Curve e Superfici per il Design
Laboratorio 5 - Curve parametriche

Prof. Nicola Parolini

21 Novembre 2019

Materiali

Nella cartella con il materiale di oggi troverete:

- Questa presentazione (`Materiale Didattico/Laboratori/lab 5/lab5_testo.pdf`);
- L'eseguibile del FranzPlot (`Software/Franzplot 19.08 - Windows.exe`)

Esercizio 1: Curve con FranzPlot - Il comando parametric curve

Sia data la seguente curva:

$$c : \begin{cases} x = cos(t) \\ y = 2sin(t) \\ z = 0.5 \end{cases}$$

con $t \in [0, 2\pi]$.
Vogliamo rappresentarla con FranzPlot attraverso l'elemento 'parametric curve'.

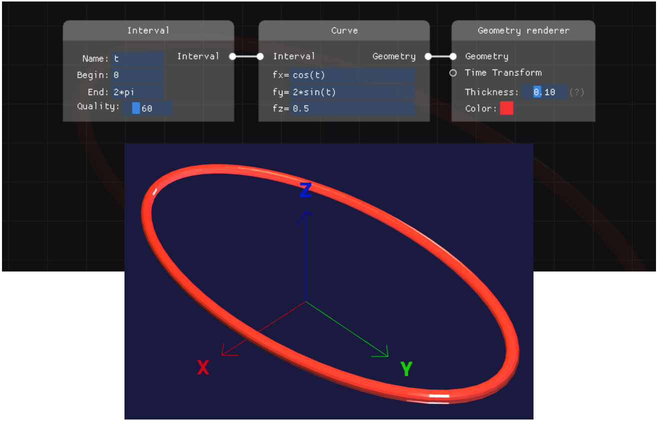
Esercizio 1 - i

Come avevamo visto nel caso del plot di rette, anche oggi faremo uso dei seguenti nodi:

- `Geometries > Curve`
- `Parameters > Interval`
- `Geometry Renderer`

A differenza della visualizzazione di una retta, questa volta sarà fondamentale assegnare i valori corretti all'inizio e la fine dell'intervallo.

Esercizio 1 - ii



Il parametro “quality” indica quanti punti saranno usati dal FranzPlot per approssimare la curva (o la superficie)

Esercizio 2: Rotazione di un punto

Sia dato il punto $P(0, 1, 1)$.

- Scrivere la generica matrice R di rotazione intorno l'asse Z.
- Applicare a P una trasformazione parametrica di rotazione intorno l'asse Z, con parametro $\theta \in [0, \pi]$, e scrivere la curva parametrica ottenuta. Di che curva si tratta?
- Rappresentare il punto P e la curva ottenuta in FranzPlot .
- Usando FranzPlot , disegnare la curva applicando al punto una matrice parametrica.

Esercizio 2 - i

La matrice che rappresenta la trasformazione parametrica è la seguente:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \theta \in [0, \pi] \tag{1}$$

Per ottenere la curva dobbiamo moltiplicarla per il vettore che contiene le coordinate del punto:

$$c(\theta) = R(\theta)P$$

Esercizio 2 - ii

Svolgendo i conti troviamo:

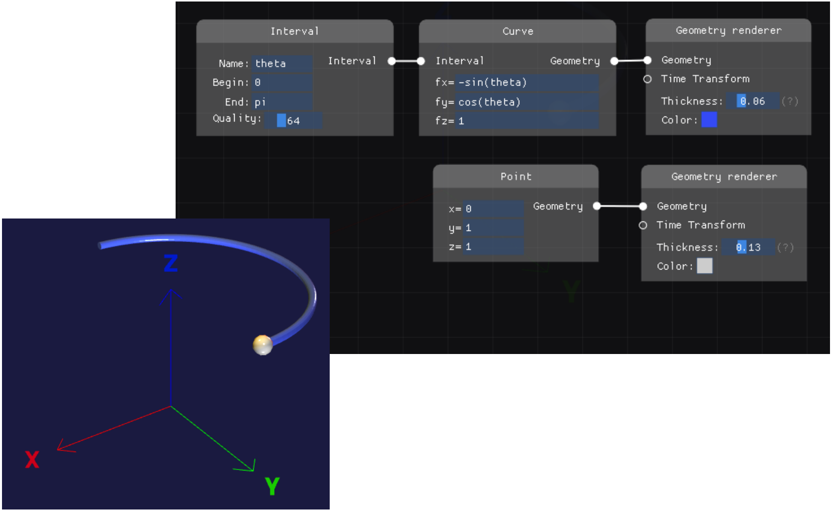
$$c(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sin(\theta) \\ cos(\theta) \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Quindi possiamo scrivere la nostra curva:

$$c(\theta) : \begin{cases} x = -sin(\theta) \\ y = cos(\theta) \\ z = 1 \end{cases} \qquad \theta \in [0, \pi]$$

Poiché θ varia da 0 a π, la curva è una semicirconferenza.

Esercizio 2 - iii



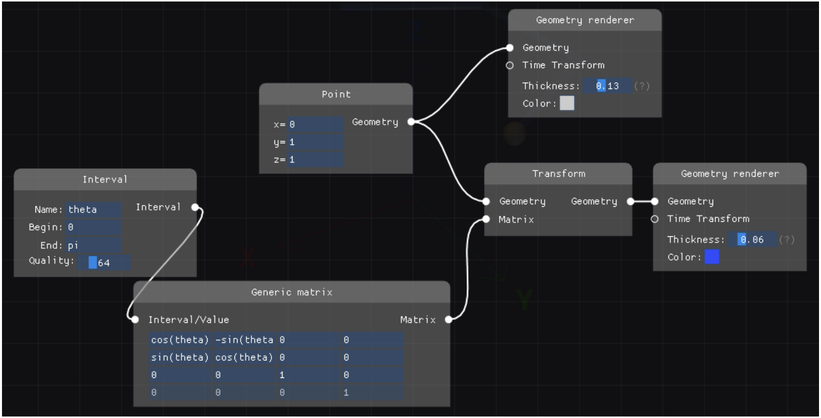
Esercizio 2 - iv

Nel FranzPlot è possibile scrivere matrici parametriche e usare il nodo `Transform` per applicare una trasformazione parametrica a una geometria 0D o 1D (punto o curva).

- Nota: non è possibile applicare trasformazioni parametriche a primitive come cubi, dadi, ecc

Per scrivere una trasformazione parametrica, è sufficiente usare il nodo `Generic Matrix`, collegare in input l'`Interval` del parametro da usare, e scrivere espressioni contenenti il parametro all'interno della matrice.

Esercizio 2 - v



Come sempre il nome del parametro è arbitrario (`theta`, `t`, `r`, sono tutti validi). L'importante é essere **consistenti**.

Esercizio 3

Sia data la seguente curva parametrica:

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = 1/2\ t \cos t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 1/2\ t \sin t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 10\pi$$

- Dire di che tipo di curva si tratta.
- Scrivere la matrice di scalatura S che abbia parametri di scalatura $S_x = 1/4$, $S_y = 1$, $S_z = 1/2$.
- Calcolare la curva $\mathcal{G}$ ottenuta applicando la trasformazione S a $\mathcal{C}$.
- Rappresentare le curve $\mathcal{C}$ e $\mathcal{G}$ in FranzPlot .
- Verificare con FranzPlot il risultato ottenuto, applicando la trasformazione S a $\mathcal{C}$.

Esercizio 3 - i

Scriviamo la matrice di scalatura richiesta:

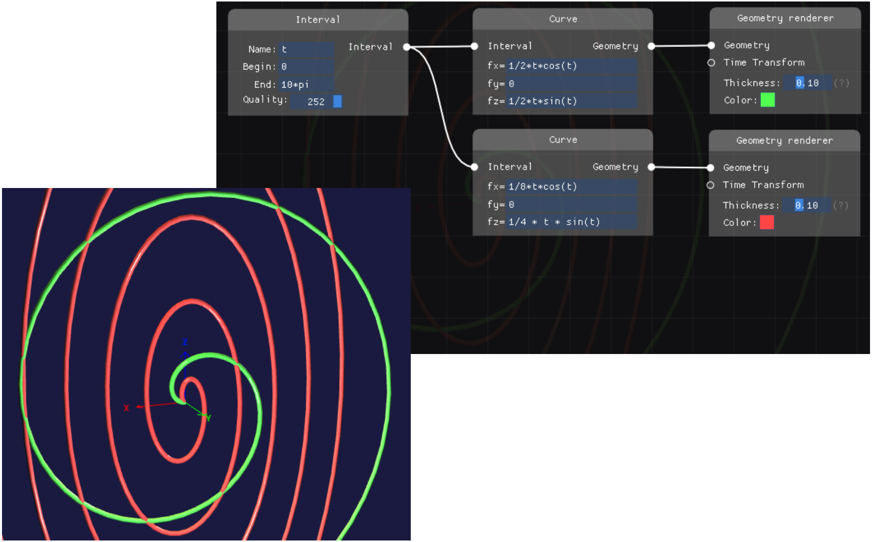
$$S = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Trattandosi di una scalatura, è immediato calcolare la curva $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}(t) : \begin{cases} x = 1/8 \ t \cos t \\ y = 0 \\ z(t) = 1/4 \ t \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 10\pi]$$

Notiamo che, poichè S è una trasformazione NON parametrica, l'oggetto trasformato è rimasto una curva.

Esercizio 3 - ii



Poichè l'intervallo è parecchio ampio, si suggerisce di settare il

Esercizio 4 - Sole/Terra/Luna

L'equazione parametrica della circonferenza (di raggio a):

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = a\sin t \\ z(t) = 0 \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

è utile anche per descrivere l'orbita dei corpi celesti.

- Ponendo il Sole al centro del sistema di riferimento, scrivere le curve che descrivono il moto della Terra e della Luna rispetto al Sole e rappresentarle su FranzPlot .
- Rappresentare il sistema Sole/Terra/Luna utilizzando punti e/o sfere e l'elemento `Time Transform`.

Esercizio 4 - i

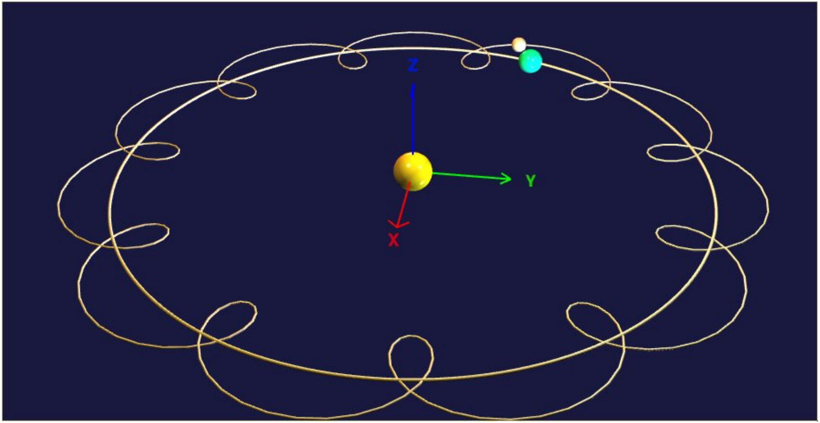
Suggerimento

Per ogni valore del parametro t, il moto della Luna rispetto al Sole può essere visto come:

$$\mathcal{C}_{LS} : \begin{cases} x(t) = x_{TS}(t) + x_{LT}(t) \\ y(t) = y_{TS}(t) + y_{LT}(t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

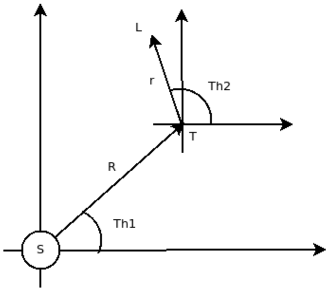
dove $x_{TS}(t)$ e $y_{TS}(t)$ indicano il moto della Terra rispetto al Sole, mentre $x_{LT}(t)$ e $y_{LT}(t)$ indicano il moto della Luna rispetto alla Terra.
Non dimentichiamoci che la Luna ruota intorno alla Terra molto più velocemente di quanto la Terra ruoti intorno al sole!
(Circa 1 mese vs 1 anno)

Esercizio 4 - risultato



Esercizio 4 - ii

Se si indica con R il raggio della circonferenza sulla quale la Terra si muove rispetto al Sole, l'equazione per descrivere il suo moto rispetto al Sole è:



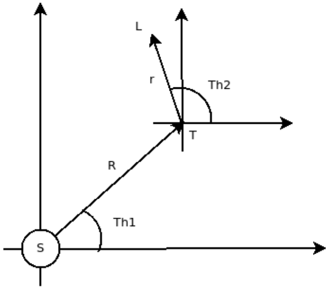
$$\mathcal{C}_{TS} : \begin{cases} x_{TS}(t) = R\cos(t) \\ y_{TS}(t) = R\sin(t) \\ z_{TS}(t) = 0 \end{cases}$$

Allo stesso modo, indicando con r il raggio della circonferenza sulla quale la Luna si muove rispetto alla Terra, l'equazione per descrivere il suo moto rispetto alla Terra (cioè se abbiamo la Terra all'origine degli assi), è:

$$\mathcal{C}_{LT} : \begin{cases} x_{LT}(t) = r\cos(kt) \\ y_{LT}(t) = r\sin(kt) \\ z_{LT}(t) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4 - iii

Questo ci permette di esprimere la posizione della Luna nel sistema di riferimento del Sole come la posizione della Terra rispetto al Sole più la posizione della Luna rispetto alla Terra (come suggerito):



$$\mathcal{C}_{LS}: \begin{cases} x(t) = R\cos(t) + r\cos(kt) \\ y(t) = R\sin(t) + r\sin(kt) \\ z(t) = 0 \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2n\pi$$

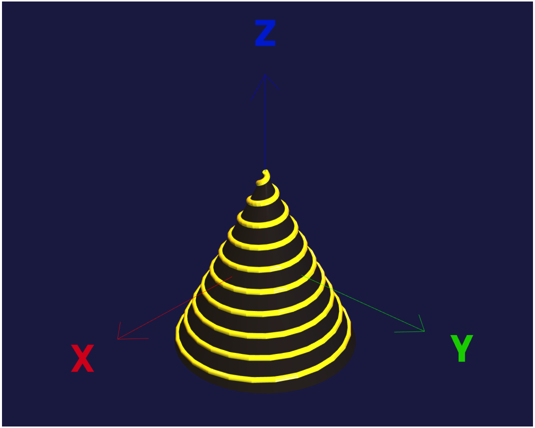
dove $n =$ numero rivoluzioni della Terra attorno al Sole.

Oss. Poich si vuole che la Luna ruoti pi velocemente della Terra dev'essere necessariamente $k > 1$. In questo modo per una stessa t la Luna avrà spazzato un angolo maggiore.

Esercizio 4 - iv

- Note le espressioni delle curve $\mathcal{C}_{TS}$ e $\mathcal{C}_{LS}$, non rimane che decidere le lunghezze dei due raggi (per i quali, per ottenere un risultato realistico, vorremmo $r < R$), e il valore di k.
- $k = 12$, ad esempio, è un valore realistico poiché come suggerito, il periodo di rivoluzione lunare è circa 1 mese, mentre il periodo di rivoluzione terrestre è circa un anno. Quindi la velocità di rotazione della Luna sarà circa 12 volte più grande di quella della Terra.

Esercizio 5 - Spirale conica



Determinare la curva parametrica che descrive il filo avvolto sul cono (ottenuto da `Geometries` $\rightarrow$ `Primitive` con `Size` $= 1$).

Esercizio 5 - i

La curva è data dalla rotazione di un punto intorno all'asse, con raggio variabile, composta con una traslazione lungo lo stesso asse, quindi si tratta di un'elica conica, con valori di t negativi perchè vogliamo il tratto inferiore dell'elica conica.

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = at\cos t \\ y(t) = at\sin t \\ z(t) = ct + d \end{cases} \qquad -2n\pi \leq t \leq 0$$

Chiamiamo $h_z = 2\pi c$ il passo dell'elica in direzione z e $h_r = 2\pi a$ il passo dell'elica in direzione radiale.

Esercizio 5 - ii

Dobbiamo determinare i parametri a, c, n, d che ci diano il giusto passo in direzione radiale, passo in direzione z, numero di avvolgimenti e traslazione lungo z dell'elica.

- Affinché la punta della spirale e del cono coincidano, devo traslare l'origine degli assi e portarla sulla punta del cono. La punta del cono ha coordinate $P(0, 0, 0.5)$, quindi $d = 0.5$.
- Il numero di avvolgimenti dell'elica n può essere dedotto dalla figura dell'esercizio. Quindi $n = 10$.

Esercizio 5 - iii

- Il passo in direzione z dell'elica moltiplicato per il numero di avvolgimenti è pari all'altezza del cono, nel nostro caso 1. Quindi:

$$h_z n = 1 \Rightarrow 2\pi c n = 1$$
$$c = \frac{1}{2\pi n} = \frac{1}{20\pi}$$

- Il passo in direzione radiale dell'elica moltiplicato per il numero di avvolgimenti d il raggio del cono, che pari a 0.5. Quindi:

$$h_r n = 0.5 \Rightarrow 2\pi a n = 0.5$$
$$a = \frac{1}{4\pi n} = \frac{1}{40\pi}$$

Esercizio 5 - iv

Andando a sostituire trovo l'equazione parametrica cercata:

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x(t) = {}^{1}\!/\!_{(40\pi)}\, t \cos t \\ y(t) = {}^{1}\!/\!_{(40\pi)}\, t \sin t \\ z(t) = {}^{1}\!/\!_{(20\pi)}\, t + 0.5 \end{cases} \qquad -2n\pi \leq t \leq 0$$

NOTA: Per rappresentare la curva in FranzPlot , impostare la `Quality` dell'intervallo al massimo valore consentito.

- **Oss.** Sfruttando la similitudine tra triangoli è possibile dedurre che il rapporto tra raggio e altezza del cono è pari al rapporto tra passo in direzione radiale e in z dell'elica. Nel nostro caso:

$$\frac{R_C}{H_C} = \frac{h_r}{h_z} = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$