⊛ each job to exactly one machine: like we did, $r_{i,j}$

$$MAX = \max_{i \in M} \sum_{j \in J} t_{i,j}$$ } המקסימום זמן אילו כל ה- jobs היו רצים על מכונה אחת

שיפור: אנחנו מחשבים את max עם greedy alg, מקבל כפי-אופט את אותו היקום

for each $i \in M$: Boolean variables: $q_{i,0}, q_{i,1}, \ldots, q_{i,MAX-1}$ } Time Ticks

$q_{i,k}$ = true : מכונה i רצה ב- time tick k

Constraints:

execution time of each machine:

Machine runs jobs for x time: $q_{i,0}, \ldots, q_{i,x-1}$ } true ; $q_{i,x}, \ldots, q_{i,MAX-1}$ } false   1111, 00000

⇓

בפרדיקטים המתאימים: $q_{m,k} \rightarrow q_{m,k-1}$, $!q_{m,k} \rightarrow !q_{m,k+1}$ ← מיותר?

Beginning time of each job:

For each j: $S_{j,0}, S_{j,1}, \ldots, S_{j,MAX-1}$

$S_{j,k} = 1 \longrightarrow$ job j starts running (on some machine) at time tick k

⊛ פרדיקטים שרק $S_{j,k}$ אחד יהיה 1 והשאר יהיו 0, באופן דומה ל- hard constraints

⊛ connect machine times ticks (q) and job starts times (S):

For each machine $i \in M$, job $j \in J$, and $k \in \{0, \ldots, MAX - t_{i,j}\}$, add constraint:

$$r_{i,j} \wedge S_{j,k} \longrightarrow q_{i,k} \wedge q_{i,k+1} \wedge \ldots \wedge q_{i,k+t_{i,j}-1}$$

$r_{i,j}$: machine i runs on job j

$S_{j,k}$: job j starts at time tick k

Executions time are unique:

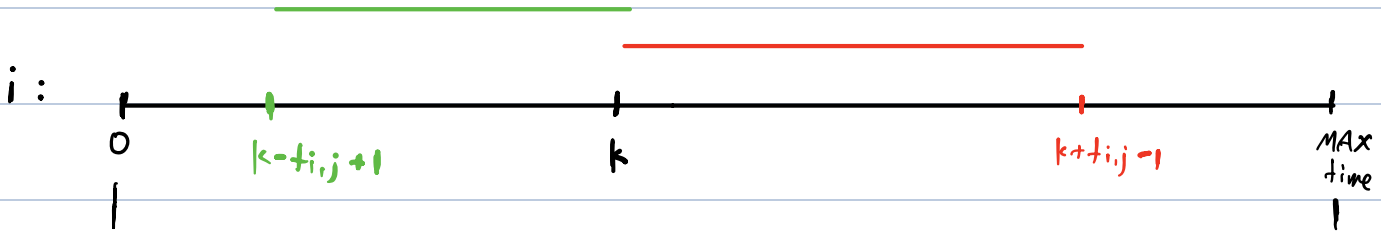
jobs can't run in parallel on any machine:

For $i \in M$, $j_1, j_2 \in J$ $(j_1 \neq j_2)$, $k \in \{0, \ldots, MAX - t_{i,j}\}$:

$$r_{i,j_1} \wedge r_{i,j_2} \wedge s_{j_1,k} \longrightarrow !s_{j_2,k} \wedge !s_{j_2,k+1} \wedge \ldots \wedge !s_{j_2,k+t_{i,j}-1}$$

For $i \in M$, $j_1, j_2 \in J$ $(j_1 \neq j_2)$, $k \in \{t_{i,j}-1, \ldots, MAX-1\}$:

$$r_{i,j_1} \wedge r_{i,j_2} \wedge s_{j_1,k} \longrightarrow !s_{j_2,k} \wedge !s_{j_2,k-1} \wedge \ldots \wedge !s_{j_2,k-t_{i,j}+1}$$



Soft Clauses:

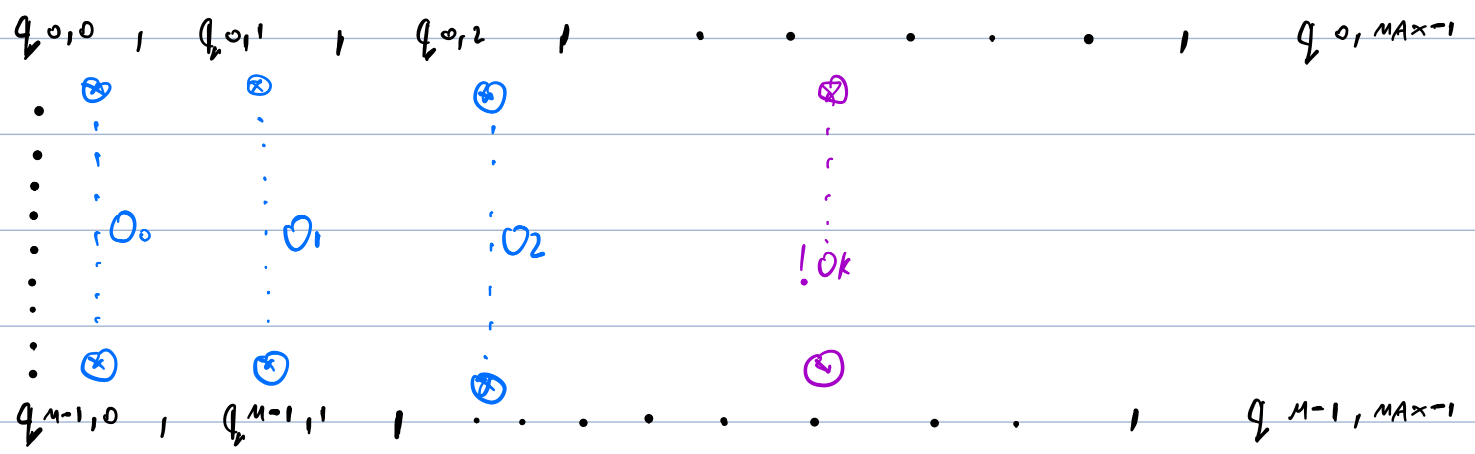
New variable for every time tick:

for every $k \in \{0, 1, \ldots, MAX-1\}$ add new variable O_k:

$$O_k \longleftrightarrow \bigvee_{i \in M} s_{i,k}$$

O_k true $\longleftrightarrow$ at least one machine runs some job at time tick k

⊗ $!O_k$ is a soft clause with weight 1.



Optimal solution: opt

Makespan: MAX - opt

$$\min \sum_{\substack{\text{time ticks that} \\ \text{at least one} \\ \text{machine works}}} = \min \sum O_k = \max \sum !O_k =$$ למקסם את ה-clauses weight of

$\sum !O_k = opt$: כמה שעונים ריקים

$MAX - opt$: כמה זמן סה"כ לקח

סך הכל משתנים:

$r_{i,j}$ } $M \cdot J$ variables

$q_{i,k}$ } $M \cdot MAX$ variables

$s_{j,k}$ } $J \cdot MAX$ variables

O_k } MAX variables

$r_{i,j} = j \cdot M + i$ $+1$

$q_{i,j} = M \cdot J + k \cdot MAX + i$ $+1$

$s_{j,k} = \overset{15}{M \cdot J} + \overbrace{M \cdot MAX}^{69} + k \cdot MAX + j$ $+1$

$O_k = M \cdot J + M \cdot MAX + J \cdot MAX + k$ $+1$

הפוך:

$(r_{ij}\ index - 1) \ / \ M = j$

$r_{ij}\ index - 1 - M \cdot j = i$

	j_0	j_1	j_2	j_3	j_4	
m_0	4 ($r_{0,0}=1$)	1 (4)	9 (7)	3 (10)	2 (13)	$max(m_0) = 19$
m_1	3 (2)	6 (5)	7 (8)	2 (11)	1 (14)	$max(m_1) = 19$
m_2	5 (3)	2 (6)	9 (9)	1 (12)	6 (15)	$max(m_2) = 23$

$MAX = 23$

1 2 3 0

4 5 6 0

⋮

13 14 15 0

-1 -2 0

-2 -3 0

-1 -3 0

⋮

$$J + \frac{J \cdot M \cdot (M-1)}{2}$$

$r_{i,j} = 8,\ r_{i,j_2} = 14$

-8 -14

שורה אחת לפי constraints:

$$M \cdot \frac{(MAX)(MAX-1)}{2}$$

16 -17 0

17 -18 0

⋮

83 -84 0

בכל

~~16 -17 0~~

~~⋮~~

~~83 -84 0~~

לא כולל: 39 38-, 62 61-

m_0: $q_{0,0}$ [16], ..., $q_{0,22}$ [38]

m_1: $q_{1,0}$ [39], ..., $q_{1,22}$ [61]

m_2: $q_{2,0}$ [62], ..., $q_{2,22}$ [84]

$$J + \frac{J \cdot (MAX) \cdot (MAX-1)}{2}$$ (כתוב בבדיקה):

85 ..... 107 0

108 ..... 130 0

-85 -86 0

-86 -87 0

-85 -87 0

⋮

j_0: $S_{0,0}$ [85] ... $S_{0,22}$ [107]

j_1: $S_{1,0}$ [108] ... $S_{1,22}$ [130]

j_2: $S_{2,0}$ [131] ... $S_{2,22}$

j_3: $S_{3,0}$ [154] ... $S_{3,22}$

j_4: $S_{4,0}$ [177] ... $S_{4,22}$

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_n \longrightarrow y_1 \wedge \dots \wedge y_m$$

$$\Downarrow$$

$$\neg(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) \vee (y_1 \wedge \dots \wedge y_m)$$

De Morgan $\Downarrow$

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \dots \neg x_n) \vee (y_1 \wedge \dots \wedge y_m)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(\neg x_1 \vee \dots \vee \neg x_n \vee y_1) \wedge (\neg x_1 \vee \dots \vee \neg x_n \vee y_2) \wedge \dots \wedge (\neg x_1 \vee \dots \vee \neg x_n \vee y_m)}$$

$$r_{i,j} \wedge s_{j,k} \longrightarrow q_{i,k} \wedge q_{i,k+1} \wedge \dots \wedge q_{i,k+t_{i,j}-1} \quad : \Big] M \cdot J \cdot \big(\Sigma \, \overbrace{MAX - t_{i,j}}^{k}\big)$$

$$(\neg r_{i,j} \vee \neg s_{j,k} \vee q_{i,k}) \wedge \dots \wedge (\neg r_{i,j} \vee \neg s_{j,k} \vee q_{i,k+t_{i,j}-1})$$

$$M \cdot J \cdot \big(\Sigma\,(MAX - t_{i,j}) \cdot (t_{i,j})\big)$$

$-r_{0,0}$ $-s_{0,0}$ $q_{0,0}$

$$r_{i,j_1} \wedge r_{i,j_2} \wedge s_{j,k} \longrightarrow \neg s_{j_2,k} \wedge \neg s_{j_2,k+1} \dots \wedge s_{j_2,k+t_{i,j}-1} :$$

$$(\neg r_{i,j_1} \vee \neg r_{i,j_2} \vee \neg s_{j,k} \vee \neg s_{j_2,k}) \wedge \dots \wedge (\neg r_{i,j_1} \vee \neg r_{i,j_2} \vee \neg s_{j,k} \vee \neg s_{j_2,\boxed{k+t_{i,j}-1}})$$

$\boxed{k - t_{i,j} + 1}$

ב clauses שונים כמו בסעיף, בלולאות שונים

$-r_{0,1}$ $-r_{0,0}$ $-s_{1,0}$ $s_{0,0}$

-4 -1 -108 85

Soft Clauses:

for each $k \in \{0, \ldots, MAX-1\}$

$O_k \longrightarrow q_{0,k} \vee \ldots \vee q_{MAX-1,k}$:

$$\neg O_k \vee q_{0,k} \vee \ldots \vee q_{M-1,k}$$

$O_k \longleftarrow q_{0,k} \vee \ldots \vee q_{MAX-1,k}$:

$$(\neg q_{0,k} \vee O_k) \wedge \ldots \wedge (q_{M-1,k} \vee O_k)$$

תוספת לרדוקציה-

מה שקורה זה שה-max-solver מתחרפן ובוחר ו-$S_{i,MAX-1}$ וככה אין

חובה של ה- time ticks (q), כשבפועל לא הגיוני שה-job יתחיל בנק' זמן הזו

$r_{i,j} \wedge S_{j,k} \longrightarrow q_{i,k} \wedge q_{i,k+1} \wedge \ldots \wedge q_{i,k+t_{i,j}-1}$

if ($k + t_{i,j} - 1 > MAX-1$)

$$S_{j,k} \longrightarrow \neg r_{i,j}$$

בדרך שבה מימשנו: סביר $k \in [MAX - P[i][j] + 1, MAX-1]$:

$$S_{j,k} \longrightarrow \neg r_{i,j}$$

$$\equiv$$

$$\neg S_{j,k} \vee \neg r_{i,j}$$