

Спектры предложений первого порядка с ограниченным количеством переменных

Ярмошик Демьян

Московский физико-технический институт (НИУ)

25 июня, 2019

Случайный граф $G(N, p) \in \Omega_N$, $|\Omega_N| = 2^{C_N^2}$
 $P : 2^{\Omega_N} \rightarrow [0, 1]$

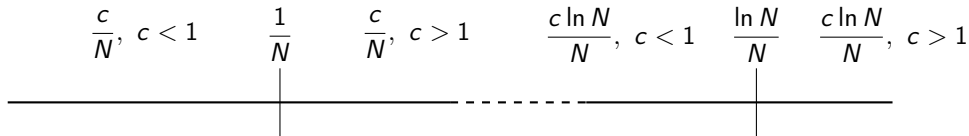
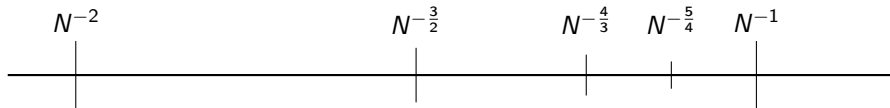
$$P_{N,p}(G) = p^{|E|}(1 - p)^{C_N^2 - |E|}$$

Обычно $p = p(N) = N^{-\alpha}$

пустой

разреженный

плотный



Теорема (А. Ручински, А. Винс, 1985)

Функция $N^{-1/\rho^{\max}(H)}$ является пороговой для случайного графа $G(N, p)$ и свойства содержать копию графа H в качестве подграфа.

Теорема (Б. Боллобаш, 1981)

Пусть H — строго сбалансированный граф, a — количество автоморфизмов графа H , $p = N^{-1/\rho^{\max}(H)}$. Тогда

$$N_H \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} \text{Poiss}(1/a).$$

Здесь N_H — количество копий графа H в $G(N, p)$, $\text{Poiss}(1/a)$ — пуассоновская случайная величина со средним $1/a$.

Язык первого порядка \mathcal{L} :

переменные: $x, y, z, x_1, x_2 \dots$;

логические связки: \wedge, \neg, \vee ;

кванторы по переменным: $\exists x, \forall z$;

предикатные символы: $\sim, =$.

$$\forall x \exists y \exists z (x \sim y \wedge x \sim z \wedge y \sim z)$$

Определение

Для произвольного языка \mathcal{F} , случайный граф $G(N, p)$ подчиняется закону нуля или единицы для языка \mathcal{F} , если для любой формулы φ из языка \mathcal{F} выполнено

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(G(N, p) \models \varphi) \in \{0, 1\}.$$

Теорема (Дж. Спенсер, С. Шелах, 1988)

Случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы для языка \mathcal{L} при всех α , кроме

$$((0, 1] \cap \mathbb{Q}) \cup \{(k+1)/k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Определение

Язык \mathcal{L}^k — подмножество \mathcal{L} , содержащее предложения, в которые входят не более k переменных.

В \mathcal{L}^3 можно выразить свойство “иметь диаметр не более d ”:

$$\psi_d = \forall x \forall y (x = y \vee x \sim y \vee (\exists z (x \sim z \wedge z \sim y) \vee (\exists z (x \sim z \wedge (\exists x (z \sim x \wedge x \sim y)) \vee \dots$$

Определение

Язык $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^k$ включает в себя предложения конечной или счётной длины, в которые входят не более k переменных.

Определение

Спектром формулы φ называется множество α таких, что вероятность $P(G(N, N^{-\alpha}) \models \varphi)$ не стремится ни к 0, ни к 1 при $N \rightarrow \infty$.

- ▶ Нарушется ли закон нуля или единицы для \mathcal{L}^3 , $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^3$ в окрестности 1?
- ▶ Отличается ли структура спектров формул этих языков от спектров формул языка \mathcal{L} и языков с ограниченной кванторной глубиной?

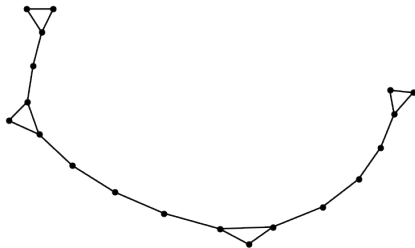
- ▶ Теоремы о вхождении подграфа
- ▶ Игра Эренфойхта и модификации: k -Pebble и др.

В \mathcal{L} в правой полуокрестности единицы закон нуля нарушается в точках $\frac{k+1}{k}$.

Доказано: в $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^3$ есть формула φ , у которой в точках $\alpha = \frac{k+1}{k}$ вероятность $P(G(N, N^{-\alpha}) \models \varphi)$ имеет предел, отличный от 0 и 1.

Теорема

Объединение спектров всех формул из \mathcal{L}^3 имеет предельные точки в любой левой окрестности единицы.



Определение

$$\mathcal{L}_{\infty, \omega}^{\omega} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}_{\infty, \omega}^k$$

Теорема (С. Шелах, 2017)

$G(N, N^{-\alpha})$ не подчиняется закону нуля или единицы для языка $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^{\omega}$ при $\alpha \in (0, 1]$.

Определение

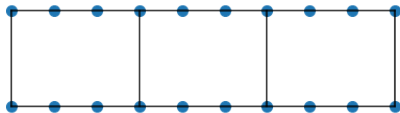
$$\mathcal{L}_{\infty, \omega}^{\omega} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}_{\infty, \omega}^k$$

Теорема (С. Шелах, 2017)

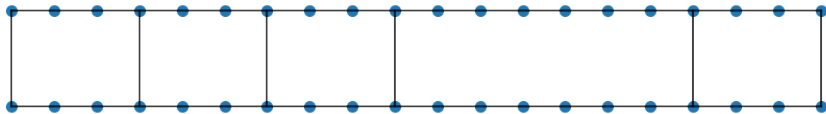
$G(N, N^{-\alpha})$ не подчиняется закону нуля или единицы для языка $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^{\omega}$ при $\alpha \in (0, 1]$.

- ▶ Большие k .
- ▶ До сих пор нет публикации.
- ▶ Сложное решение.

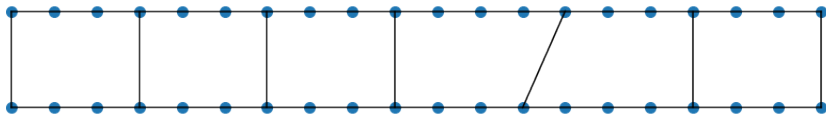
Левая окрестность единицы: $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1) \setminus \mathbb{Q}$



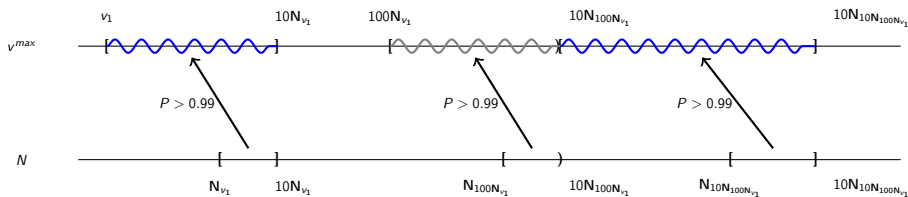
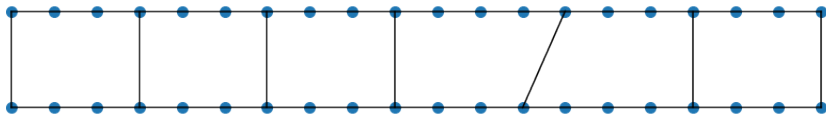
Левая окрестность единицы: $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1) \setminus \mathbb{Q}$



Левая окрестность единицы: $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1) \setminus \mathbb{Q}$



Левая окрестность единицы: $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1) \setminus \mathbb{Q}$



- ▶ Нарушается ли закон нуля или единицы для языка $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^3$ при иррациональных α ?

Теорема (Моника МакАртур, 1997)

Для любого $\alpha < \frac{1}{k-1}$ случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы для языка $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^k$. В точке $\alpha = \frac{1}{k-1}$ з.н.е. выполнен при $k \in \{2, 3\}$ и не выполнен при $k \geq 4$.

Теорема (М. Жуковский, А. Раджафимахатратра, 2018)

$\forall k \geq 2$ случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется з.н.е. для языка \mathcal{L}^k при $\alpha = \frac{1}{k-1}$. Для $k \geq 3$ з.н.е. нарушается в любой правой полуокрестности $\frac{1}{k-1}$.