

Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт (государственный
университет)

Факультет управления и прикладной математики
Кафедра «Интеллектуальные системы», специализация «Проектирование и
организация систем»

Выпускная квалификационная работа бакалавра по направлению 010900
«Прикладные математика и физика»

Спектры предложений первого порядка с ограниченным количеством переменных

Студент 573 группы
Ярмошик Д. В.

Научный руководитель
Жуковский М. Е.

Долгопрудный
2019

Аннотация

В данной работе исследуются асимптотические свойства случайных графов модели Эрдеша-Реньи и свойства языков первого порядка с ограниченным числом переменных на графах. Рассматриваются вопросы о спектрах предложений из этих языков и о выполнении законов нуля или единицы для этих языков. В работе доказано, что существует формула с бесконечным спектром из $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^3$, и что объединение спектров всех формул из \mathcal{L}^3 имеет бесконечное число предельных точек в левой полукрестности единицы.

Ключевые слова: случайные графы, модель Эрдёша-Реньи, языки первого порядка

Содержание

1. Введение	4
2. Постановка задачи	9
3. Полученные результаты	10
3.1. Формула из $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^3$ с бесконечным спектром	10
3.2. Предельные точки \mathcal{L}^3 в левой окрестности единицы	11
3.3. Иррациональные α	16
4. Заключение	20

1 Введение

Случайные графы – один из центральных разделов дискретной математики, расположенный на стыке теории вероятностей, комбинаторики и теории графов. Основы теории случайных графов были заложены в 50-х – 60-х годах прошлого века венгерскими математиками П. Эрдёшем и А. Реньи. Существует множество моделей случайных графов, разработанных с учётом адекватности их применения в прикладных областях: моделирования социальных, биологических и инфраструктурных сетей. В настоящей работе мы будем иметь дело с *моделью Эрдёша–Реньи*, также называемой *классической моделью* случайного графа.

Многие вопросы этой теории связаны с асимптотическими свойствами случайного графа, то есть с тем, как он ведёт себя при устремлении количества вершин N к бесконечности. Удивительным образом оказывается, что для целого класса таких вопросов можно, совершенно не вдаваясь в сущность конкретного вопроса, дать на него едва ли не исчерпывающий ответ. Точнее говоря, если про случайный граф спрашивается “Как при увеличении числа вершин до бесконечности будет вести себя вероятность того, что граф обладает свойством A ?”, то во многих случаях можно заранее сказать: “Будет стремиться к 0 или к 1”. В этом состоит суть теорем, называемых *законами нуля или единицы*, уточнению условий применимости которых посвящена данная работа.

Чтобы перейти к изложению известных результатов о законах нуля или единицы, дадим определения основным понятиям и сформулируем теоремы, касающиеся важных для нас свойств случайного графа $G(N, p)$ (см. [1]).

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq 1$. Рассмотрим множество $\Omega_N = \{G = (V_N, E)\}$, $|\Omega_N| = 2^{C_N^2}$ всех неориентированных графов без петель и кратных ребер с множеством вершин $V_N = \{1, \dots, N\}$.

Определение. Случайный граф $G(N, p)$ в модели Эрдёша–Реньи — это случайный элемент со значениями во множестве Ω_N и распределением $P_{N,p}(G) = p^{|E|}(1 - p)^{C_N^2 - |E|}$, определённом на $\mathcal{F} = 2^{\Omega_N}$.

Иначе говоря, это полный граф на N вершинах, в котором каждое ребро независимо от других рёбер удаляется с вероятностью $1 - p$. Параметр p называют вероятностью проведения ребра.

Определение. Для произвольного языка \mathcal{F} , случайный граф $G(N, p)$ подчиняется закону нуля или единицы для языка \mathcal{F} , если для любой формулы φ из языка \mathcal{F} выполнено $\lim_{N \rightarrow \infty} P(G(N, p) \models \varphi) \in \{0, 1\}$.

Введём обозначение \mathcal{L} для языка первого порядка с сигнатурой, в которую входят только двуместные предикаты равенства ($=$) и смежности (\sim). За точными определениями можно обратиться, например, к [2], а здесь мы ограничимся лишь напоминанием о том, что формулы языка первого порядка — это предложения, составленные из символов, обозначающих переменные: x, y, z, x_1, \dots , логических связок \wedge, \neg, \vee , кванторов \exists, \forall и предикатных символов (в нашем случае $\sim, =$). Например, формула,

утверждающая, что диаметр графа (расстояние между двумя наиболее удалёнными друг от друга вершинами, измеряемое в рёбрах) не превосходит 2, выглядит так:

$$\forall x \forall y \ x = y \vee x \sim y \vee (\exists z \ x \sim z \wedge z \sim y).$$

Всюду далее $E(G)$ будет обозначать множество вершин графа G , а $V(G)$ — множество его рёбер.

Определение. *Плотность* графа G

$$\rho(G) = \frac{|E(G)|}{|V(G)|}.$$

Определение. *Максимальная плотность* графа G

$$\rho^{max}(G) = \max_{H \subseteq G} \frac{|E(H)|}{|V(H)|}.$$

Определение. Граф G называется *сбалансированным*, если

$$\rho^{max}(G) = \rho(G).$$

Определение. Граф G называется *строго сбалансированным*, если

$$\rho^{max}(G) = \rho(G) > \max_{H \subseteq G} \frac{|E(H)|}{|V(H)|}.$$

Определение. Функция $f(N) : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ называется *пороговой функцией* для свойства φ и случайного графа $G(N, p)$, если при $p(N) \ll f(N)$ вероятность $\mathbf{P}(G(N, p) \models \varphi)$ стремится к нулю (единице), и, наоборот, при $p(N) \gg f(N)$ вероятность $\mathbf{P}(G(N, p) \models \varphi)$ стремится к единице (нулю).

Здесь и далее $f(N) \ll g(N)$ означает $f(N) = o(g(N))$.

В 1960 г. П. Эрдёш и А. Реньи доказали теорему об условиях справедливости утверждения “ $G(N, p)$ содержит копию данного сбалансированного графа” [3]. Позже этот результат получил следующее обобщение.

Теорема 1. (А. Ручински, А. Винс, 1985, [4]) Пусть дан некоторый граф H . Функция $N^{-1/\rho^{max}(H)}$ является пороговой для случайного графа $G(N, p)$ и свойства содержать копию графа H в качестве подграфа.

Для нас очень важно то, что при $p = N^{-1/\rho^{max}(H)}$ вероятность содержать подграф H не стремится ни к нулю, ни к единице. Это утверждение, содержащееся в следующей теореме, даёт удобный способ доказывать отсутствие законов нуля или единицы для $G(N, N^{-\alpha})$, $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Теорема 2. (Б. Боллобаш, 1981, [5]). Пусть H — строго сбалансированный граф,

a — количество автоморфизмов графа H , $p = N^{-1/\rho^{max}(H)}$. Тогда

$$N_H \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{d} Poiss(1/a).$$

Здесь N_H — количество копий графа H в $G(N, p)$, $Poiss(1/a)$ — пуассоновская случайная величина со средним $1/a$.

Из последней теоремы и доказанного в [6] утверждения о том, что для любого $\alpha \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ существует строго сбалансированный граф H с плотностью $\rho(H) = 1/\alpha$, следует, что $G(N, N^{-\alpha})$ не подчиняется закону нуля или единицы для языка \mathcal{L} при всех рациональных α из интервала $(0, 1]$. Это верно и для $\alpha = (k+1)/k$, $k > 0$, т.к. для каждого из таких α существует дерево с соответствующей плотностью. При $\alpha > 2$ граф $G(N, N^{-\alpha})$ асимптотически почти наверное пуст, и, следовательно, подчиняется закону нуля или единицы. Оказывается, что при всех прочих α случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ также подчиняется закону нуля или единицы. Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. (Дж. Спенсер, С. Шелах, 1988, [7]) Случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы для языка \mathcal{L} при всех α , кроме $\alpha \in ((0, 1] \cap \mathbb{Q}) \cup \{(k+1)/k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

О том, сохраняется ли закон нуля или единицы, когда вероятность проведения ребра лежит в “промежутках” между степенными функциями, говорят следующие теоремы.

Теорема 4. (Дж. Спенсер, С. Шелах, 1988 [7], [8]) $G(N, p)$ подчиняется закону нуля или единицы для языка \mathcal{L} в следующих случаях:

1. $N^{-1-\frac{1}{k}} \ll p(N) \ll N^{-1-\frac{1}{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$.
2. $N^{-1-\varepsilon} \ll p(N) \ll N^{-1} \forall \varepsilon > 0$.
3. $N^{-1} \ll p(N) \ll N^{-\frac{\ln N}{N}}$.
4. $N^{-\frac{\ln N}{N}} \ll p(N) \ll N^{-1+\varepsilon} \forall \varepsilon > 0$.
5. $N^{-\varepsilon} \ll p(N) \forall \varepsilon > 0$.

Теорема 5. [9] Для любого иррационального $\alpha \in (0, 1)$ случайный граф $G(N, N^{-\alpha+o(1)})$ подчиняется закону нуля или единицы для языка \mathcal{L} .

Чтобы прояснить содержание теоремы 4, расскажем подробнее о том, как меняются асимптотические свойства графа Эрдёша–Реньи при изменении асимптотики вероятности проведения ребра. Легко видеть, что при $p(N) = o(N^{-2})$ в случайном графе $G(N, p)$ асимптотически почти наверное нет рёбер: из неравенства Маркова, вероятность найти в нём хотя бы одно ребро $P(|E| \geq 1) \leq \mathbb{E}|E| = \frac{1}{2}N(N-1)p(N) \rightarrow 0$. При

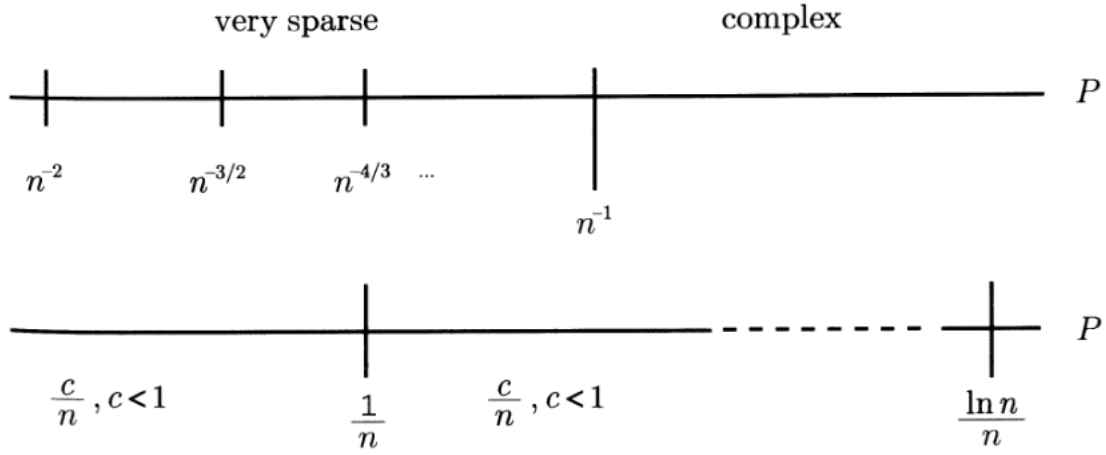


Рис. 1. Условное соответствие между асимптотикой $p(N)$ и “разреженностью” случайного графа. Пороговые функции для свойств “содержать дерево на k вершинах”, “содержать гигантскую компоненту”, “быть связным”

переходе через $\alpha = 2$ в графе появляются изолированные рёбра, а при $p(N) = N^{-1-\frac{1}{k}}$, как следует из теорем 1, 2 в случайном графе появляются деревья на k вершинах. В процессе перехода через $\alpha = 1$ в случайном графе выделяется так называемая “гигантская компонента”: если $p(N) = c/N$, $c < 1$, то асимптотически почти наверное (а.п.н.) каждая компонента связности случайного графа содержит не более $\beta(c) \ln N$ вершин; если $p(N) = c/N$, $c > 1$, то в случайном графе а.п.н. имеется компонента связности с числом вершин, превосходящим $\gamma(c)N$, то есть растущим линейно с ростом N [10] [11] [12]. Следующая интересная точка на пути увеличения вероятности проведения ребра (в смысле асимптотики) — это $\ln N/N$, пороговая функция для свойства связности. Если $p(N) = c \frac{\ln N}{N}$, то при $c < 1$ случайный граф а.п.н. не связан, а при $c > 1$ он а.п.н. является связным [12].

Ниже мы сформулируем для других языков несколько теорем, аналогичных теореме 3.

Определение. Язык \mathcal{L}^k — подмножество \mathcal{L} , содержащее предложения, в которые входят не более k переменных.

На языке \mathcal{L}^3 для любого натурального d можно выразить, например, свойство “иметь диаметр не более d ”:

$$\psi_d = \forall x \forall y (x = y \vee x \sim y \vee (\exists z (x \sim z \wedge z \sim y)) \vee (\exists z (x \sim z \wedge (\exists x (z \sim x \wedge x \sim y))) \vee \dots$$

Определение. Язык $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^k$ включает в себя предложения конечной или счётной длины, в которые входят не более k переменных.

На языке $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^3$ можно выразить, например, свойство “быть связным”: $\psi = \bigvee_{d=1}^{\infty} \psi_d$. Это свойство невыразимо в \mathcal{L} .

Определение.

$$\mathcal{L}_{\infty, \omega}^{\omega} = \bigcup_k \mathcal{L}_{\infty, \omega}^k$$

Теорема 6. *Случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы для языка $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^{\omega}$ при $\alpha \in (1, 2] \setminus \{(k+1)/k \mid k \in \mathbb{N}\}$ (Дж. Линч, 1993 [13]) и $\alpha > 2$. Закон нуля или единицы не выполнен при $\alpha \in (0, 1]$ (С. Шелах, 2017 [14]) и $\alpha \in \{(k+1)/k \mid k \in \mathbb{N}\}$.*

Теорема 7. *(М. МакАртур, 1997 [15]) Для любого $\alpha < \frac{1}{k-1}$ случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы для языка $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^k$.*

Ниже дано неформальное определение кванторной глубины формулы. Формальное определение есть, например, в [2].

Определение. *Кванторная глубина формулы — наибольшее число вложенных кванторов в формуле.*

Определение. *Язык \mathcal{L}_k — подмножество \mathcal{L} , включающее формулы с кванторной глубиной не более k .*

Теорема 8. *(М. Е. Жуковский, 2012, [16]). Пусть $p = N^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1/(k-2)$. Тогда случайный граф $G(N, p)$ подчиняется закону нуля или единицы для языка \mathcal{L}_k .*

2 Постановка задачи

Нас интересуют выразительные способности языков \mathcal{L}^k и $\mathcal{L}_{\infty,\omega}^k$ и, в частности, наиболее простых среди них — языков \mathcal{L}^3 и $\mathcal{L}_{\infty,\omega}^3$. Из результата МакАртур [15] следует, что для этих языков выполнен закон нуля или единицы при $\alpha < \frac{1}{2}$. Кроме того, известно (М. Жуковский, А. Раджафимахатратра, 2019 [17]), что при $\alpha = \frac{1}{k-1}$ закон нуля или единицы для языка \mathcal{L}^k всё ещё справедлив, но в любой правой полуокрестности $\frac{1}{k-1}$ существует α , для которого закон нуля или единицы нарушается. Что можно сказать о сохранении закона нуля или единицы для языков с тремя переменными при других значениях параметра α , например в окрестности $\alpha = 1$ — точки, при переходе через которую граф теряет связность? Существуют утверждения, не выразимые на языке \mathcal{L} , но выразимые в $\mathcal{L}_{\infty,\omega}^3$ и наоборот. Для языка \mathcal{L} закон нуля или единицы выполнен при всех иррациональных α , верно ли это для $\mathcal{L}_{\infty,\omega}^3$? Различается ли структура множеств параметров, на которых нарушается закон нуля или единицы, у языков с ограниченным количеством переменных и языков с ограниченной кванторной глубиной?

3 Полученные результаты

3.1 Формула из $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^3$ с бесконечным спектром

Определение. Спектром формулы φ называется множество α таких, что вероятность $P(G(N, N^{-\alpha}) \models \varphi)$ не стремится ни к 0, ни к 1 при $N \rightarrow \infty$. Здесь использовано обозначение $G \models \varphi$, означающее, что для графа G истинна φ .

Теорема 9. В языке $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^3$ существует формула с бесконечным спектром с предельной точкой 1 (справа).

Доказательство. Обозначим φ_m замкнутую формулу, которая истинна тогда и только тогда, когда в графе существует цикл длины не более m или простой путь длины m , $\varphi_m \in \mathcal{L}^3$. Например,

$$\varphi_3 = \exists x \exists y (x \sim y \wedge (\exists z (y \sim z \wedge z \neq x \wedge (\exists x (x \sim z \wedge x \neq y))))).$$

Определим $\varphi \in \mathcal{L}_{\infty, \omega}^3$:

$$\varphi = \bigvee_{k=2}^{+\infty} (\bigwedge_{i=3}^{2k-1} \varphi_i \wedge \neg \varphi_{2k}).$$

Пусть $\alpha = 1 + \frac{1}{2k}$. Напомним, что при таком α , по теореме 1, вероятность обнаружить в случайном графе $G(N, N^{-\alpha})$ сбалансированный подграф H с плотностью $\rho_H > \frac{2k}{2k+1}$ стремится к нулю, с плотностью $\rho_H < \frac{2k}{2k+1}$ стремится к 1, а с плотностью $\rho_H = \frac{2k}{2k+1}$ — ни к нулю, ни к единице. Поскольку $\frac{2k}{2k+1}$ — это плотность простого пути длины $2k$, то асимптотически почти наверное случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ содержит простой путь длины $2k-1$, поэтому в формуле φ дизъюнкция конъюнктов до $k-1$ -го включительно ложна с вероятностью, стремящейся к 1. Также, с вероятностью, стремящейся к 1, $G(N, p)$ не содержит циклов длины не более $2k+1$ и простых путей длины $2k+1$. Поэтому дизъюнкция конъюнктов от $k+1$ -го до бесконечности ложна с вероятностью, стремящейся к 1.

Количество простых путей длины $2k$ в $G(N, N^{-\frac{2k+1}{2k}})$ имеет асимптотическое распределение $Poiss(1/2)$, поэтому

$$P(G(n, p) \models \varphi) = P(G(n, p) \models \neg \varphi_{2k}) \rightarrow e^{-1/2}.$$

Аналогично, при $\alpha = 1 + \frac{1}{2k+1}$

$$P(G(n, p) \models \varphi) = P(G(n, p) \models \varphi_{2k+1}) \rightarrow 1 - e^{-1/2}.$$

Таким образом, спектр формулы φ содержит множество $\{1 + 1/k \mid k > 5\}$, что и требовалось. \square

3.2 Предельные точки \mathcal{L}^3 в левой окрестности единицы

Определение. Назовём *предельной точкой языка \mathcal{F}* такое α , что в любой окрестности α существует α' , для которого не выполнен закон нуля или единицы для языка \mathcal{F} .

Иначе говоря, множество предельных точек языка — это множество предельных точек объединения спектров всех его формул.

Докажем, что в языке \mathcal{L}^3 предельные точки существуют в любой левой полуокрестности единицы: $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha \in (1 - \varepsilon, 1)$, α — предельная точка.

Рассмотрим граф, состоящий из $k + 2$ треугольников, соединённых простыми путями. Причём, расстояние (в рёбрах) между вторым и третьим треугольниками, третьим и четвёртым и т. д., одинаково. Обозначим это расстояние m , а расстояние между первым и вторым треугольником — s .

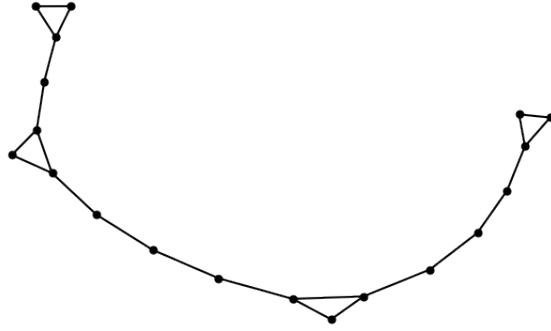


Рис. 2. Граф с $k = 2$, $s = 2$ и $m = 4$

Плотность такого графа равна

$$\rho(H_{ksm}) = \frac{6 + s + (3 + m)k}{5 + s + (2 + m)k}$$

и при увеличении k стремится к $\rho_\infty = \frac{3 + m}{2 + m}$.

Граф с $k = 0$ состоит из двух треугольников и имеет вид гантели.

Т.к. $\text{sign}\left(\frac{\partial \rho(H_{ksm})}{\partial k}\right) = \text{sign}(3 + s - m)$, то при $m < 3 + s$ плотность графа растёт при увеличении k и, как нетрудно убедиться, при этом выполнено равенство $\rho(H_{ksm}) = \rho^{\max}(H_{ksm})$. Будем считать $m = s + 2$, т.к. при таком соотношении длины гантели и длины добавочных звеньев граф получается оптимальным с точки зрения плотности, что пригодится в дальнейшем.

Таким образом, по теореме 2, для доказательства утверждения достаточно предъявить для каждого такого графа формулу из \mathcal{L}^3 , выражающую его существование.

Вместо $\exists x \exists y \exists z \ x \sim y \wedge y \sim z \wedge x \sim z$ будем писать Δ_{xyz}

Рассмотрим формулу

$$\varphi_{0s} = \Delta_{xyz} \wedge \psi_s^x,$$

$$\begin{aligned}
\psi_s^x &= \exists x [x \sim z \wedge x \neq y \wedge x \approx y] \\
&\wedge \exists y [y \sim x \wedge y \neq z \wedge y \approx z] \\
&\wedge \exists z [z \sim y \wedge z \neq x \wedge z \approx x] \\
&\wedge \dots \\
&\wedge \exists \xi \xi \sim \nu \wedge \xi \sim \eta,
\end{aligned} \tag{1}$$

где количество выражений в квадратных скобках в ψ_s^x равно $s + 1$; верхний индекс x соответствует переменной, стоящей после первого квантора существования, вместо символа ξ стоит одна из переменных x, y, z — какая именно, определяется параметром s (переменные у кванторов существования следуют в циклическом порядке: x, y, z, x, y, \dots); ν и η — две оставшиеся из x, y, z переменные, отличные от ξ .

Если бы в этой формуле после каждого нового квантора существования присутствовало условие на то, что переменная, стоящая после квантора не равна всем переменным, объявленным ранее, то φ_{0s} выражала бы существование гантели с расстоянием между треугольниками, равным s (это не совсем так, потому что наша формула запрещает проведение некоторых рёбер, соединяющих вершины гантели, но это ничего не портит ни для гантели, ни для H_{ksm} : при $\alpha = 1/\rho(H_{ksm})$ графов H_{ksm} с дополнительными рёбрами а.п.н. нет в $G(N, N^{-\alpha})$). К сожалению, имея лишь три переменных, мы не можем напрямую запретить одной переменной соответствовать нескольким вершинам, поэтому $G \models \varphi_{0s}$ не только в случае, когда граф G содержит гантель соответствующей длины (например, граф, изображённый на Рис. 4, удовлетворяет $\varphi_{0,6}$). Впрочем, как мы покажем далее, делать это и не обязательно.

Составим теперь аналогичную формулу φ_{ksm} для графа H_{ksm} :

$$\varphi_{ksm} = \triangle_{xyz} \wedge \psi_s^x \wedge \psi_m^{\xi_1} \wedge \dots \wedge \psi_m^{\xi_k}.$$

Здесь ξ_1 — следующая по порядку (x, y, z, x, y, \dots) переменная после переменной, стоящей у последнего квантора существования в ψ_s^x , ξ_2 — следующая после переменной, стоящей у последнего квантора существования в $\psi_m^{\xi_1}$ и т. д.

По той же причине, существование в $G(N, N^{-\alpha})$ подграфа H_{ksm} не является необходимым для того, чтобы формула φ_{ksm} была верна. Однако, оно становится необходимым (с вероятностью, стремящейся к единице) при $\alpha = 1/\rho_{H_{ksm}}$ и $m = s + 2$. Действительно, докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$, $m = s + 2$. Если $G \models \varphi_{ksm}$, и G не содержит подграфа, изоморфного H_{ksm} , то G содержит более плотный подграф с меньшим числом вершин.

Доказательство. Назовём переменной* переменную в зоне действия квантора по этой переменной. Так, одной букве-переменной x соответствует несколько переменных со звёздочкой.

В графе H_{ksm} каждой переменной* формулы φ_{ksm} соответствует отдельная вершина. Пусть для графа G истинна φ_{ksm} , и он не содержит подграфа, изоморфного

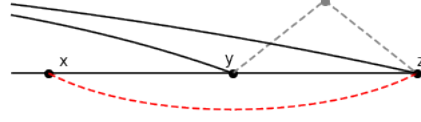


Рис. 3. Только последняя вершина использована повторно. Черным обозначены вершины и рёбра $\tilde{H}_{k'sm}$, серым вершины и рёбра $H_{k'sm}$, красным пунктиром — рёбра, запрещённые формулой

H_{ksm} .

$G \models \varphi_{ksm}$ означает, что существует (по крайней мере, одно) такое отображение из множества переменных* формулы во множество вершин графа, что если в формулу вместо переменных подставить соответствующие вершины и убрать кванторы, то получится верное утверждение. Зафиксируем одно из таких отображений. Обозначим \tilde{H}_{ksm} подграф графа G , индуцированный на образе этого отображения. Очевидно, что некоторой вершине \tilde{H}_{ksm} соответствует более одной переменной*, т.к. иначе \tilde{H}_{ksm} изоморфен H_{ksm} . Назовём конъюнкт вида $\psi_*^{\xi_l}$, $*$ $\in \{s, m\}$, l -ой *секцией* формулы φ_{ksm} . Пусть k' — номер секции, в которой впервые произошло повторное “использование” вершины, то есть в $(\Delta_{xyz} \wedge \psi_s^{\xi_0} \wedge \psi_m^{\xi_1} \wedge \dots \wedge \psi_m^{\xi_{k'}})$ есть две переменные, соответствующие одной вершине, а в $(\Delta_{xyz} \wedge \psi_s^{\xi_0} \wedge \psi_m^{\xi_1} \wedge \dots \wedge \psi_m^{\xi_{k'-1}})$ таких двух переменных нет. Обозначим $\tilde{H}_{k'sm}$ подграф графа G , индуцированный на образе ограничения зафиксированного отображения на множестве переменных* формулы $(\Delta_{xyz} \wedge \psi_s^{\xi_0} \wedge \psi_m^{\xi_1} \wedge \dots \wedge \psi_m^{\xi_{k'}})$.

Введём обозначения:

$$e := |E(H_{k'sm})|, \quad v := |V(H_{k'sm})|,$$

$$\tilde{e} := |E(\tilde{H}_{k'sm})|, \quad \tilde{v} := |V(\tilde{H}_{k'sm})|.$$

Есть три возможности:

1. Последняя вершина в звене уже была использована — та, которая сразу добавляет два рёбра

- (а) повторно использована только она: $\tilde{\rho}^{max} \geq \frac{e}{v-1}$, так как в этом случае число вершин в $\tilde{H}_{k'sm}$ равно $v-1$, а число рёбер не меньше e . Действительно, в рассматриваемом случае (по определению) $\tilde{H}_{k'sm}$ содержит все рёбра $H_{k'sm}$, кроме, быть может, двух рёбер, инцидентных последней вершине (вершине, соответствующей последней переменной секции с номером k'), которые могут уже присутствовать в $H_{k'sm}$. Однако, легко видеть, что это невозможно (см. Рис. 3).

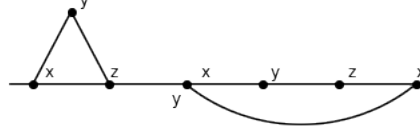


Рис. 4. Повторное использование промежуточной вершины

- (b) она и какая-то до неё: $\tilde{\rho}^{max} \geq \frac{e-2}{v-2}$. Действительно, посмотрим на первую повторно использованную вершину. Т.к. формула запрещает совпадать вершинам, соответствующим разным переменным, для её соединения с предыдущими вершинами необходимо добавить ребро, которого нет в графе $H_{k'sm}$. С каждой новой секцией в $H_{k'sm}$ добавляется $3+m$ рёбер и $2+m$ вершин. Однако, проведя дополнительное ребро к уже имеющейся вершине, мы уже добавили на одно ребро больше, чем вершин, поэтому имеем рёбер $\tilde{e}' = e - (3+m) + (\nu+1) = e - (m-\nu)$, вершин $\tilde{v}' = v - (2+m) + \nu = v - (m-\nu)$, где ν — число вершин, уже добавленных в последней “секции” $\tilde{H}_{k'sm}$. В рассматриваемом случае $\tilde{v} \leq v-2$, поэтому $\tilde{\rho}^{max} \geq \frac{e-2}{v-2}$.

2. Последняя вершина ещё не была использована: $\tilde{\rho}^{max} \geq \frac{e}{v-1}$. Этот случай похож на **1b**, но теперь $\tilde{v} \leq v-1$ и последняя вершина добавляет 2 ребра.

$$\text{Итого } \tilde{\rho}^{max} \geq \min \left\{ \frac{e-2}{v-2}, \frac{e}{v-1} \right\} = \frac{e-2}{v-2} = \frac{4+s+(3+m)k'}{3+s+(2+m)k'}.$$

Используя $m = s+2$, получаем $\tilde{\rho}^{max} - \rho_\infty = \frac{1}{((2+m)(k+1)-1)(m+2)}$, следовательно $\tilde{\rho}^{max} > \rho_\infty > \rho(H_{ksm})$.

□

Пусть $\alpha = 1/\rho(H_{ksm})$, $m = s+2$. Пусть A — событие, заключающееся в том, что $G(N, N^{-\alpha})$ не содержит подграфов на не более чем $|V(H_{ksm})|$ вершинах с плотностью большей $1/\alpha$. По лемме **1**

$$A \rightarrow [(G(N, N^{-\alpha}) \models \varphi_{ksm}) \rightarrow (H_{ksm} \subset G(N, N^{-\alpha}))].$$

Выше мы сказали, что, запрещая в формуле φ_{ksm} проведение некоторых рёбер между вершинами гантели, мы а.п.н. не теряем того свойства, что формула остаётся истинна всегда, когда $G(N, N^{-\alpha})$ содержит H_{ksm} . Действительно, так как добавление дополнительных рёбер делает H_{ksm} плотнее, чем $1/\alpha$, то получаем

$$A \rightarrow [(H_{ksm} \subset G(N, N^{-\alpha})) \rightarrow (G(N, N^{-\alpha}) \models \varphi_{ksm})].$$

По теореме 1 $P(A) \rightarrow 1$, поэтому а.п.н.

$$(H_{ksm} \subset G(N, N^{-\alpha})) \leftrightarrow (G(N, N^{-\alpha}) \models \varphi_{ksm}).$$

Отсюда и из теоремы 2 следует

Теорема 10. *Закон нуля или единицы для языка \mathcal{L}^3 нарушается в точках $\alpha = \frac{m+3+(2+m)k}{m+4+(3+m)k}$, $m \geq 3$, $k \geq 0$. У языка \mathcal{L}^3 есть предельные точки в любой левой полукрестности единицы.*

3.3 Иррациональные α

Первой нашей гипотезой о иррациональных α было то, что для них $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы для языка $\mathcal{L}_{\omega, \infty}^3$ в некоторой левой полуокрестности единицы.

Законы нуля или единицы обычно доказывают, пользуясь его критерием в терминах теории игр.

Определим игру *k-Pebble* на графах G, H с n раундами. Даны два графа, G, H и количество раундов n . Изначально у игроков есть два одинаковых набора по k различных фишек, на обоих графах фишек нет. Игра состоит в том, что два игрока, Новатор и Консерватор, по очереди перемещают фишки по вершинам графов.

Раунд играется так. Первым ходит Новатор. Он выбирает граф и либо выкладывает на одну из его вершин одну из имеющихся фишек, либо перемещает одну из фишек, лежащих на графе. Далее Консерватор берёт копию фишки, которую перемещал Новатор, и перемещает(выкладывает) её на оставшемся графе. Если после этого в графе G вершины, на которых стоят фишки i и j , соединены ребром тогда и только тогда, когда соединены ребром вершины графа H , на которых стоят копии этих фишек, то начинается следующий раунд. Иначе побеждает Новатор. Если Новатор не выиграл за n раундов, то игра заканчивается победой Консерватора.

Теорема 11. [16] *Случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ подчиняется закону нуля или единицы для языка $\mathcal{L}_{\omega, \infty}^k$ тогда и только тогда, когда вероятность того, что в игре *k-Pebble* на графах $G(n, n^{-\alpha}), G(m, m^{-\alpha})$ с бесконечным числом раундов у Консерватора есть выигрышная стратегия (Консерватор может играть бесконечно) стремится к 1 при $n, m \rightarrow \infty$.*

Поскольку диаметр графа $G(N, N^{-\alpha})$, $\alpha \in (2/3, 1)$ а.п.н. равен $d \in (\frac{1}{1-\alpha}, \frac{2-\alpha}{1-\alpha})$ [18], то есть стремится к бесконечности при $\alpha \rightarrow 1 - 0$, то кажется, что у Консерватора а.п.н. должна быть выигрышная стратегия в игре 3-Pebble. Однако мы не смогли продвинуться в этом направлении и решили попробовать доказать обратное.

Одним из способов доказать отсутствие закона нуля или единицы при некотором α для языка с предложениями бесконечной длины, в случае, когда свойство содержать подграф с плотностью $1/\alpha$ напрямую не выразимо в этом языке (что, разумеется, и имеет место, если α иррационально), состоит в следующем. Строится последовательность $\{H_l\}_{l=1}^{\infty}$ строго сбалансированных графов, $|V(H_{k+1})| > |V(H_k)|$, плотности которых приближаются слева к $1/\alpha$. Обозначим $v_l = |V(H_l)|$. Свойство, вероятность обладать которым не сходится ни к нулю, ни к единице (а, точнее, вообще не сходится), формулируется так: “Если $H_{l^{max}}$ — наибольший из графов из $\{H_l\}_{l=1}^{\infty}$, имеющих копию в $G(N, N^{-\alpha})$, то $v^{max} = v_{l^{max}} \in A = \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_{2i-1}, a_{2i}]$ ”. Или, говоря другими словами, число вершин v^{max} наибольшего графа из нашей последовательности, содержащегося в случайном графе $G(N, N^{-\alpha})$, принадлежит объединению некоторых интервалов, подобранных таким образом, чтобы с ростом N вероятность попадания v^{max} в это объединение колебалась между нулём и единицей.

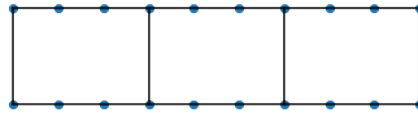


Рис. 5. Первый блок

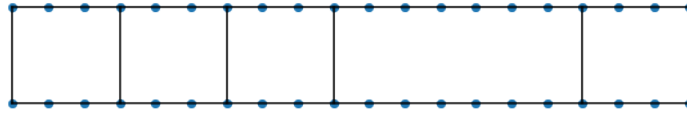


Рис. 6. Два блока

Действительно, поскольку все графы из $\{H_l\}_{l=1}^{\infty}$ имеют $\rho^{max} < 1/\alpha$, то для каждого $l \in \mathbb{N}$ вероятность того, что $H_l \subset G(N, N^{-\alpha})$ стремится к единице при $N \rightarrow \infty$, однако любой подграф случайного графа $G(N, N^{-\alpha})$ имеет не более N вершин. Поэтому для больших N случайный граф с высокой вероятностью содержит копии графов H_l , $l < l_N$, где l_N растёт с ростом N , но с вероятностью 1 не содержит копий H_l таких, что $v_l > N$. Сходимость плотностей к $1/\alpha$ необходима для того, чтобы при добавлении в H_l новых рёбер ρ^{max} становилась больше $1/\alpha$, что, в свою очередь, нужно для того, чтобы сопоставить графу H_l формулу $\varphi_l \in \mathcal{L}^k$, которая верна (с вероятностью стремящейся к единице) только когда $G(N, N^{-\alpha})$ содержит копию H'_l , $l' \geq l$ (для этого при доказательстве теоремы 10 нужна была лемма 1).

Теперь добавим конкретики в предыдущие рассуждения и докажем, что закон нуля или единицы нарушается в некоторых иррациональных точках.

Рассмотрим граф, изображённый на Рис. 5. Обозначим его H_1 .

Если присоединить к нему кусочек, как на рисунке 6, то плотность и максимальная плотность графа не изменятся.

Можно присоединить 9 кусочков, увеличив число рёбер и вершин в десять раз, затем добавить (или не добавлять) одно ребро. Получившийся граф будет иметь вид, как граф на рисунке 7.

Таким способом можно увеличивать число рёбер и вершин в 10^k раз и добавлять ребро. Последовательность плотностей графов будет стремиться к бесконечной аperiодической десятичной дроби.

Граф состоит из примыкающих друг к другу секций (кусочков), поэтому для записи формулы, выражающей существование этого или более плотного графа, до-

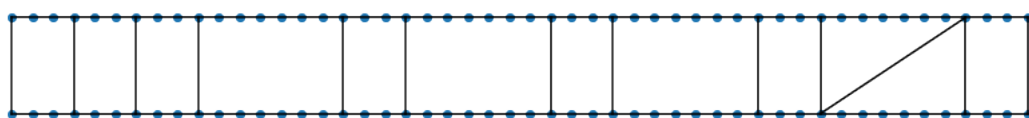


Рис. 7. Несколько блоков и дополнительное ребро

статочны столько переменных, сколько нужно, чтобы выразить существование наибольшей из секций.

Пусть $1/\alpha$ — иррациональное число вида $1.1\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная аperiodическая последовательность нулей и единиц. Например, $1/\alpha = 1.101001000100001\dots$. Определим для каждого $l \in \mathbb{N}$ граф H_l следующим образом. Для $l = 1$ граф H_1 с плотностью $\rho(H_1) = \rho^{max}(H_1) = 22/20 = 1.1$ уже определён. Пусть $l > 1$. С помощью приёма, описанного выше, увеличим число рёбер и вершин графа H_1 в 10^{l-1} раз и дополнительно добавим $[2 \cdot (1/\alpha - 1.1) \cdot 10^l]$ рёбер. Здесь необходимо выбрать такое правило добавления дополнительных рёбер, чтобы была справедлива лемма 2. Пока оставим эту техническую проблему в стороне и двинемся дальше, считая, что условие леммы 2 выполнено.

Лемма 2. $\forall l \in \mathbb{N}$ граф H_l строго сбалансирован.

Аналогично тому, как в разделе 3.2 для графа H_{kstm} была определена формула φ_{kstm} , определим для графа H_l формулу φ_l . Мы не описываем здесь точный вид этой формулы, поскольку нам от неё важно лишь то, чтобы она была а.п.н. верна, если случайный граф содержит H_l , удовлетворяла лемме 3 и записывалась с помощью равномерно ограниченного по l числа переменных. При этом представить себе формулу, удовлетворяющую первому и последнему требованиям, несложно, а лемма 3 нами не доказана, но мы считаем, что её утверждение довольно естественно.

Лемма 3. Если для графа G истинна φ_l , и G не содержит подграфа, изоморфного H_l , то G содержит более плотный подграф с меньшим числом вершин.

Следующий шаг состоит в построении множества интервалов $\{[a_{2i}, a_{2i+1}] \mid i \in \mathbb{N}\}$. Будем строить его таким образом, чтобы $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$.

Из теоремы 1 следует, что для любого v существует число N_v такое, что $G(N_v, N_v^{-\alpha})$ содержит копию любого графа с $\rho^{max} < 1/\alpha$ на не более чем v вершинах с вероятностью > 0.99 . По лемме 2 максимальная плотность всех графов из $\{H_l\}_{l=1}^{\infty}$ меньше $1/\alpha$. Тогда с вероятностью > 0.99 при $N \in [N_{v_1}, 10N_{v_1}]$ наибольший граф из $\{H_l\}_{l=1}^{\infty}$, имеющий копию в $G(N, N^{-\alpha})$, имеет вершин $v^{max} \in [v_1, 10N_{v_1}]$. Положим $a_1 = v_1$, $a_2 = 10N_{v_1}$. Далее, при $N \in [N_{100N_{v_1}}, 10N_{100N_{v_1}}]$ с вероятностью > 0.99 выполнено $v^{max} \in [100N_{v_1}, 10N_{100N_{v_1}}]$ — этот интервал не будем включать в A . Зато включим в A отрезок $[a_3, a_4] = [10N_{100N_{v_1}}, 10N_{10N_{100N_{v_1}}}]$: в него, с вероятностью > 0.99 попадает v^{max} при $N \in [N_{10N_{100N_{v_1}}}, 10N_{10N_{100N_{v_1}}}]$. И так продолжаем до бесконечности.

Пусть теперь N'_v — такое число, что при $N = N'_v$ случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ с вероятностью > 0.99 не содержит графов на не более чем v вершинах с $\rho^{max} > 1/\alpha$. Если положить $\mathbf{N}_v = \max\{N_v, N'_v\}$, и заменить в рассуждении выше N_v на \mathbf{N}_v , то с помощью полученных таким образом интервалов можно построить формулу, вероятность истинности которой не будет иметь предела в $[0, 1]$. Действительно, при $N > \mathbf{N}_V$ по лемме 3 с вероятностью, превышающей 0.99, свойство содержать H_l равносильно истинности φ_l . В последовательности $\{H_l\}_{l=1}^{\infty}$ между индексами l и числом

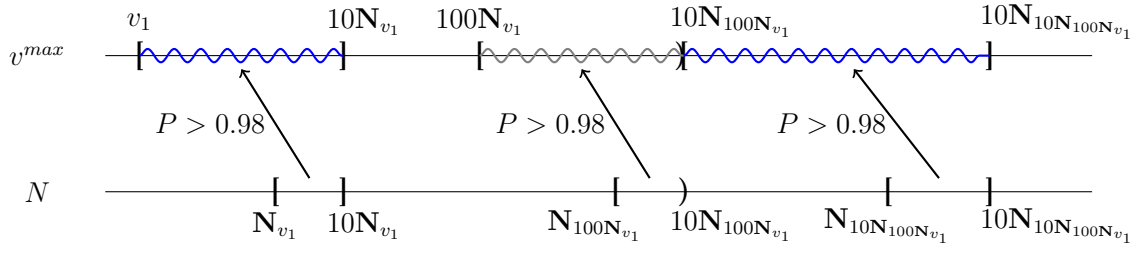


Рис. 8. На верхней оси изображены интервалы $[a_i, a_{i+1}] \subset A$ (выделены голубым) и интервалы, исключенные из A (выделены серым). На нижней оси изображены интервалы числа вершин случайного графа $G(N, N^{-\alpha})$, на которых v^{max} с высокой вероятностью принадлежит соответствующим интервалам на верхней оси

вершин v_l существует однозначное соответствие и, по построению, $v_{l+1} = 10v_l$. Интервалы, входящие в A , а также интервалы, которые мы намеренно исключили из A , строились таким образом, чтобы их нижние границы отличались от верхних в 10 раз, поэтому для каждого из этих интервалов существует индекс l такой, что v_l попадает в интервал. Поэтому объединению интервалов числа вершин A соответствует множество индексов L такое, что вероятность истинности формулы

$$\bigvee_{l \in L} \varphi_l \wedge \neg \varphi_{l+1}$$

не имеет предела в $[0, 1]$.

В этом рассуждении остаются пробелы в виде доказательств лемм 2, 3. Если бы они были устранены, мы бы доказали, что в любой левой полуокрестности единицы существует иррациональное α , для которого нарушается закон нуля или единицы для языка $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^k$ при некотором k порядка 10. Далее можно было бы оптимизировать конструкцию, уменьшив число переменных в формуле φ_l и доказать это утверждение для k близкого или равного трём.

4 Заключение

Наши знания о спектрах формул с ограниченным числом переменных, как и с ограниченной кванторной глубиной, на данный момент далеко не полны. Целью данной работы было обогащение знаний о спектрах формул с ограниченным числом переменных, и, в особенности, о спектрах формул с тремя переменными. В работе были получены новые результаты о предельных точках спектров формул языков \mathcal{L}^3 и $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^3$. Эти результаты связаны с исследованием сходимости вероятности того, что случайный граф $G(N, N^{-\alpha})$ обладает некоторым свойством при рациональных α . Для иррациональных α была исследована возможность доказательства отсутствия закона нуля или единицы для языков $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^k$ с помощью конструкций вида цепочки. Вопрос о том, существуют ли иррациональные α , для которых нарушается закон нуля или единицы для языка $\mathcal{L}_{\infty, \omega}^3$, остаётся открытым. При его дальнейшем изучении могут быть приняты во внимание наработки, сделанные в этой работе.

Список литературы

- [1] Максим Евгеньевич Жуковский and Андрей Михайлович Райгородский. Случайные графы: модели и предельные характеристики. *Успехи математических наук*, 70(1 (421)):35–88, 2015.
- [2] Николай Константинович Верещагин and Александр Шень. *Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. Учебное пособие*. МЦНМО, 2013.
- [3] Pál Erdős and Alfréd Rényi. On the evolution of random graphs. *Selected Papers of Alfréd Rényi*, 2:482–525, 1976.
- [4] Andrzej Rucinski and Andrew Vince. Balanced graphs and the problem of subgraphs of random graphs. *Congr. Numer*, 49:181–190, 1985.
- [5] Béla Bollobás. Threshold functions for small subgraphs. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 90, pages 197–206. Cambridge University Press, 1981.
- [6] Andrzej Ruciński and Andrew Vince. Strongly balanced graphs and random graphs. *Journal of graph theory*, 10(2):251–264, 1986.
- [7] Saharon Shelah and Joel Spencer. Zero-one laws for sparse random graphs. *Journal of the American Mathematical Society*, 1(1):97–115, 1988.
- [8] Kevin J Compton. Laws in logic and combinatorics. In *Algorithms and order*, pages 353–383. Springer, 1989.
- [9] Joel Spencer. *The strange logic of random graphs*, volume 22. Springer Science & Business Media, 2013.
- [10] Paul Erdős and Alfréd Rényi. On random graphs, i. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, 6:290–297, 1959.
- [11] Paul Erdős and Alfréd Rényi. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci*, 5(1):17–60, 1960.
- [12] Андрей Михайлович Райгородский. Модели случайных графов и их применения. *Труды Московского физико-технического института*, 2(4):130–140, 2010.
- [13] James F Lynch. Infinitary logics and very sparse random graphs. In *[1993] Proceedings Eighth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 191–198. IEEE, 1993.
- [14] Saharon Shelah. Failure of 0-1 law for sparse random graph in strong logics. *arXiv preprint arXiv:1706.01226*, 2017.

-
- [15] M McArthur. The asymptotic behavior of $l_{\infty, \omega}^k$ on sparse random graphs. *Logic and random structures*, 33:53–63, 1997.
 - [16] Maksim Zhukovskii. Zero-one k-law. *Discrete Mathematics*, 312(10):1670–1688, 2012.
 - [17] AS Razafimahatratra and M Zhukovskii. Zero–one laws for k-variable first-order logic of sparse random graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 2019.
 - [18] Béla Bollobás and Bollobás Béla. *Random graphs*. Number 73. Cambridge university press, 2001.