Curve e Superfici per il Design
Laboratorio 3 - Soluzione esercizi

Prof.ssa Anna Scotti

7 Maggio 2019

Esercizio 4: Sole/Terra/Luna

L'equazione parametrica della circonferenza, ad esempio:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = a \sin t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

è utile anche per descrivere l'orbita dei corpi celesti.
Ponendo il sole al centro del sistema di riferimento, scrivere la curva che descrive il moto di un pianeta e di un suo satellite.

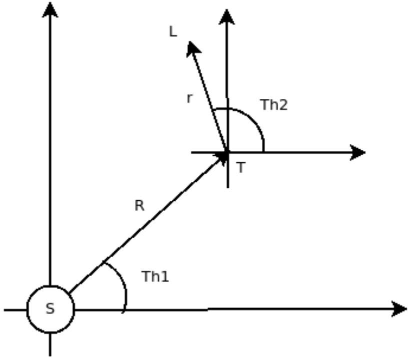
Suggerimento

Per ogni valore del parametro t, il moto del satellite rispetto al pianeta può essere visto come una rotazione attorno al centro degli assi traslato della posizione del pianeta.

- Rappresentare lo stesso sistema utilizzando punti e/o sfere ed il nodo `time transform`.

Scrittura delle equazioni

Se indichiamo con T_T il periodo di rivoluzione di un pianeta intorno alla stella, e con R il raggio della circonferenza sulla quale si muove, un'equazione per descrivere il suo moto è:



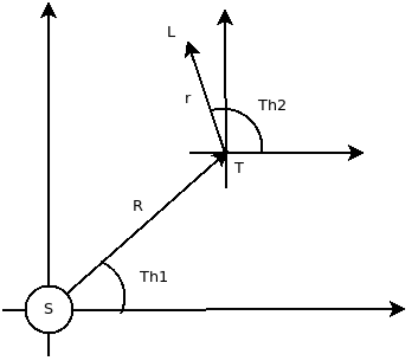
$$\mathcal{C}_{TS} : \begin{cases} x(t) = R\cos(\frac{2\pi\ t}{T_T}) \\ y(t) = R\sin(\frac{2\pi\ t}{T_T}) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Allo stesso modo, rispetto ad un sistema di riferimento che si muove con il pianeta, il moto del satellite, prendendo r come raggio della circonferenza e T_L periodo di rivoluzione:

$$\mathcal{C}_{LT} : \begin{cases} x(t) = r\cos(\frac{2\pi\ t}{T_L}) \\ y(t) = r\sin(\frac{2\pi\ t}{T_L}) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Scrittura delle equazioni

Questo ci permette di scrivere l'equazione per il satellite nel sistema di riferimento della stella come la posizione del pianeta rispetto alla stella più la posizione del satellite rispetto al pianeta:



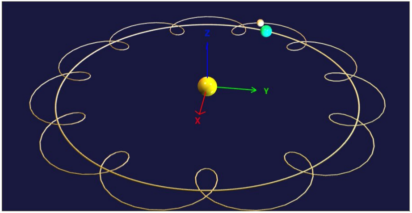
$$\mathcal{C}_{LS} : \begin{cases} x(t) = R\cos(\frac{2\pi\ t}{T_T}) + r\cos(\frac{2\pi\ t}{T_L}) \\ y(t) = R\sin(\frac{2\pi\ t}{T_T}) + r\sin(\frac{2\pi\ t}{T_L}) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Fissare i parametri

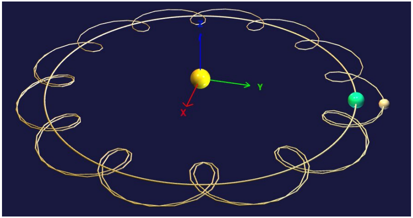
Con le equazioni per $\mathcal{C}_{TS}$ e $\mathcal{C}_{LS}$, non rimane che decidere la lunghezza dei due raggi (per i quali, per ottenere un risultato realistico, vorremmo $r < R$), ed i due periodi T_T e T_L.

- Nel caso T_T/T_S dia un risultato intero o frazionario, otterremo un'orbita per il satellite che ad un certo punto si chiude e ricomincia il ciclo da zero. Nella figura mostrata nel seguito si è scelto un $T_T/T_S = 12$ e le orbite del satellite si chiudono dopo un solo periodo di rivoluzione del pianeta.
- In altri casi, l'orbita del satellite resta aperta e non si ripete mai lungo lo stesso percorso. Il caso del sistema terra luna rientra sostanzialmente in questa categoria, con il periodo di rivoluzione terrestre di 365.25 giorni e quello lunare di circa 28 giorni. (Visualizzabile con FranzPlot fissando $T_T = 1$, $T_L = 28/365.25$)

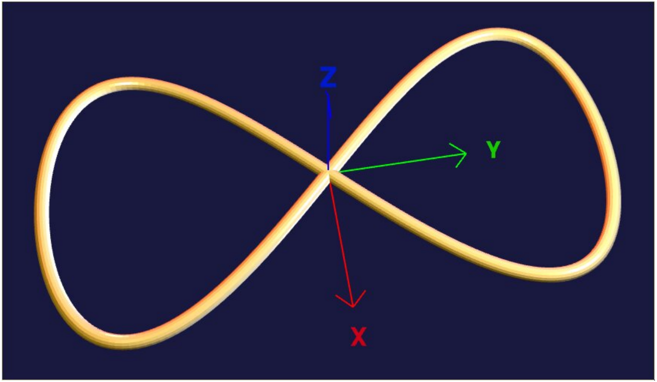
Caso $T_T = 1,\ T_L = 1/12$:



Caso $T_T = 1,\ T_L = 27/365.25$:



Esercizio 5



Determinare la forma della equazione parametrica che descrive questa curva.

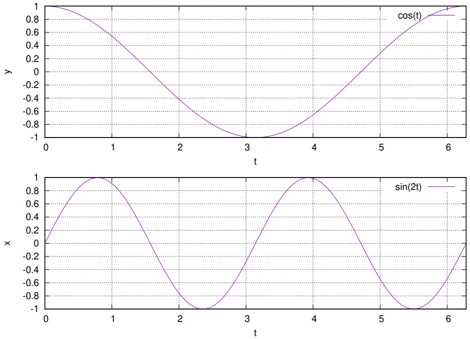
Soluzione

L'equazione di partenza e' quella di un ellisse:

$$\mathcal{E}: \begin{cases} x(t) = a \sin(t) \\ y(t) = b \cos(t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Si richiede alla coordinata x di tornare al 0 quando la coordinata y diventa 0. Confrontando i grafici di seno e coseno, si vede che è sufficientemente cambiare $\sin(t) \rightarrow \sin(2\ t)$.

Soluzione - ii



$$\mathcal{E}: \begin{cases} x(t) = a\sin(2t) \\ y(t) = b\cos(t) & 0 \leq t \leq 2\pi \\ z(t) = 0 \end{cases}$$