Obliczenia Naukowe – Sprawozdanie Laboratoria 2.

Jakub Kogut

10 listopada 2025

1 Zadanie 1

1.1 Opis problemu

W zadaniu należało powtórzyć eksperyment z zadania 5. z listy 1., jednakże ze zmienionymi danymi wejściowymi i zaobserwować ich wpływ.

1.2 Rozwiązanie

Wykorzystałem kod z poprzedniego zadania, zmieniając jedynie dane wejściowe, zgodnie z poleceniem: usunąłem ostatnią 9 z x_4 oraz ostatnią 7 z x_5.

1.3 Wyniki

Tabela przedstawia wyniki eksperymentu oraz porównanie z wynikami na starych danych.

Algorytm	Float32 Stare	Float64 Stare	Float32 Nowe	Float64 Nowe
"w przód"	$-4.9994430 \cdot 10^{-1}$	$1.025188136829 \cdot 10^{-10}$	$-4.9994430 \cdot 10^{-1}$	$-4.296342739891 \cdot 10^{-3}$
"w tył"	$-4.5434570 \cdot 10^{-1}$	$-1.564330887049 \cdot 10^{-10}$	$-4.5434570 \cdot 10^{-1}$	$-4.296342998713 \cdot 10^{-3}$
rosnąco[1]	$-5.0000000 \cdot 10^{-1}$	$0.000000000000 \cdot 10^{0}$	$-5.0000000 \cdot 10^{-1}$	$-4.296342842280 \cdot 10^{-3}$
malejąco	$-5.0000000 \cdot 10^{-1}$	$0.000000000000 \cdot 10^{0}$	$-5.0000000 \cdot 10^{-1}$	$-4.296342842280 \cdot 10^{-3}$

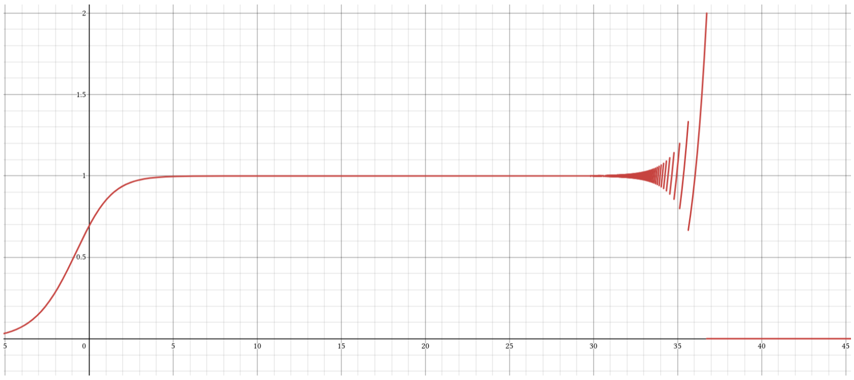
1.4 Wnioski

Można zauważyć że wyniki dla Float32 nie uległy zmianie, natomiast dla Float64 zmieniły się znacząco. Dzieje się tak dlatego, że w przypadku Float32 precyzja jest na tyle niska, że usunięcie tych elementów nie miało wpływu na wynik końcowy. W przypadku Float64 precyzja jest dużo większa, więc niewielka zmiana w danych wejściowych miała wpływ na wynik końcowy, po czym można wnioskować, że zadanie policzenia iloczynu skalarnego jest źle uwarunkowane.

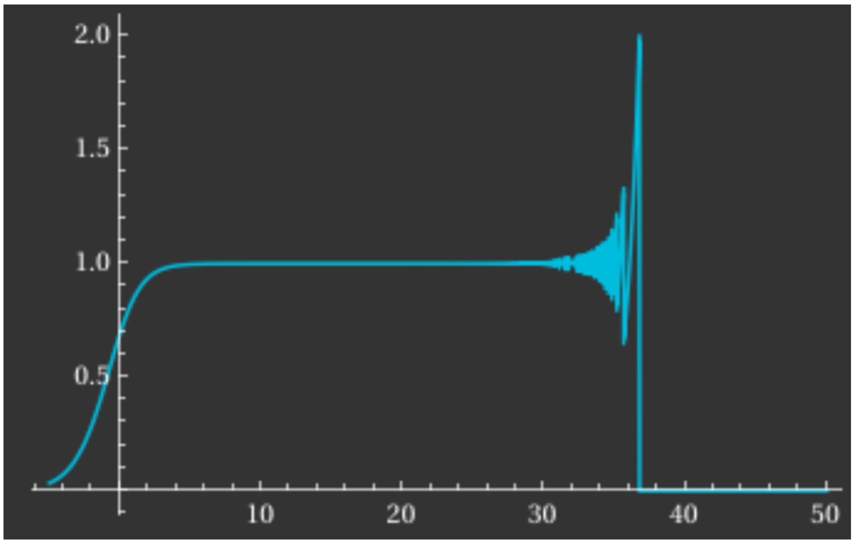
2 Zadanie 2

2.1 Opis problemu

W zadaniu należy narysować wykres funkcji $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$ przy użyciu dwóch programów do wizualizacji. Następnie należy policzyć granicę tej funkcji przy $x \to \infty$ oraz porównać ją z wykresem.



Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$ w programie Desmos



Rysunek 2: Wykres funkcji $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$ w programie Wolfram Alpha

2.2 Rozwiązanie

Do wizualizacji użyłem programu *Desmos* oraz *Wolfram Alpha*. Obliczenie granicy:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{e^{-x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}(\ln(1 + e^{-x}))}{\frac{d}{dx}(e^{-x})} && \text{(Reguła de l'Hospitala)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}}{-e^{-x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} = 1
\end{aligned}
$$

2.3 Wnioski

Na obydwu wykresach widać, że w okolicy $x \in [30, 36]$ funkcja zaczyna zachowywać się niestabilnie, a następnie dla większych wartości x przyjmuje wartość 0, co jest sprzeczne z teorią, gdyż granica funkcji przy $x \to \infty$ wynosi 1. Dzieje się tak, ponieważ dla dużych wartości x wyrażenie e^x staje się bardzo duże, natomiast $\ln(1 + e^{-x})$ bardzo małe, przez co ich iloczyn, w zastosowanej przez programy arytmetyce, jest obarczony dużym błędem. Dla jeszcze większych wartości $x > 36$ wartość $\ln(1 + e^{-x}) \approx 0$ zatem cała funkcja przyjmuje wartość 0.

3 Zadanie 3

3.1 Opis problemu

W zadaniu należy porównać dwie metody rozwiązywania układów równań liniowych: metodę eliminacji Gaussa oraz poprzez wzięcie macierzy odwrotnej. Eksperyment należy przeprowadzić dla różnych rozmiarów macierzy Hilberta oraz losowej o rosnącym wskaźniku uwarunkowania.

3.2 Rozwiązanie

Do rozwiązania zadania użyłem podanych funkcji w `hilb.jt` oraz `matcond.jt` do generowania macierzy Hilberta oraz losowej o zadanym wskaźniku uwarunkowania. Następnie dla każdej z macierzy generowałem wektor $b = A \cdot x$, gdzie x to wektor jednostkowy. Następnie rozwiązywałem układ równań $Ax = b$ za pomocą obu metod i liczyłem błąd bezwzględny pomiędzy otrzymanym rozwiązaniem a wektorem x.

3.3 Wyniki

Poniżej w tabelach znajdują się wyniki eksperymentów dla macierzy Hilberta oraz losowych.

Rozmiar	Wskaźnik uwarunkowania	Rząd	Błąd metody Gaussa	Błąd metody odwrotnej
1	1.0	1	0.0	0.0
2	19.28	2	$5.66 \cdot 10^{-16}$	$1.40 \cdot 10^{-15}$
3	524.06	3	$8.02 \cdot 10^{-15}$	0.0
4	$1.55 \cdot 10^{4}$	4	$4.14 \cdot 10^{-14}$	0.0
5	$4.77 \cdot 10^{5}$	5	$1.68 \cdot 10^{-12}$	$3.35 \cdot 10^{-12}$
6	$1.50 \cdot 10^{7}$	6	$2.62 \cdot 10^{-10}$	$2.01 \cdot 10^{-10}$
7	$4.75 \cdot 10^{8}$	7	$1.26 \cdot 10^{-8}$	$4.71 \cdot 10^{-9}$
8	$1.53 \cdot 10^{10}$	8	$6.12 \cdot 10^{-8}$	$3.07 \cdot 10^{-7}$
9	$4.93 \cdot 10^{11}$	9	$3.87 \cdot 10^{-6}$	$4.54 \cdot 10^{-6}$
10	$1.60 \cdot 10^{13}$	10	$8.67 \cdot 10^{-5}$	$2.50 \cdot 10^{-4}$
11	$5.22 \cdot 10^{14}$	10	$1.58 \cdot 10^{-4}$	$7.61 \cdot 10^{-3}$
12	$1.75 \cdot 10^{16}$	11	$1.34 \cdot 10^{-1}$	$2.59 \cdot 10^{-1}$
13	$3.34 \cdot 10^{18}$	11	$1.10 \cdot 10^{-1}$	5.33
14	$6.20 \cdot 10^{17}$	11	1.46	8.71
15	$3.67 \cdot 10^{17}$	12	4.70	7.34
16	$7.87 \cdot 10^{17}$	12	$5.42 \cdot 10^{1}$	$2.98 \cdot 10^{1}$
17	$1.26 \cdot 10^{18}$	12	$1.37 \cdot 10^{1}$	$1.05 \cdot 10^{1}$
18	$2.24 \cdot 10^{18}$	12	$1.03 \cdot 10^{1}$	$2.48 \cdot 10^{1}$

Tabela 1: Wyniki eksperymentu dla macierzy Hilberta

3.4 Wnioski

Dla wysokiego wskaźnika uwarunkowania, nie zależnie od rozmiuaru macierzy, obie metody dają duże błędy, jednak metoda eliminacji Gaussa radzi sobie lepiej niż metoda z macierzą odwrotną. Natomiast próbując rozwiązać układ równań dla macierzy Hilberta zwiększając jej rozmiar, błąd rośnie bardzo szybko, co pokazuje, że macierze Hilberta są źle uwarunkowane. W przypadku macierzy losowych błąd również rośnie ze wzrostem wskaźnika uwarunkowania, jednakże nie jest to tak drastyczne jak w przypadku

Rozmiar	Wskaźnik uwarunkowania	Rząd	Błąd metody Gaussa	Błąd metody odwrotnej
5	1.0	5	$2.48 \cdot 10^{-16}$	$1.11 \cdot 10^{-16}$
5	10.0	5	$3.29 \cdot 10^{-16}$	$3.58 \cdot 10^{-16}$
5	$1.00 \cdot 10^{3}$	5	$5.74 \cdot 10^{-15}$	$4.56 \cdot 10^{-15}$
5	$1.00 \cdot 10^{7}$	5	$2.51 \cdot 10^{-10}$	$2.31 \cdot 10^{-10}$
5	$1.00 \cdot 10^{12}$	5	$6.32 \cdot 10^{-6}$	$2.92 \cdot 10^{-6}$
5	$1.59 \cdot 10^{16}$	4	$5.42 \cdot 10^{-1}$	$2.76 \cdot 10^{-1}$
10	1.0	10	$2.36 \cdot 10^{-16}$	$1.57 \cdot 10^{-16}$
10	10.0	10	$2.87 \cdot 10^{-16}$	$2.16 \cdot 10^{-16}$
10	$1.00 \cdot 10^{3}$	10	$1.55 \cdot 10^{-15}$	$2.73 \cdot 10^{-15}$
10	$1.00 \cdot 10^{7}$	10	$5.40 \cdot 10^{-10}$	$5.70 \cdot 10^{-10}$
10	$1.00 \cdot 10^{12}$	10	$1.32 \cdot 10^{-5}$	$4.48 \cdot 10^{-6}$
10	$2.43 \cdot 10^{16}$	9	$2.28 \cdot 10^{-1}$	$2.24 \cdot 10^{-1}$
20	1.0	20	$5.43 \cdot 10^{-16}$	$6.32 \cdot 10^{-16}$
20	10.0	20	$5.42 \cdot 10^{-16}$	$6.07 \cdot 10^{-16}$
20	$1.00 \cdot 10^{3}$	20	$2.15 \cdot 10^{-14}$	$1.99 \cdot 10^{-14}$
20	$1.00 \cdot 10^{7}$	20	$5.62 \cdot 10^{-10}$	$5.39 \cdot 10^{-10}$
20	$1.00 \cdot 10^{12}$	20	$5.07 \cdot 10^{-5}$	$5.19 \cdot 10^{-5}$
20	$3.24 \cdot 10^{16}$	19	$1.72 \cdot 10^{-1}$	$1.44 \cdot 10^{-1}$

Tabela 2: Wyniki eksperymentu dla macierzy losowych