UNIVERSITAS MERCU BUANA

Modul ke:

02

Fakultas

FAKULTAS TEKNIK

Program Studi

TEKNIK ELEKTRO

Matematika 2

Bilangan Kompleks

Beny Nugraha, MT, M.Sc

Definisi

- Himpunan bilangan yang terbesar di dalam matematika adalah himpunan bilangan kompleks.
- Bilangan kompleks adalah bilangan yang terdiri dari dua bagian : bagian real dan bagian imajiner (khayal).

Asal Mula Bilangan Imajiner

- Tinjau kembali persamaan kuadrat dalam aljabar: $az^2 + bz + c = 0$

- Nilai z dapat dicari dengan menggunakan rumus abc berikut: $$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Permasalahan akan muncul apabila diskriminan D = b^2 – 4ac bernilai negatif (<0) karena bilangan negatif tidak memiliki akar.

Asal Mula Bilangan Imajiner

- Diperkenalkan konsep bilangan imajiner:

$$j = \sqrt{-1}$$
$$j^2 = -1$$

- Di mana j disebut sebagai operator.
- Dengan pemahanan di atas, maka bilangan negatif di bawah akar dapat diganti dengan bilangan imajiner tersebut. Contoh:

$$\sqrt{-4} = 2j \qquad \sqrt{-2} = j\sqrt{2}$$

- Contoh Soal:

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat berikut:

$$z^2 + 2z + 3 = 0$$

Jawab:

Dengan menggunakan rumus abc:

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2};$$

Kemudian dengan:

$$\begin{aligned}\sqrt{-8} &= \sqrt{-1}\,\sqrt{8} \\ &= j2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Maka hasilnya adalah:

$$1 \pm j2\sqrt{2}$$

Sehingga akar-akar persamaan tersebut terdiri dari bilangan real, yakni 1, dan bilangan imajiner, yakni 2√2

Bilangan Kompleks

- Bilangan kompleks dilambangkan oleh z dan ditulis sebagai berikut:

$$z = x + jy$$

- Di mana x = Re z = bagian real dari z, dan y = Im z = bagian imajiner dari z.
- Contoh: $z = 2 + j5$

memiliki Re z = 2 dan Im z = 5

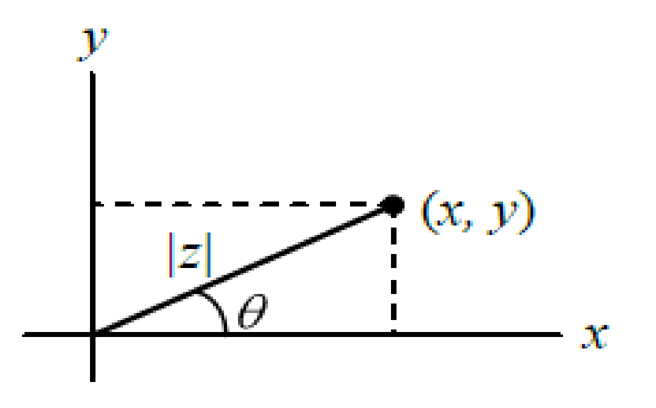
Bilangan Kompleks

- Perhatikan bahwa bagian imajiner dari bilangan kompleks adalah bilangan real, bukan imajiner.
- Pada contoh tersebut, bagian imajiner dari z adalah 5 (**bukan** *j*5 atau 5*j*).
- Bagian real dan bagian imajiner boleh bernilai nol. Contoh:

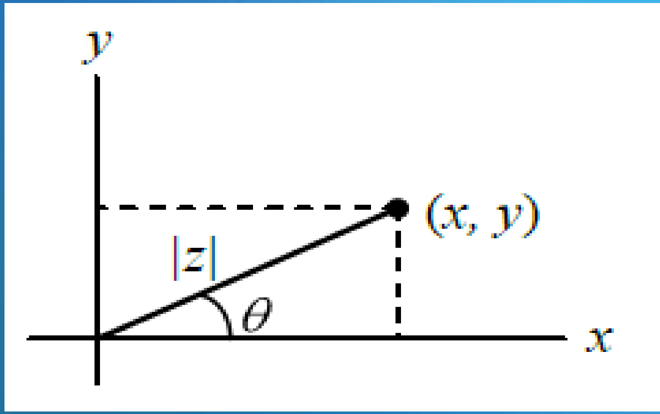
$$z = 0 + 2j = 2j \text{ atau } z = 2 + 0j = 2$$

Bentuk Polar Bilangan Kompleks

- Bilangan kompleks selalu merupakan pasangan dua bilangan real, yaitu x dan y.
- Bilangan kompleks dapat digambarkan dalam bidang kompleks, yakni bidang yang sama dengan bidang kartesius, hanya saja <u>sumbu vertikalnya merupakan bagian imajiner dan sumbu horisontalnya merupakan bagian real.</u>



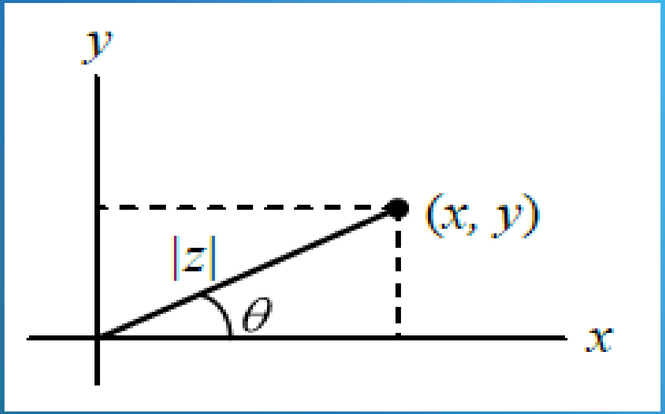
Bentuk Polar Bilangan Kompleks



- Bilangan kompleks dapat ditulis sebagai $z = (x,y)$ yang maknanya sama dengan $z = x + jy$.
- Dari gambar dapat ditentukan bahwa jarak antara titik (x, y) dan titik asal (0,0) disebut modulus atau nilai mutlak dari z, ditulis:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Bentuk Polar Bilangan Kompleks



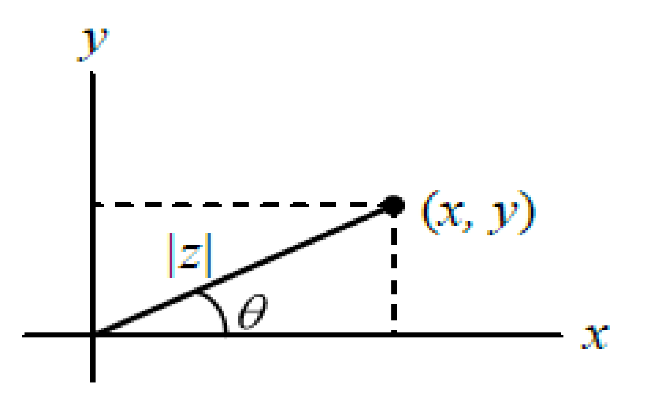
- Sudut dari *z* disebut *fase* atau *argumen* dari z dan memenuhi persamaan:

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

- Dari gambar juga dapat ditentukan bahwa:

$$x = |z|\cos\theta \qquad y = |z|\sin\theta$$

Bentuk Polar Bilangan Kompleks



- Sehingga persamaan lengkapnya menjadi:

$$
\begin{aligned}
z = x + jy &= |z|\cos\theta + j|z|\sin\theta \\
&= |z|(\cos\theta + j\sin\theta)
\end{aligned}
$$

- Hasil di atas disebut juga bentuk polar dari bilangan kompleks.
- Persamaan di atas dapat dipersingkat lagi, dengan:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

Bentuk Polar Bilangan Kompleks

$$z = x + jy = |z|\cos\theta + j|z|\sin\theta$$
$$= |z|(\cos\theta + j\sin\theta)$$

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

- Maka bentuk polarnya dapat ditulis:

$$z = |z|\,e^{j\theta}$$

- Atau sering juga disingkat dengan bentuk:

$$z = |z|\angle\theta$$

- Di mana θ adalah fasa-nya, dan dari persamaan z = x + jy, maka nilai fasa-nya adalah:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Bentuk Polar Bilangan Kompleks

- Contoh:

Tulis z = -1 – i dalam bentuk polar.

Jawab:

Dari soal didapat bahwa nilai x = -1 dan nilai y = -1. Kemudian bisa dihitung modulus z adalah:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Dan fasa-nya adalah:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{-1}\right) = \pi/4$$

Operasi Perhitungan Bilangan Kompleks

1. Penjumlahan

Contoh:

Diketahui bahwa $z_1 = 3 + 5j$ dan $z_2 = 1 - 2j$.

Tentukan $z_1 + z_2$

Jawab:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (3 + 5j) + (1 - 2j) \\ &= (3 + 1) + (5j - 2j) \\ &= 4 + 3j \end{aligned}$$

Operasi Perhitungan Bilangan Kompleks

2. Pengurangan

Contoh:

Dari soal yang sama, tentukan $z_1 - z_2$.

Jawab:

$$z_1 - z_2 = (3 + 5j) - (1 - 2j)$$
$$= 3 + 5j - 1 + 2j$$
$$= 2 + 7j$$

Operasi Perhitungan Bilangan Kompleks

3. Perkalian

Contoh:

Dari soal yang sama, tentukan z_1 z_2.

Jawab:

z_1 - z_2 = (3 + 5j) . (1 - 2j)

= (3.1) + (3. -2j) + (5j.1) + (5j. -2j)

= 3 - 6j + 5j - 10j^2 . Ingat bahwa j^2 = -1

= 13 – j

Operasi Perhitungan Bilangan Kompleks

4. Pembagian

- Hasil bagi bilangan kompleks dapat disederhanakan ke dalam bentuk $z = x + jy$ dengan cara mengalikan pembilang dan penyebut dengan sekawan kompleks penyebut.
- Di mana sekawan kompleks dari bentuk $z = x + jy$ adalah $z = x – jy$.

Operasi Perhitungan Bilangan Kompleks

4. Pembagian

Contoh:

Hitung $$z = \frac{2+j}{4-3j}$$

Jawab:

Kalikan penyebut dan pembilang dengan sekawan kompleks dari penyebut. Sehingga:

$$z = \frac{2+j}{4-3j} \times \frac{4+3j}{4+3j} = \frac{8+10j+3j^2}{16-9j^2}$$

$$= \frac{8+10j-3}{16+9} = \frac{5+10j}{25} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}j$$

PR!!!

PR#1:

Tentukan $z = \dfrac{5 + 2j}{2 + 4j}$

Operasi Perhitungan Bilangan Kompleks

5. Perkalian & Pembagian Dalam Bentuk Polar

- Jika diketahui: $z_1 = |z_1| e^{j\theta_1}$ dan $z_2 = |z_2| e^{j\theta_2}$
- Maka perkalian $z_1.z_2$ adalah:

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{j\theta_1} \cdot |z_2| e^{j\theta_2} = |z_1| |z_2| e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

- Dan pembagian kedua bilangan kompleks tersebut adalah:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{j\theta_1}}{|z_2| e^{j\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

Operasi Perhitungan Bilangan Kompleks

5. Perkalian & Pembagian Dalam Bentuk Polar

- Contoh: Diketahui dua bilangan kompleks bentuk polar berikut:

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ dan } z_2 = 4e^{j\frac{\pi}{4}}$$

Tentukan perkalian dan pembagian kedua bilangan tersebut.

Operasi Perhitungan Bilangan Kompleks

5. Perkalian & Pembagian Dalam Bentuk Polar

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ dan } z_2 = 4e^{j\frac{\pi}{4}}$$

- Jawab:

$$z_1 z_2 = 2e^{j90^o} \cdot 4e^{j45^o} = 8e^{j(90^o+45^o)} = 8e^{j135^o} = 8e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

$$= 8\angle 135^o$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{j90^o}}{4e^{j45^o}} = \frac{1}{2}e^{j(90^o-45^o)} = \frac{1}{2}e^{j45^o} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\angle 45^o$$

Bentuk Eksponen & Trigonometri

- Telah diketahui bahwa:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

- Jika kedua persamaan di atas dijumlah dan dikurangkan, maka akan didapat:

$$\begin{aligned} e^{j\theta} + e^{-j\theta} &= (\cos\theta + j\sin\theta) + (\cos\theta - j\sin\theta) \\ &= 2\cos\theta \\ \cos\theta &= \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{j\theta} - e^{-j\theta} &= (\cos\theta + j\sin\theta) + (\cos\theta - j\sin\theta) \\ &= 2j\sin\theta \\ \sin\theta &= \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \end{aligned}$$

Bentuk Eksponen & Trigonometri

$$
\begin{aligned}
e^{j\theta} + e^{-j\theta} &= (\cos\theta + j\sin\theta) + (\cos\theta - j\sin\theta) \\
&= 2\cos\theta \\
\cos\theta &= \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{j\theta} - e^{-j\theta} &= (\cos\theta + j\sin\theta) + (\cos\theta - j\sin\theta) \\
&= 2j\sin\theta \\
\sin\theta &= \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}
\end{aligned}
$$

- Jika θ diganti dengan z maka:

$$
\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \quad \text{dan} \quad \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}
$$

Bentuk Eksponen & Trigonometri

- Contoh:

Tentukan sin j.

Jawab:

$$\sin j = \frac{e^{j \cdot j} - e^{-j \cdot j}}{2j} = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2j} \times \frac{j}{j}$$

$$= \frac{1}{2} j \left(e - \tfrac{1}{e}\right) = 1{,}1752\, j$$

Terima Kasih

Beny Nugraha, MT, M.Sc