

Obliczenia Naukowe – Sprawozdanie Laboratoria 2.

Jakub Kogut

10 listopada 2025

1 Zadanie 1

1.1 Opis problemu

W zadaniu należało powtórzyć eksperyment z zadania 5. z listy 1., jednakże ze zmienionymi danymi wejściowymi i zaobserwować ich wpływ.

1.2 Rozwiążanie

Wykorzystałem kod z poprzedniego zadania, zmieniając jedynie dane wejściowe, zgodnie z poleceniem: usunąłem ostatnią 9 z x_4 oraz ostatnią 7 z x_5 .

1.3 Wyniki

Tabela przedstawia wyniki eksperymentu oraz porównanie z wynikami na starych danych.

Algorytm	Float32 Stare	Float64 Stare	Float32 Nowe	Float64 Nowe
“w przód”	$-4.9994430 \cdot 10^{-1}$	$1.025188136829 \cdot 10^{-10}$	$-4.9994430 \cdot 10^{-1}$	$-4.296342739891 \cdot 10^{-3}$
“w tył”	$-4.5434570 \cdot 10^{-1}$	$-1.564330887049 \cdot 10^{-10}$	$-4.5434570 \cdot 10^{-1}$	$-4.296342998713 \cdot 10^{-3}$
rosnąco ¹	$-5.0000000 \cdot 10^{-1}$	$0.000000000000 \cdot 10^0$	$-5.0000000 \cdot 10^{-1}$	$-4.296342842280 \cdot 10^{-3}$
malejąco	$-5.0000000 \cdot 10^{-1}$	$0.000000000000 \cdot 10^0$	$-5.0000000 \cdot 10^{-1}$	$-4.296342842280 \cdot 10^{-3}$

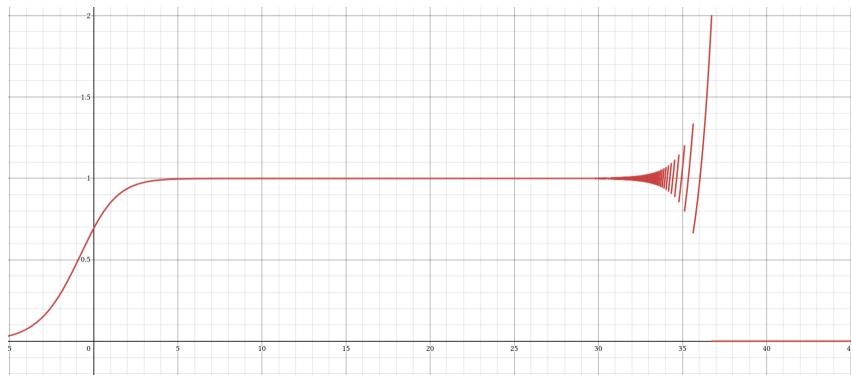
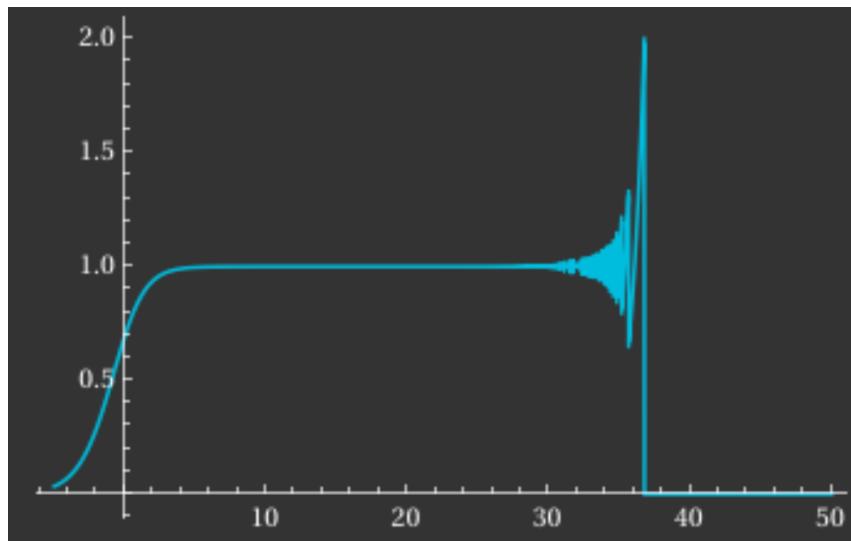
1.4 Wnioski

Można zauważyc, że wyniki dla Float32 nie uległy zmianie, natomiast dla Float64 zmieniły się znacząco. Dzieje się tak dlatego, że w przypadku Float32 precyzja jest na tyle niska, że usunięcie tych elementów nie miało wpływu na wynik końcowy. W przypadkuFloat64 precyzja jest dużo większa, więc niewielka zmiana w danych wejściowych miała wpływ na wynik końcowy, po czym można wnioskować, że zadanie policzenia iloczynu skalarnego jest źle uwarunkowane.

2 Zadanie 2

2.1 Opis problemu

W zadaniu należy narysować wykres funkcji $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$ przy użyciu dwóch programów do wizualizacji. Następnie należy policzyć granicę tej funkcji przy $x \rightarrow \infty$ oraz porównać ją z wykresem.

Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$ w programie DesmosRysunek 2: Wykres funkcji $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$ w programie Wolfram Alpha

2.2 Rozwiązanie

Do wizualizacji użyłem programu *Desmos* oraz *Wolfram Alpha*. Obliczenie granicy:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{e^{-x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(\ln(1 + e^{-x}))}{\frac{d}{dx}(e^{-x})} \quad (\text{Reguła de l'Hospitala}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}}{-e^{-x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1
 \end{aligned}$$

2.3 Wnioski

Na obydwu wykresach widać, że w okolicy $x \in [30, 36]$ funkcja zachowuje się niestabilnie, a następnie dla większych wartości x przyjmuje wartość 0, co jest sprzeczne z teorią, gdyż granica funkcji przy $x \rightarrow \infty$ wynosi 1. Dzieje się tak, ponieważ dla dużych wartości x wyrażenie e^x staje się bardzo duże, natomiast $\ln(1 + e^{-x})$ bardzo małe, przez co ich iloczyn, w zastosowanej przez programy arytmetyce, jest obarczony dużym błędem. Dla jeszcze większych wartości $x > 36$ wartość $\ln(1 + e^{-x}) \approx 0$ zatem cała funkcja przyjmuje wartość 0.

3 Zadanie 3

3.1 Opis problemu

W zadaniu należy porównać dwie metody rozwiązywania układów równań liniowych: metodę eliminacji Gaussa oraz poprzez wzięcie macierzy odwrotnej. Eksperyment należy przeprowadzić dla różnych rozmiarów macierzy Hilberta oraz losowej o rosnącym wskaźniku uwarunkowania.

3.2 Rozwiązanie

Do rozwiązania zadania użyłem podanych funkcji w `hilb.jt` oraz `matcond.jt` do generowania macierzy Hilberta oraz losowej o zadanym wskaźniku uwarunkowania. Następnie dla każdej z macierzy generowałem wektor $b = A \cdot x$, gdzie x to wektor jednostkowy. Następnie rozwiązywałem układ równań $Ax = b$ za pomocą obu metod i liczyłem błąd bezwzględny pomiędzy otrzymanym rozwiązaniem a wektorem x .

3.3 Wyniki

Poniżej w tabelach znajdują się wyniki eksperymentów dla macierzy Hilberta oraz losowych.

Rozmiar	Wskaźnik uwarunkowania	Rząd	Błąd metody Gaussa	Błąd metody odwrotnej
1	1.0	1	0.0	0.0
2	19.28	2	$5.66 \cdot 10^{-16}$	$1.40 \cdot 10^{-15}$
3	524.06	3	$8.02 \cdot 10^{-15}$	0.0
4	$1.55 \cdot 10^4$	4	$4.14 \cdot 10^{-14}$	0.0
5	$4.77 \cdot 10^5$	5	$1.68 \cdot 10^{-12}$	$3.35 \cdot 10^{-12}$
6	$1.50 \cdot 10^7$	6	$2.62 \cdot 10^{-10}$	$2.01 \cdot 10^{-10}$
7	$4.75 \cdot 10^8$	7	$1.26 \cdot 10^{-8}$	$4.71 \cdot 10^{-9}$
8	$1.53 \cdot 10^{10}$	8	$6.12 \cdot 10^{-8}$	$3.07 \cdot 10^{-7}$
9	$4.93 \cdot 10^{11}$	9	$3.87 \cdot 10^{-6}$	$4.54 \cdot 10^{-6}$
10	$1.60 \cdot 10^{13}$	10	$8.67 \cdot 10^{-5}$	$2.50 \cdot 10^{-4}$
11	$5.22 \cdot 10^{14}$	10	$1.58 \cdot 10^{-4}$	$7.61 \cdot 10^{-3}$
12	$1.75 \cdot 10^{16}$	11	$1.34 \cdot 10^{-1}$	$2.59 \cdot 10^{-1}$
13	$3.34 \cdot 10^{18}$	11	$1.10 \cdot 10^{-1}$	5.33
14	$6.20 \cdot 10^{17}$	11	1.46	8.71
15	$3.67 \cdot 10^{17}$	12	4.70	7.34
16	$7.87 \cdot 10^{17}$	12	$5.42 \cdot 10^1$	$2.98 \cdot 10^1$
17	$1.26 \cdot 10^{18}$	12	$1.37 \cdot 10^1$	$1.05 \cdot 10^1$
18	$2.24 \cdot 10^{18}$	12	$1.03 \cdot 10^1$	$2.48 \cdot 10^1$

Tabela 1: Wyniki eksperymentu dla macierzy Hilberta

3.4 Wnioski

Dla wysokiego wskaźnika uwarunkowania, nie zależnie od rozmiaru macierzy, obie metody dają duże błędy, jednak metoda eliminacji Gaussa radzi sobie lepiej niż metoda z macierzą odwrotną. Natomiast próbując rozwiązać układ równań dla macierzy Hilberta zwiększając jej rozmiar, błąd rośnie bardzo szybko, co pokazuje, że macierze Hilberta są źle uwarunkowane.

Rozmiar	Wskaźnik uwarunkowania	Rząd	Błąd metody Gaussa	Błąd metody odwrotnej
5	1.0	5	$2.48 \cdot 10^{-16}$	$1.11 \cdot 10^{-16}$
5	10.0	5	$3.29 \cdot 10^{-16}$	$3.58 \cdot 10^{-16}$
5	$1.00 \cdot 10^3$	5	$5.74 \cdot 10^{-15}$	$4.56 \cdot 10^{-15}$
5	$1.00 \cdot 10^7$	5	$2.51 \cdot 10^{-10}$	$2.31 \cdot 10^{-10}$
5	$1.00 \cdot 10^{12}$	5	$6.32 \cdot 10^{-6}$	$2.92 \cdot 10^{-6}$
5	$1.59 \cdot 10^{16}$	4	$5.42 \cdot 10^{-1}$	$2.76 \cdot 10^{-1}$
10	1.0	10	$2.36 \cdot 10^{-16}$	$1.57 \cdot 10^{-16}$
10	10.0	10	$2.87 \cdot 10^{-16}$	$2.16 \cdot 10^{-16}$
10	$1.00 \cdot 10^3$	10	$1.55 \cdot 10^{-15}$	$2.73 \cdot 10^{-15}$
10	$1.00 \cdot 10^7$	10	$5.40 \cdot 10^{-10}$	$5.70 \cdot 10^{-10}$
10	$1.00 \cdot 10^{12}$	10	$1.32 \cdot 10^{-5}$	$4.48 \cdot 10^{-6}$
10	$2.43 \cdot 10^{16}$	9	$2.28 \cdot 10^{-1}$	$2.24 \cdot 10^{-1}$
20	1.0	20	$5.43 \cdot 10^{-16}$	$6.32 \cdot 10^{-16}$
20	10.0	20	$5.42 \cdot 10^{-16}$	$6.07 \cdot 10^{-16}$
20	$1.00 \cdot 10^3$	20	$2.15 \cdot 10^{-14}$	$1.99 \cdot 10^{-14}$
20	$1.00 \cdot 10^7$	20	$5.62 \cdot 10^{-10}$	$5.39 \cdot 10^{-10}$
20	$1.00 \cdot 10^{12}$	20	$5.07 \cdot 10^{-5}$	$5.19 \cdot 10^{-5}$
20	$3.24 \cdot 10^{16}$	19	$1.72 \cdot 10^{-1}$	$1.44 \cdot 10^{-1}$

Tabela 2: Wyniki eksperymentu dla macierzy losowych

4 Zadanie 4

4.1 Opis problemu

W zadaniu należy sprawdzić zachowanie programu obliczającego zera wielomianu Wilkinsona poprzez obliczenie jego zer dla postaci iloczynowej oraz rozwiniętej. Następnie zabużyć dane wejściowe i ponownie obliczyć zera wielomianu.

4.2 Rozwiążanie

Do policzenia zer wielomianu Wilkinsona użyłem funkcji `roots`. Następnie na ich podstawie obliczyłem wartość wielomianu w postaci iloczynowej jak i rozwiniętej. Powtarzam eksperyment dla zaburzonych danych: $a_{19} \rightarrow a_{19} + 2^{-23}$.

4.3 Wyniki

Poniższa tabela przedstawia wyniki eksperymentu. $p(x)$ to wartość wielomianu w postaci rozwiniętej, natomiast $P(x)$ to wartość wielomianu w postaci iloczynowej.

4.4 Wnioski

Na podstawie wyników zaburzonych można stwierdzić, że zadanie wyznaczania pierwiastków wielomianu Wilkinsona jest źle uwarunkowane, ponieważ nawet niewielka zmiana współczynnika powoduje duże zmiany w pierwiastkach oraz wartościach wielomianu w tych pierwiastkach. Dodatkowo można zauważać, że wartości wielomianu w wyliczonym zerze znacznie różnią się od teoretycznej wartości 0, co wynika z braku precyzji arytmetyki Float64. Nie jesteśmy w stanie dokładnie przechować współczynników wielomianu, co powoduje błędy w obliczeniach.

k	z_k	$ z_k - k $	$p(z_k)$	$P(z_k)$
1	1.00000	$3.01092 \cdot 10^{-13}$	$3.56965 \cdot 10^4$	$3.66264 \cdot 10^4$
2	2.00000	$2.83182 \cdot 10^{-11}$	$1.76253 \cdot 10^5$	$1.81304 \cdot 10^5$
3	3.00000	$4.07903 \cdot 10^{-10}$	$2.79158 \cdot 10^5$	$2.90172 \cdot 10^5$
4	4.00000	$1.62625 \cdot 10^{-8}$	$3.02711 \cdot 10^6$	$2.04154 \cdot 10^6$
5	5.00000	$6.65770 \cdot 10^{-7}$	$2.29175 \cdot 10^7$	$2.08946 \cdot 10^7$
6	5.99999	$1.07542 \cdot 10^{-5}$	$1.29024 \cdot 10^8$	$1.12505 \cdot 10^8$
7	7.00010	$1.02003 \cdot 10^{-4}$	$4.80511 \cdot 10^8$	$4.57291 \cdot 10^8$
8	7.99936	$6.44170 \cdot 10^{-4}$	$1.63795 \cdot 10^9$	$1.55565 \cdot 10^9$
9	9.00292	$2.91529 \cdot 10^{-3}$	$4.87707 \cdot 10^9$	$4.68782 \cdot 10^9$
10	9.99041	$9.58696 \cdot 10^{-3}$	$1.36386 \cdot 10^{10}$	$1.26346 \cdot 10^{10}$
11	11.02502	$2.50229 \cdot 10^{-2}$	$3.58563 \cdot 10^{10}$	$3.30013 \cdot 10^{10}$
12	11.95328	$4.67167 \cdot 10^{-2}$	$7.53333 \cdot 10^{10}$	$7.38853 \cdot 10^{10}$
13	13.07431	$7.43140 \cdot 10^{-2}$	$1.96060 \cdot 10^{11}$	$1.84762 \cdot 10^{11}$
14	13.91476	$8.52444 \cdot 10^{-2}$	$3.57513 \cdot 10^{11}$	$3.55143 \cdot 10^{11}$
15	15.07549	$7.54938 \cdot 10^{-2}$	$8.21627 \cdot 10^{11}$	$8.42320 \cdot 10^{11}$
16	15.94629	$5.37133 \cdot 10^{-2}$	$1.55150 \cdot 10^{12}$	$1.57073 \cdot 10^{12}$
17	17.02543	$2.54271 \cdot 10^{-2}$	$3.69474 \cdot 10^{12}$	$3.31698 \cdot 10^{12}$
18	17.99092	$9.07865 \cdot 10^{-3}$	$7.65011 \cdot 10^{12}$	$6.34485 \cdot 10^{12}$
19	19.00191	$1.90982 \cdot 10^{-3}$	$1.14353 \cdot 10^{13}$	$1.22857 \cdot 10^{13}$
20	19.99981	$1.90709 \cdot 10^{-4}$	$2.79241 \cdot 10^{13}$	$2.31831 \cdot 10^{13}$

Tabela 3: Wyniki eksperymentu dla wielomianu Wilkinsona dla niezaburzonych danych

k	z_k	$ z_k - k $	$p(z_k)$	$P(z_k)$
1	1.00000	$1.96287 \cdot 10^{-13}$	$2.44281 \cdot 10^4$	$2.38774 \cdot 10^4$
2	2.00000	$1.47216 \cdot 10^{-12}$	$6.31468 \cdot 10^3$	$9.42529 \cdot 10^3$
3	3.00000	$4.71376 \cdot 10^{-10}$	$4.21927 \cdot 10^5$	$3.35325 \cdot 10^5$
4	4.00000	$1.19526 \cdot 10^{-8}$	$2.21907 \cdot 10^6$	$1.50048 \cdot 10^6$
5	5.00000	$1.66405 \cdot 10^{-7}$	$6.22740 \cdot 10^6$	$5.22248 \cdot 10^6$
6	5.99999	$7.05052 \cdot 10^{-6}$	$6.47173 \cdot 10^6$	$7.37588 \cdot 10^7$
7	7.00030	$3.00994 \cdot 10^{-4}$	$3.06399 \cdot 10^7$	$1.34920 \cdot 10^9$
8	7.99303	$6.96666 \cdot 10^{-3}$	$1.27955 \cdot 10^7$	$1.68773 \cdot 10^{10}$
9	9.14748	$1.47477 \cdot 10^{-1}$	$7.24061 \cdot 10^7$	$2.19467 \cdot 10^{11}$
10	9.50162	$4.98377 \cdot 10^{-1}$	$1.18200 \cdot 10^9$	$4.51692 \cdot 10^{11}$
11	10.95346	$4.65447 \cdot 10^{-2}$	$6.78876 \cdot 10^{12}$	$6.08024 \cdot 10^{10}$
12	10.95346	$1.04654 \cdot 10^0$	$6.78876 \cdot 10^{12}$	$6.08024 \cdot 10^{10}$
13	12.99643	$3.56977 \cdot 10^{-3}$	$1.73366 \cdot 10^{14}$	$8.60218 \cdot 10^9$
14	12.99643	$1.00357 \cdot 10^0$	$1.73366 \cdot 10^{14}$	$8.60218 \cdot 10^9$
15	15.55554	$5.55539 \cdot 10^{-1}$	$5.26786 \cdot 10^{15}$	$5.84171 \cdot 10^{12}$
16	15.55554	$4.44461 \cdot 10^{-1}$	$5.26786 \cdot 10^{15}$	$5.84171 \cdot 10^{12}$
17	18.35914	$1.35914 \cdot 10^0$	$1.23311 \cdot 10^{17}$	$4.23334 \cdot 10^{14}$
18	18.35914	$3.59140 \cdot 10^{-1}$	$1.23311 \cdot 10^{17}$	$4.23334 \cdot 10^{14}$
19	20.50312	$1.50312 \cdot 10^0$	$1.31182 \cdot 10^{18}$	$3.09764 \cdot 10^{17}$
20	20.50312	$5.03121 \cdot 10^{-1}$	$1.31182 \cdot 10^{18}$	$3.09764 \cdot 10^{17}$

Tabela 4: Wyniki eksperymentu dla wielomianu Wilkinsona dla zaburzonych danych²

5 Zadanie 5

5.1 Opis problemu

Mamy podane pewne równanie rekurencyjne opisujące rozmiar populacji w zależności od stanu poprzedniego pokolenia:

$$p_{n+1} = p_n + r p_n (1 - p_n)$$

Należy przeprowadzić eksperyment porównujący zachowanie się równania dla 40 iteracji w arytmetyce Float32 oraz Float64. Następnie w trakcie obliczeń należy wprowadzić niewielkie zaburzenie do wartości p_{10} i ponownie wznowić obliczenia.

5.2 Rozwiązańe

Do rozwiązania zadania napisałem prostą pętlę iterującą 40 razy po równaniu rekurencyjnym.

5.3 Wyniki

5.4 Wnioski

Widać, że taki rekurencyjny proces jest bardzo wrażliwy na zaburzenia, ponieważ nawet niewielka zmiana wartości w p_{10} powoduje ogromne różnice w dalszych iteracjach. Przez kilka pierwszych iteracji (około 13) wyniki dla obu arytmetyk są podobne, jednak z czasem różnice stają się coraz większe. Aby poprawnie przeprowadzić podniesienie do kwadratu należy przechowywać dwa razy więcej cyfr znaczących niż wynosi ilość cyfr liczby podnoszonej. Generalnie, cała ta procedura jest bardzo niestabilna numerycznie.

6 Zadanie 6

6.1 Opis problemu

Podobnie jak w porzednim zadaniu, mamy sprawdzić zachowanie się równania rekurencyjnego:

$$x_{n+1} = x_n^2 + c$$

dla różnych wartości parametru c oraz różnych wartości początkowych x_0 . Należy przeprowadzić eksperyment dla arytmetyki Float64.

6.2 Rozwiązańe

Poniżej tabela z wynikami eksperymentu.

6.3 Wnioski

Równanie rekurencyjne można zinterpretować graficznie:

Widać, że dla różnych wartości parametru c oraz różnych wartości początkowych x_0 zachowanie się równania rekurencyjnego jest zupełnie inne. Dla $c = -2$ i $x_0 = 1$ ciąg zbiega do stałej wartości -1. Dla $c = 2$ i $x_0 = 2$ ciąg rośnie bardzo szybko i osiąga wartość nieskończoności już po 10 iteracjach. Dla $c = -2$ i x_0 bliskiego 2, ciąg pozostaje bliski wartości 2 przez wiele iteracji, ale ostatecznie zaczyna oscylować i oddalać się od tej wartości.

W niektórych przypadkach, jak dla $c = -1$ i $x_0 = 1$ lub $x_0 = -1$, ciąg oscyluje między dwoma wartościami (-1 i 0). Dla $c = -1$ i $x_0 = 0.75$ lub $x_0 = 0.25$, po pewnej ilości iteracji ciąg również wpada w cykl oscylacji między -1 a 0.

Iteracja	p_n Float32	p_n Float32 po zaburzeniu	p_n Float64
1	0.0397000	0.0397000	0.0397000000000000
2	0.1540717	0.1540717	0.154071730000000
3	0.5450726	0.5450726	0.545072626044421
4	1.2889781	1.2889781	1.288978001188801
5	0.1715188	0.1715188	0.171519142109176
6	0.5978191	0.5978191	0.597820120107099
7	1.3191134	1.3191134	1.319113792413797
8	0.0562732	0.0562732	0.056271577646257
9	0.2155929	0.2155929	0.215586839232630
10	0.7229306	0.7229306	0.722914301179573
11	1.3238364	1.3241479	1.323841944168441
12	0.0377170	0.0364884	0.037695297254732
13	0.1466002	0.1419594	0.146518382713559
14	0.5219260	0.5073804	0.521670621435246
15	1.2704837	1.2572169	1.270261773935077
16	0.2395482	0.2870845	0.240352172778243
17	0.7860428	0.9010855	0.788101190235304
18	1.2905813	1.1684768	1.289094302790307
19	0.1655247	0.5778930	0.171084846701943
20	0.5799036	1.3096911	0.596529312494691
21	1.3107498	0.0928922	1.318575587982598
22	0.0888042	0.3456818	0.058377608259431
23	0.3315584	1.0242395	0.223286597599448
24	0.9964407	0.9497582	0.743575676395179
25	1.0070806	1.0929108	1.315588346001072
26	0.9856885	0.7882812	0.070035295602779
27	1.0280086	1.2889631	0.265426354520610
28	0.9416294	0.1715748	0.850351969060138
29	1.1065198	0.5979856	1.232112462387190
30	0.7529209	1.3191822	0.374146489639287
31	1.3110139	0.0560039	1.076629171428944
32	0.0877831	0.2146064	0.829125567400452
33	0.3280148	0.7202578	1.254154650050444
34	0.9892781	1.3247173	0.297906941472321
35	1.0210990	0.0342414	0.925382128557105
36	0.9564666	0.1334483	1.132532262669786
37	1.0813814	0.4803680	0.682241072715310
38	0.8173683	1.2292118	1.332605646962029
39	1.2652004	0.3839622	0.002909156902851
40	0.2586055	1.0935680	0.011611238029749

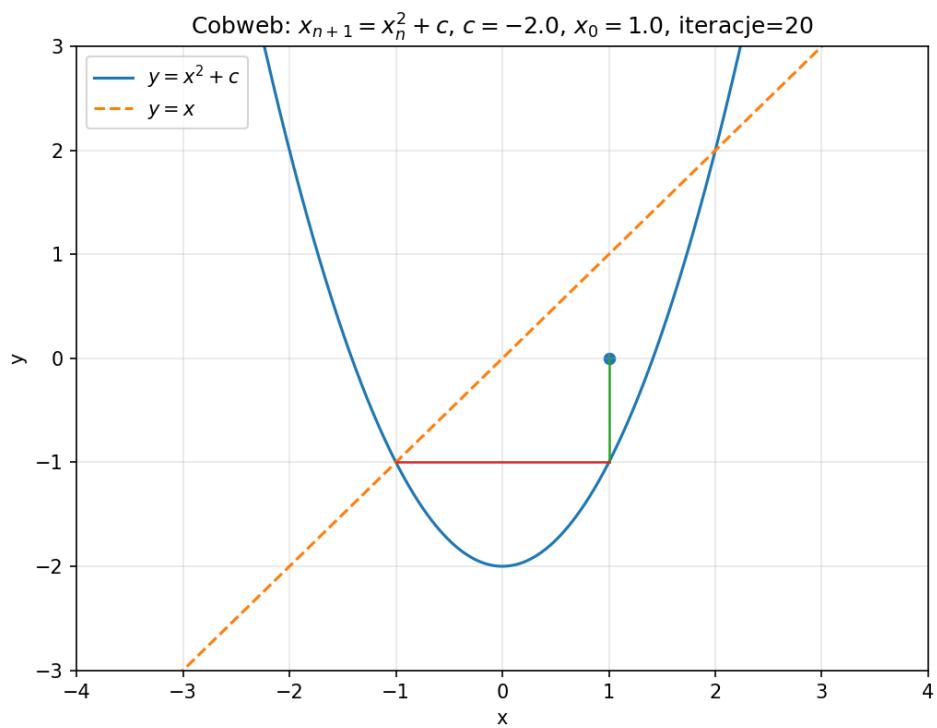
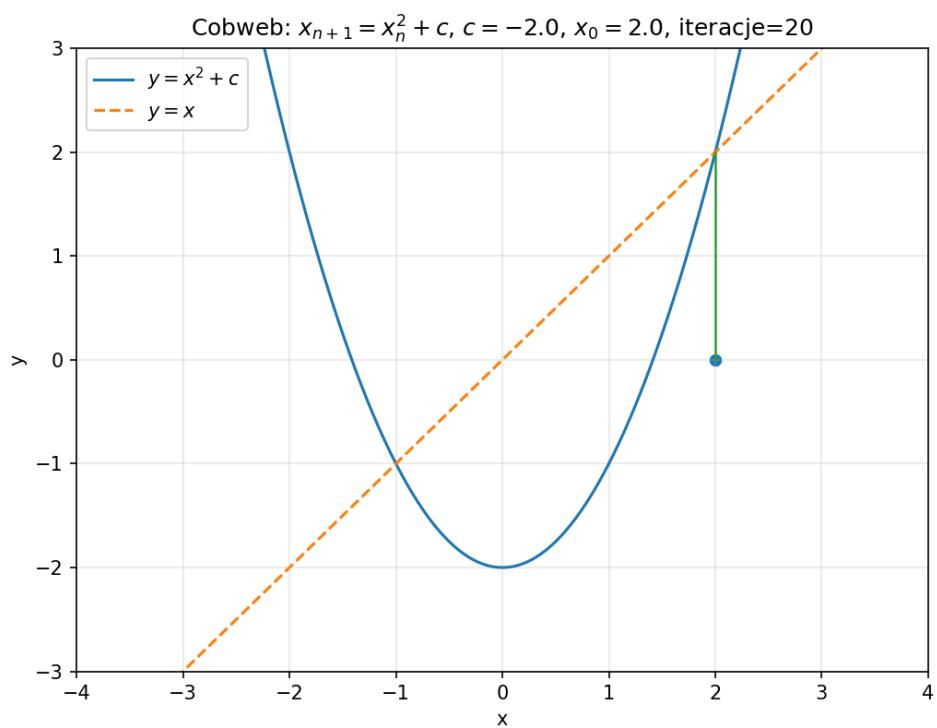
Tabela 5: Wyniki eksperymentu dla równania rekurencyjnego

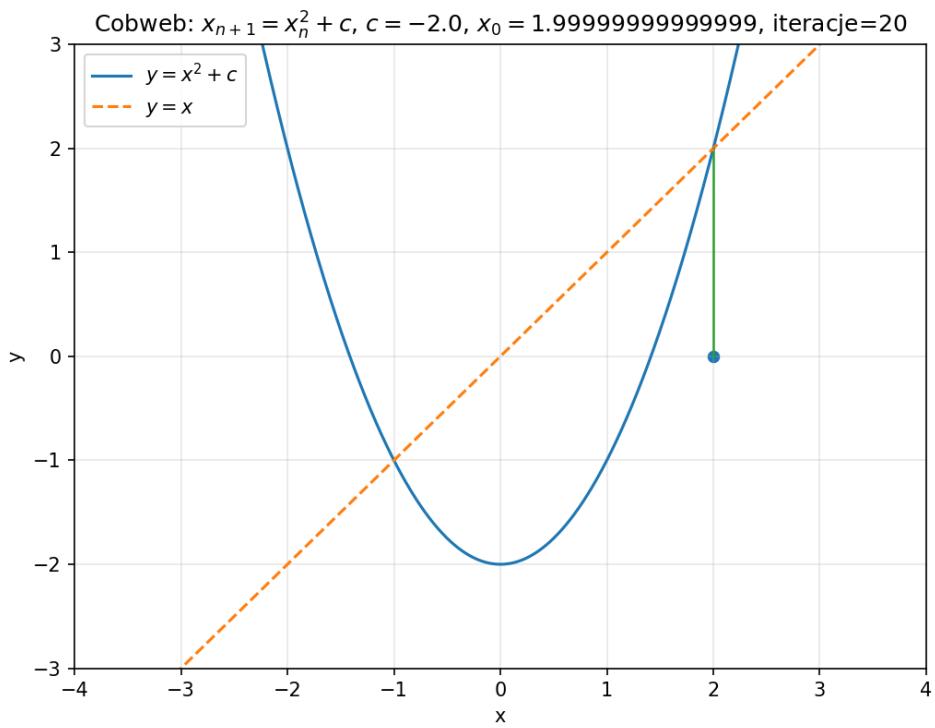
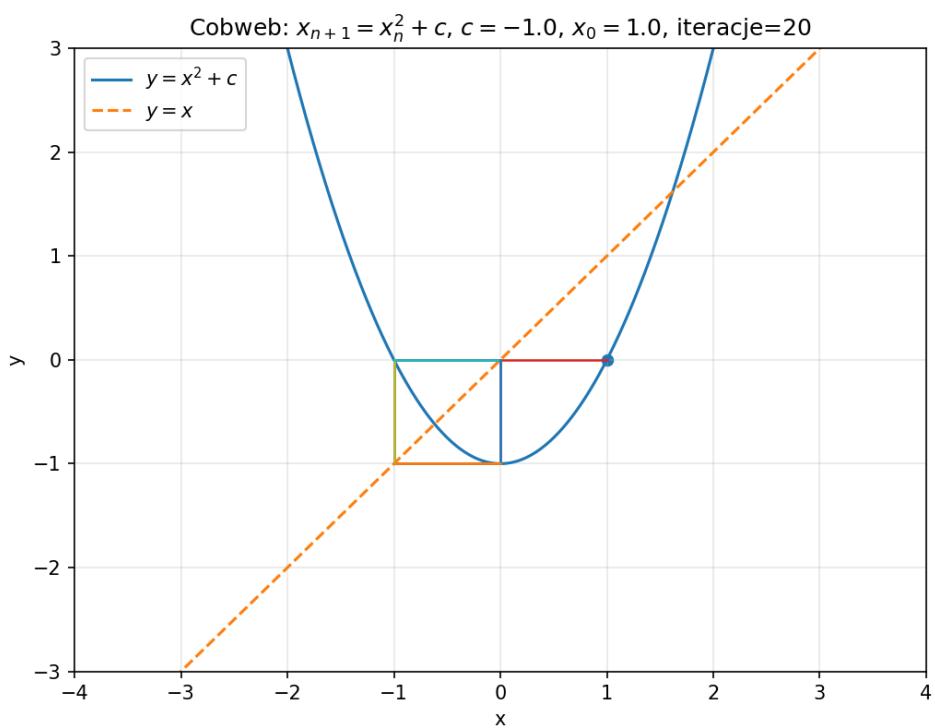
n	$x_n (c = -2, x_0 = 1)$	$x_n (c = 2, x_0 = 2)$	$x_n (c = -2, x_0 = 1.999999999999999)$
1	-1.000000	6.000000	2.000000
2	-1.000000	$3.800000 \cdot 10^1$	2.000000
3	-1.000000	$1.446000 \cdot 10^3$	2.000000
4	-1.000000	$2.090918 \cdot 10^6$	2.000000
5	-1.000000	$4.371938 \cdot 10^{12}$	2.000000
6	-1.000000	$1.911384 \cdot 10^{25}$	2.000000
7	-1.000000	$3.653390 \cdot 10^{50}$	2.000000
8	-1.000000	$1.334726 \cdot 10^{101}$	2.000000
9	-1.000000	$1.781493 \cdot 10^{202}$	2.000000
10	-1.000000	∞	2.000000
11	-1.000000	∞	2.000000
12	-1.000000	∞	2.000000
13	-1.000000	∞	1.999999
14	-1.000000	∞	1.999997
15	-1.000000	∞	1.999989
16	-1.000000	∞	1.999957
17	-1.000000	∞	1.999828
18	-1.000000	∞	1.999313
19	-1.000000	∞	1.997254
20	-1.000000	∞	1.989024
21	-1.000000	∞	1.956215
22	-1.000000	∞	1.826779
23	-1.000000	∞	1.337120
24	-1.000000	∞	$-2.121097 \cdot 10^{-1}$
25	-1.000000	∞	-1.955009
26	-1.000000	∞	1.822062
27	-1.000000	∞	1.319910
28	-1.000000	∞	$-2.578368 \cdot 10^{-1}$
29	-1.000000	∞	-1.933520
30	-1.000000	∞	1.738500
31	-1.000000	∞	1.022383
32	-1.000000	∞	$-9.547330 \cdot 10^{-1}$
33	-1.000000	∞	-1.088485
34	-1.000000	∞	$-8.152007 \cdot 10^{-1}$
35	-1.000000	∞	-1.335448
36	-1.000000	∞	$-2.165791 \cdot 10^{-1}$
37	-1.000000	∞	-1.953094
38	-1.000000	∞	1.814574
39	-1.000000	∞	1.292680
40	-1.000000	∞	$-3.289791 \cdot 10^{-1}$

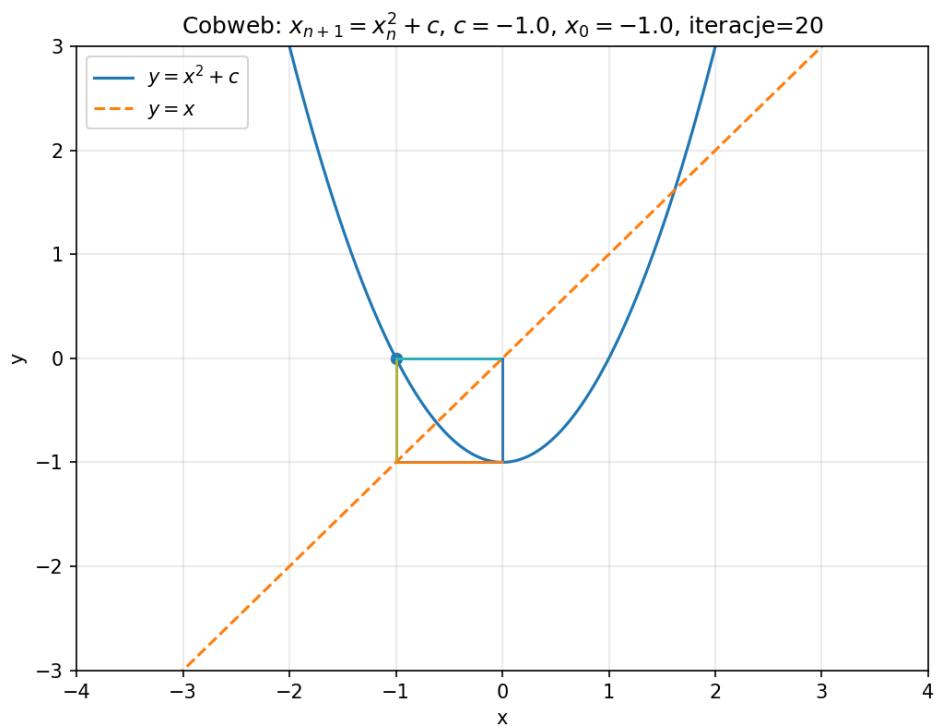
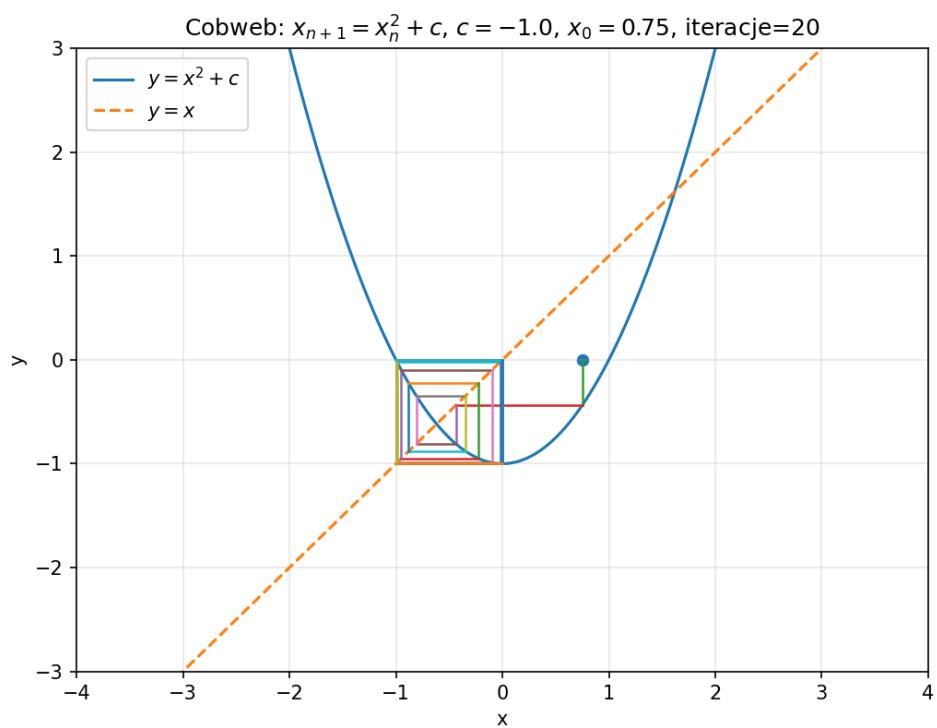
Tabela 6: Wyniki eksperymentu dla równania rekurencyjnego z różnymi parametrami

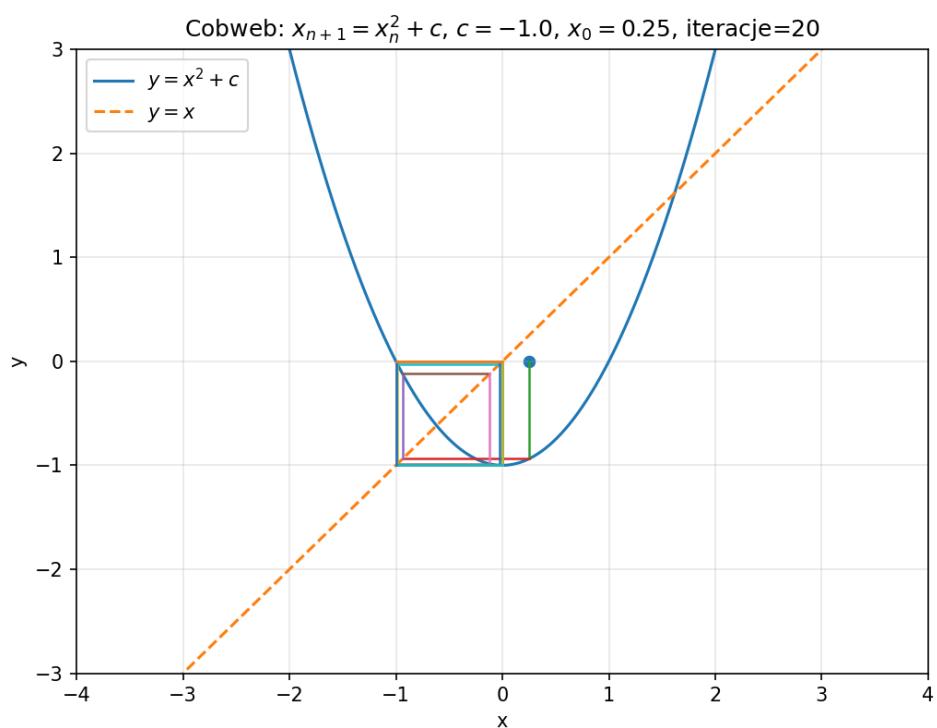
n	$x_n (c = -1, x_0 = 1)$	$x_n (c = -1, x_0 = -1)$	$x_n (c = -1, x_0 = 0.75)$	$x_n (c = -1, x_0 = 0.25)$
1	0.000000	0.000000	$-4.375000 \cdot 10^{-1}$	$-9.375000 \cdot 10^{-1}$
2	-1.000000	-1.000000	$-8.085938 \cdot 10^{-1}$	$-1.210938 \cdot 10^{-1}$
3	0.000000	0.000000	$-3.461761 \cdot 10^{-1}$	$-9.853363 \cdot 10^{-1}$
4	-1.000000	-1.000000	$-8.801621 \cdot 10^{-1}$	$-2.911237 \cdot 10^{-2}$
5	0.000000	0.000000	$-2.253147 \cdot 10^{-1}$	$-9.991525 \cdot 10^{-1}$
6	-1.000000	-1.000000	$-9.492333 \cdot 10^{-1}$	$-1.694342 \cdot 10^{-3}$
7	0.000000	0.000000	$-9.895619 \cdot 10^{-2}$	$-9.999971 \cdot 10^{-1}$
8	-1.000000	-1.000000	$-9.902077 \cdot 10^{-1}$	$-5.741579 \cdot 10^{-6}$
9	0.000000	0.000000	$-1.948876 \cdot 10^{-2}$	-1.000000
10	-1.000000	-1.000000	$-9.996202 \cdot 10^{-1}$	$-6.593148 \cdot 10^{-11}$
11	0.000000	0.000000	$-7.594796 \cdot 10^{-4}$	-1.000000
12	-1.000000	-1.000000	$-9.999994 \cdot 10^{-1}$	0.000000
13	0.000000	0.000000	$-1.153618 \cdot 10^{-6}$	-1.000000
14	-1.000000	-1.000000	-1.000000	0.000000
15	0.000000	0.000000	$-2.661649 \cdot 10^{-12}$	-1.000000
16	-1.000000	-1.000000	-1.000000	0.000000
17	0.000000	0.000000	0.000000	-1.000000
18	-1.000000	-1.000000	-1.000000	0.000000
19	0.000000	0.000000	0.000000	-1.000000
20	-1.000000	-1.000000	-1.000000	0.000000
21	0.000000	0.000000	0.000000	-1.000000
22	-1.000000	-1.000000	-1.000000	0.000000
23	0.000000	0.000000	0.000000	-1.000000
24	-1.000000	-1.000000	-1.000000	0.000000
25	0.000000	0.000000	0.000000	-1.000000
26	-1.000000	-1.000000	-1.000000	0.000000
27	0.000000	0.000000	0.000000	-1.000000
28	-1.000000	-1.000000	-1.000000	0.000000
29	0.000000	0.000000	0.000000	-1.000000
30	-1.000000	-1.000000	-1.000000	0.000000
31	0.000000	0.000000	0.000000	-1.000000
32	-1.000000	-1.000000	-1.000000	0.000000
33	0.000000	0.000000	0.000000	-1.000000
34	-1.000000	-1.000000	-1.000000	0.000000
35	0.000000	0.000000	0.000000	-1.000000
36	-1.000000	-1.000000	-1.000000	0.000000
37	0.000000	0.000000	0.000000	-1.000000
38	-1.000000	-1.000000	-1.000000	0.000000
39	0.000000	0.000000	0.000000	-1.000000
40	-1.000000	-1.000000	-1.000000	0.000000

Tabela 7: Wyniki eksperymentu dla równania rekurencyjnego dla $c = -1$ i różnych wartości początkowych

Rysunek 3: Wykres dla $c = -2$, $x_0 = 1$ Rysunek 4: Wykres dla $c = 2$, $x_0 = 2$

Rysunek 5: Wykres dla $c = -2$, $x_0 \approx 2$ Rysunek 6: Wykres dla $c = -1$, $x_0 = 1$

Rysunek 7: Wykres dla $c = -1$, $x_0 = -1$ Rysunek 8: Wykres dla $c = -1$, $x_0 = 0.75$

Rysunek 9: Wykres dla $c = -1$, $x_0 = 0.25$