kilku przedziałach aby zbadać jej zachowanie:

Przedział	Przybliżone r	Wartość $f_1(r)$	Liczba iteracji	Kod Błędu
$[-100, 200]$	1.0000020265579224	$-2.026555868894775 \cdot 10^{-6}$	25	0
$[0, 1.5]$	1.0000019073486328	$-1.9073468138230965 \cdot 10^{-6}$	18	0
$[0.9999, 1.0001]$	1.0	0.0	1	0

Tabela 3: Wyniki działania metody bisekcji na funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$.

Dla funkcji f_2 analogicznie:

Przedział	Przybliżone r	Wartość $f_2(r)$	Liczba iteracji	Kod Błędu
$[-100, 100]$	100.0	$3.7200759760208363 \cdot 10^{-42}$	0	0
$[-0.95, 1.5]$	$3.0517578126132883 \cdot 10^{-6}$	$3.0517484994017526 \cdot 10^{-6}$	14	0
$[-1, 1]$	0.0	0.0	1	0
$[-0.005, 0.005]$	0.0	0.0	1	0

Tabela 4: Wyniki działania metody bisekcji na funkcji $f_2(x) = xe^{-x}$.

Przy nie odpowiednim doborze przedziału startowego metoda bisekcji może nie znaleźć miejsca zerowego (pierwszy wiersz tabeli 4). Dzieje się tak ponieważ funkcja f_2 bardzo szybko zbliża się do 0, które jest brane za rozwiązanie.
Jeżeli szukany pierwiastek jest środkiem któregoś z przedziałów startowych, metoda znajdzie go od razu (drugi i trzeci wiersz tabeli 3 oraz 4).

5.2 Metoda Newtona

Dla funkcji f_1:

Punkt startowy	Przybliżone r	Wartość $f_1(r)$	Liczba iteracji	Kod Błędu
10.0	NaN	NaN	1000	1
5.0	0.9999996427095682	$3.572904956339329 \cdot 10^{-7}$	54	0
2.0	0.9999999810061002	$1.8993900008368314 \cdot 10^{-8}$	5	0
1.0	1.0	0.0	0	0
0.5	0.9999999998878352	$1.1216494399945987 \cdot 10^{-10}$	4	0
0.0	0.9999984358892101	$1.5641120130194253 \cdot 10^{-6}$	4	0
-1.0	0.9999999999700886	$2.991140668484604 \cdot 10^{-11}$	6	0
-100.0	0.9999999998780821	$1.2191803122618694 \cdot 10^{-10}$	105	0

Tabela 5: Wyniki działania metody Newtona na funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$.

Metoda Newtona dla funkcji f_1 działa dobrze dla punktów startowych blisko miejsca zerowego. Jednak dla punktu startowego daleko od miejsca zerowego (pierwszy wiersz tabeli 5) metoda nie zbiega.

- Jeżeli punkt startowy $x_0 \in (1, \infty)$, dla pewnych wartości takich jak $x_0 = 2.0$, czy $x_0 = 5.0$, metoda zbiega do miejsca zerowego. Jednak dla większych wartości, jak $x_0 = 10.0$, metoda nie zbiega i kończy się po osiągnięciu maksymalnej liczby iteracji.

Punkt startowy	Przybliżone r	Wartość $f_2(r)$	Liczba iteracji	Kod Błędu
10000.0	10000.0	0.0	0	0
10.0	15.455259647688075	$2.9987642464534236 \cdot 10^{-6}$	5	0
5.0	15.19428398343915	$3.827247505782987 \cdot 10^{-6}$	9	0
2.0	15.473297079378938	$2.9485963624070995 \cdot 10^{-6}$	11	0
1.0	NaN	NaN	1	2
0.5	$-3.0642493416461764 \cdot 10^{-7}$	$-3.0642502806087233 \cdot 10^{-7}$	5	0
0.0	0.0	0.0	0	0
-0.5	$-3.0642493416461764 \cdot 10^{-7}$	$-3.0642502806087233 \cdot 10^{-7}$	4	0
-1.0	$-3.0642493416461764 \cdot 10^{-7}$	$-3.0642502806087233 \cdot 10^{-7}$	5	0
-100.0	$-4.356806237879908 \cdot 10^{-6}$	$-4.356825219681853 \cdot 10^{-6}$	108	0

Tabela 6: Wyniki działania metody Newtona na funkcji $f_2(x) = xe^{-x}$.

Z wyników widać, że metoda Newtona może mieć problemy z zbieżnością jeżeli punkt startowy nie jest dobrze dobrany (lokalność). W przypadku funkcji f_1 im dalej od miejsca zerowego znajduje się punkt startowy, tym więcej iteracji potrzeba do znalezienia rozwiązania. Natomiast w przypadku funkcji f_2 punkty startowe większe od około 1 prowadzą do braku zbieżności (w przypadku $x_0 > 1$ wartości funkcji są efektywnie równe 0). Zatem:

- jeżeli punkt startowy $x_0 \in (1, \infty)$, metoda nie zbiega do miejsca zerowego, kończy się po osiągnięciu wystarczająco małej wartości funkcji,
- jeżeli punkt startowy $x_0 = 1.0$, otrzymujemy błąd 2 (pochodna równa 0), faktycznie

$$f_2'(1) = e^{-1} + (-1)e^{-1} = 0$$

5.3 Metoda siecznych

Punkty startowe	Przybliżone r	Wartość $f_1(r)$	Liczba iteracji	Kod Błędu
(0.0, 2.0)	1.0000017597132702	$-1.7597117218937086 \cdot 10^{-6}$	6	0
(-1.0, 1.0)	1.0	0.0	1	0
(1.5, 2.0)	1.0000034269838276	$-3.4269779555229363 \cdot 10^{-6}$	5	0
(2.5, 3.0)	1.0000000980263084	$-9.80263036298723 \cdot 10^{-8}$	11	0
(-2.5, -3.0)	0.9999998925933478	$1.0740665801201033 \cdot 10^{-7}$	10	0
(200.5, -300.0)	200.5	-1.0	1	0
(200.5, 300.0)	NaN	NaN	1000	1

Tabela 7: Wyniki działania metody siecznych na funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$.

Dla funkcji f_1 metoda siecznych działa dobrze dla różnych punktów startowych, jednak dla bardzo dużych wartości (ostatni wiersz tabeli 7) metoda nie zbiega.

Punkty startowe	Przybliżone r	Wartość $f_2(r)$	Liczba iteracji	Kod Błędu
(0.0, 2.0)	0.0	0.0	1	0
(-1.0, 1.0)	$1.744165849924562 \cdot 10^{-8}$	$1.7441658195034172 \cdot 10^{-8}$	18	0
(1.5, 2.0)	15.105971719963007	$4.156315487897544 \cdot 10^{-6}$	15	0
(2.5, 3.0)	15.35695852170886	$3.2874780854479134 \cdot 10^{-6}$	15	0
(-2.5, -3.0)	$-2.839329775034345 \cdot 10^{-9}$	$-2.839329783096139 \cdot 10^{-9}$	11	0
(-200.5, -300.0)	-200.5	$-2.3886801389325308 \cdot 10^{89}$	1	0
(200.5, 300.0)	300.0	$1.544460066723604 \cdot 10^{-128}$	1	0

Tabela 8: Wyniki działania metody siecznych na funkcji $f_2(x) = xe^{-x}$.

Dla funkcji f_2 metoda siecznych również działa dobrze dla różnych punktów startowych, nawet dla bardzo dużych wartości.