

## 1. Описание метода. Расчётные формулы.

Метод Ньютона полагается на составление полинома  $n$ -ой степени по  $n$  узлам интерполяции, причём каждая следующая точка не зависит от предыдущих, что позволяет увеличивать полином без полной перестройки.

Общая формула полинома:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k] e_k(x)$$

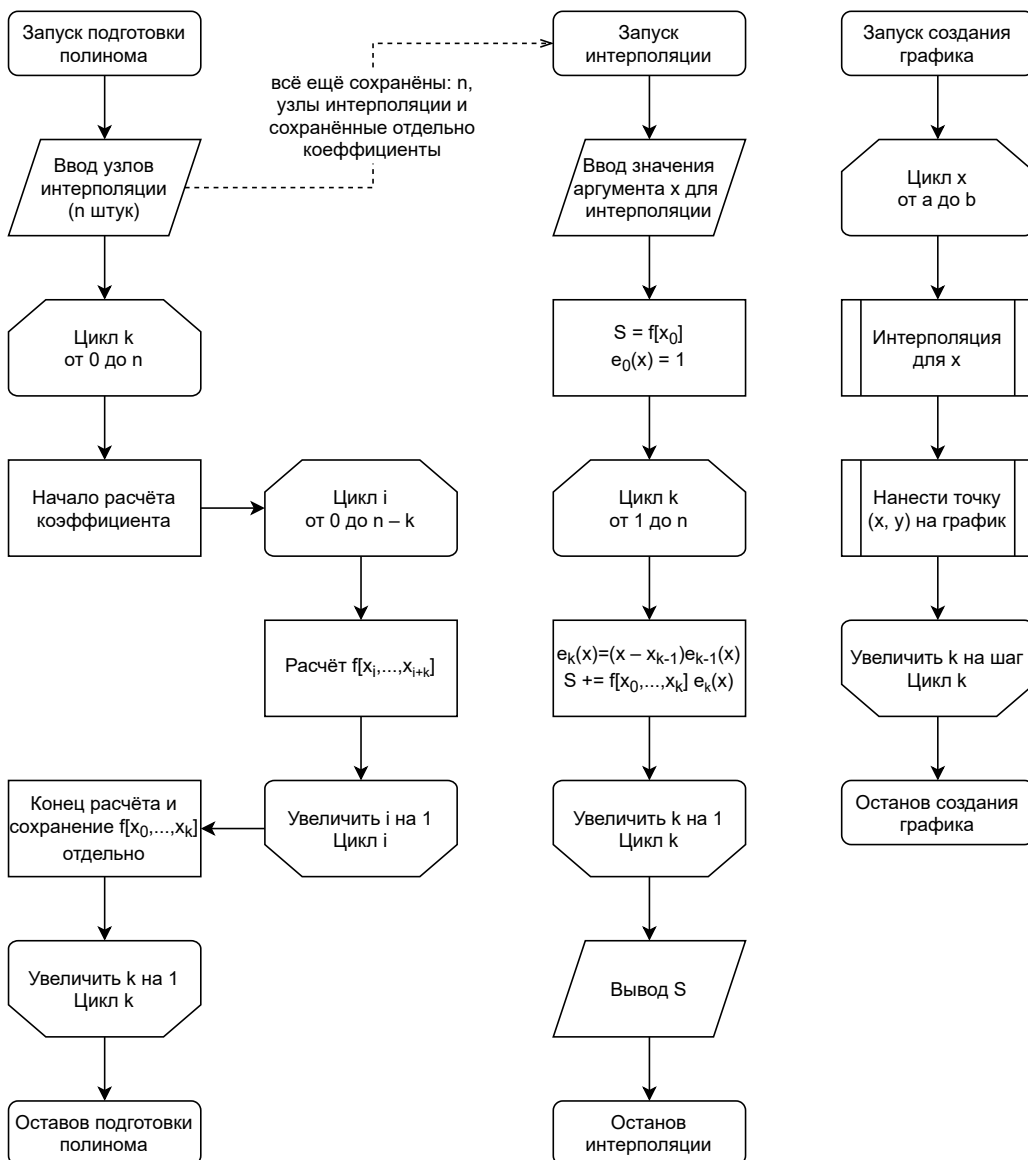
Где  $f[x_0, \dots, x_k]$  — разделённая разность, определённая рекурсивной формулой:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}, x_k] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{k-1}, x_k] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_i}; \quad f[x_i] = f(x_i); \quad \text{где } 0 \leq i < k < n$$

А  $e_k(x)$  определяется формулой:

$$e_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i); \quad \text{но } e_0(x) = 1$$

## 2. Блок-схема



### 3. Листинг численного метода

```
class Interpolator:
    def interpolate_one(self, xi: Decimal) -> Decimal:
        raise NotImplementedError()

    def interpolate_row(self, xs: Row) -> Row:
        return xs.map(self.interpolate_one)

class LagrangeInterpolator(Interpolator):
    def _coefficient(self, index: int, xs: Row, ys: Row):
        index += 1
        result: Decimal = Decimal()
        for i in range(index):
            divider = Decimal(1)
            for k in range(index):
                if k != i:
                    divider *= xs[i] - xs[k]
            result += ys[i] / divider
        return result

    def __init__(self, xs: Row, ys: Row):
        self.size: int = xs.size
        self.xs: Row = xs
        self.coefficients = [self._coefficient(i, xs, ys) for i in range(self.size)]

    def interpolate_one(self, xi: Decimal) -> Decimal:
        result: Decimal = Decimal()
        multiplier = Decimal(1)
        for i in range(self.size):
            result += multiplier * self.coefficients[i]
            multiplier *= xi - self.xs[i]
        return result

class NewtonInterpolator(Interpolator):
    def _coefficients(self, xs: Row, ys: Row) -> list[Decimal]:
        dynamic: list[list[Decimal]] = [[y for y in ys]]
        result: list[Decimal] = [dynamic[-1][0]]

        for k in range(1, xs.size):
            dynamic.append([])
            for i in range(xs.size - k):
                dynamic[-1].append((dynamic[-2][i + 1] - dynamic[-2][i])
                                    / (xs[i + k] - xs[i]))
            result.append(dynamic[-1][0])

        return result

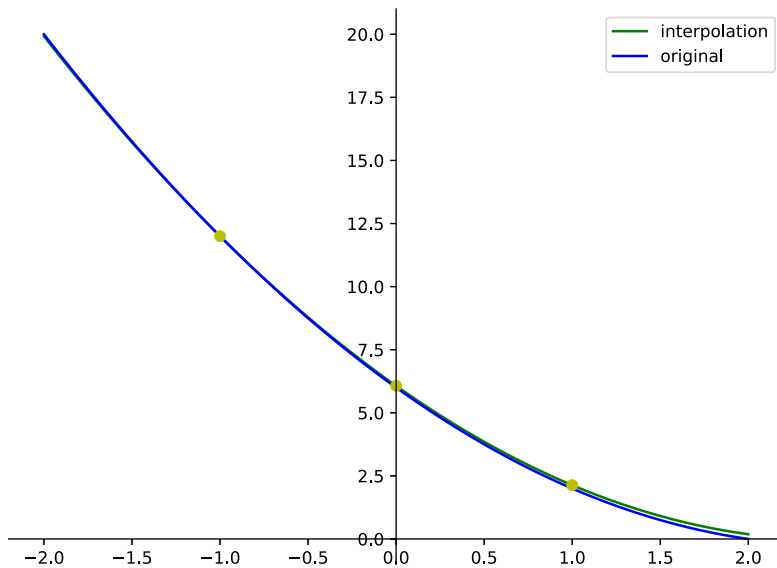
    def __init__(self, xs: Row, ys: Row):
        self.size: int = xs.size
        self.xs: Row = xs
        self.coefficients = self._coefficients(xs, ys)

    def interpolate_one(self, xi: Decimal) -> Decimal:
        result: Decimal = Decimal()
        multiplier = Decimal(1)
        for i in range(self.size):
            result += multiplier * self.coefficients[i]
            multiplier *= xi - self.xs[i]
        return result
```

## 4. Примеры работы программы

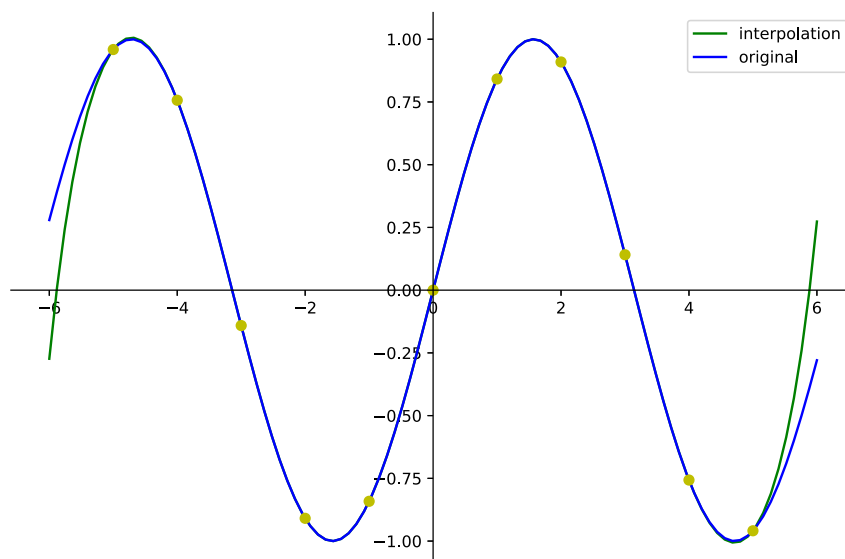
### Пример 1 (квадратичная функция с шумом)

- Исходная функция:  $y = x^2 - 5x + 6$
- Узлы интерполяции:  $(-1; 12)$ ,  $(0; 6.06926668129476887)$ ,  $(1; 2.13192824885710452)$
- Полученный полином:  $P_3(x) = 12 - 5.9307(x + 1) + 0.9968(x + 1)x$
- Полученный график:



### Пример 2 (синусоида без шума)

- Исходная функция:  $y = \sin x$
- Узлы интерполяции:  $(-5; 0.96)$ ,  $(-4; 0.76)$ ,  $(-3; -0.14)$ ,  $(-2; -0.91)$ ,  $(-1; -0.84)$ ,  $(0; 0)$ ,  $(1; 0.84)$ ,  $(2; 0.91)$ ,  $(3; 0.14)$ ,  $(4; -0.76)$ ,  $(5; -0.96)$
- Коэффициенты полинома:  $0.96, -0.2, -0.35, 0.14, 0, -0.01, 0, 0, 0, 0$
- Полученный график:



## 5. Вывод

Выполнив эту работу я изучил два из трёх предложенных методов интерполирования, методы Лагранжа и Ньютона (иначе называемые интерполяционными полиномами), краткое сравнение всех трёх:

- Метод Лагранжа: более простой в подсчёте и более быстрый на простых функциях. Однако метод плохо справляется с добавлением новых коэффициентов (необходимо перестроить весь полином и сложность значительно возрастает с ростом количества точек)
- Метод Ньютона: сложнее при изначальном расчёте коэффициентов, но зато позволяет проще добавлять новые точки (предыдущие не зависят от старых), однако шум всё ещё существенно влияет на весь полином
- Метод Кубических Сплайнов: сильно отличается от двух других, что, с одной стороны, позволяет значительно снизить его сложность для настройки и повысить точность (в частности это заметно при большом количестве точек), а с другой стороны значительно усложняет его реализацию

Также в этой лабораторной работе я научился аппроксимировать функции через метод наименьших квадратов (ибо подумал, что это обязательное дополнение ко всем вариантам, а не отдельный вариант). Аппроксимация даёт гораздо меньшую точность, но как проста в реализации, так и хороша по скорости расчёта и будет использоваться когда точность нужна минимальная или характер зависимости известен заранее.

Сложности приведённых алгоритмов:

- Метод Лагранжа: подготовка:  $O(n^2)$ , расчёт одной точки:  $O(n)$
- Метод Ньютона: подготовка:  $O(n^2)$ , расчёт одной точки:  $O(n)$
- Метод Сплайнов: подготовка:  $O(n)$ , расчёт одной точки:  $O(1)$