Curve e Superfici per il Design
Laboratorio - 4

Prof. Nicola Parolini

7 Novembre 2019

Materiali

Il materiale per l'esercitazione di oggi:

- Questa presentazione (`Materiale Didattico/Laboratori/lab 4/lab4_testo.pdf`);
- L'eseguibile del FranzPlot (`Software/Franzplot 19.08 - Windows.exe`)

Riepilogo

Per scrivere una retta in forma parametrica necessito di un **vettore direttore** e di un **punto appartente alla retta** (a volte chiamato *termine noto*).

Sia $\mathbf{v}$ il vettore direttore e sia $\mathbf{P}$ il punto appartenente alla retta, allora la forma parametrica sarà $r(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{P}$, con $t \in \mathbb{R}$.
Scritto come sistema lineare:

$$r(t) : \begin{cases} x = v_x t + P_x \\ y = v_y t + P_y \\ z = v_z t + P_z \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Il nome del parametro è arbitrario (tipicamente useremo t o s).
È sempre importante specificare l'intervallo di appartenenza.

Rette in FranzPlot

Per disegnare una qualsiasi curva parametrica in FranzPlot introduciamo i nodi `Geometries > Curve` e `Parameters > Interval`.

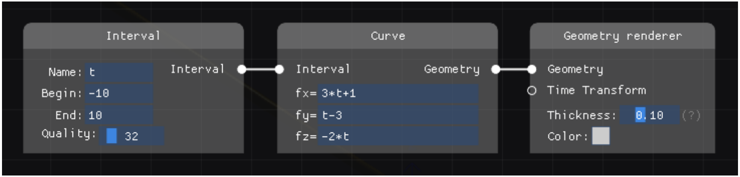
Il nodo `Interval` ci permette di definire il nome del parametro e l'intervallo cui appartiene.

Nel nodo `Curve` andiamo a inserire le coordinate x, y e z in funzione del parametro usato nel nodo `Interval`. Prendiamo ad esempio la seguente curva:

$$r: \begin{cases} x = 3t+1 \\ y = t-3 \\ z = -2t \end{cases} \qquad t \in [\text{-}10, 10]$$

Rette in FranzPlot

Per visualizzare questa curva, creeremo il seguente grafo:



L'output del nodo `Curve` è una Geometria, e come tale possiamo applicargli trasformazioni o animazioni.
Una curva è una una Geometria 1D, possiamo usare lo slider `thickness` per modificare lo spessore usato nella visualizzazione.

Nota: nel nodo `Interval` non è possibile selezionare l'intero $\mathbb{R}$, quindi per **visualizzare** le rette scegliamo sempre un intervallo con valori sufficientemente grandi.

Esercizio 1

Date le seguenti rette nello spazio si calcoli, se esiste, il punto di intersezione:

$$r : \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = t - 3 \\ z = -2t \end{cases} , \qquad w : \begin{cases} x = s + 3 \\ y = 4 \\ z = -s + 5 \end{cases}$$

con $t, s \in \mathbb{R}$
(Suggerimento: voglio che $r_x = w_x, \quad r_y = w_y, \quad r_z = w_z$)

Le rette sono perpendicolari?

Esercizio 1 - i

Quando voglio trovare l'intersezione tra due curve *qualsiasi*, devo imporre che i valori delle coordinate x, y e z siano uguali.

$$\begin{cases} 3t + 1 = s + 3 \\ t - 3 = 4 \\ -2t = -s + 5 \end{cases}$$

Risolvo il sistema lineare:
$\Rightarrow$ **Se** trovo una soluzione, allora le rette si intersecano in un punto.

$$\begin{cases} 3t + 1 = s + 3 \\ t = 7 \\ s = 2t + 5 \end{cases}$$

Esercizio 1 - ii

Ho ricavato il valore di t, lo sostituisco nella terza riga per trovare s

$$\begin{cases} 3t + 1 = s + 3 \\ t = 7 \\ s = 2 \cdot 7 + 5 = 19 \end{cases}$$

E per finire sostituisco t e s nella prima riga: **devo** essere sicuro che anche la prima equazione sia soddisfatta

$$\begin{cases} 3 \cdot 7 + 1 = 19 + 3 \\ t = 7 \\ s = 19 \end{cases} \qquad \begin{cases} 22 = 22 \\ t = 7 \\ s = 19 \end{cases}$$

Posso confermare che le rette si intersecano. Sostituisco $t = 7$ nella retta r per ottenere l'intersezione: $P = (22, 4, -14)$.

Esercizio 1 - iii

Se guardiamo i vettori direttori, abbiamo:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Controlliamo se le direzioni formano un angolo retto:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 + 0 + 2 = 5$$

Quindi le rette non sono perpendicolari.

Esercizio 2

Siano assegnate le rette r e s di equazione

$$r: \quad \begin{cases} x = 3t - 3 \\ y = t - 2 \\ z = -2t + 4 \end{cases} \qquad\qquad s: \quad \begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \\ z = 2t - 2 \end{cases}$$

- r ed s sono perpendicolari?
- Si visualizzino le rette r e s usando FranzPlot

(Reminder: due rette sono perpendicolari se sono incidenti e le loro direzioni formano un angolo retto)

Esercizio 2 - i

Se guardiamo i vettori direttori, abbiamo:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Controlliamo se le direzioni formano un angolo retto:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 + 1 - 4 = 0$$

Le direzioni formano un angolo retto. In 2D questo sarebbe sufficiente a garantire che le rette siano perpendicolari, mentre in 3D **dobbiamo sempre controllare che le rette abbiano un punto in comune**.

Esercizio 2 - ii

Nota: è necessario cambiare "nome" del parametro della seconda retta!

$$\begin{cases} 3t-3 &= s \\ t-2 &= s-1 \\ -2t+4 &= 2s-2 \end{cases}$$

Metto in evidenza s dalla prima equazione e la sostituisco nella seconda e terza riga

$$\begin{cases} s=3t-3 \\ t-2=s-1 \\ -2t+4=2s-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} s=3t-3 \\ t-2=3t-3-1 \\ -2t+4=6t-6-2 \end{cases}$$

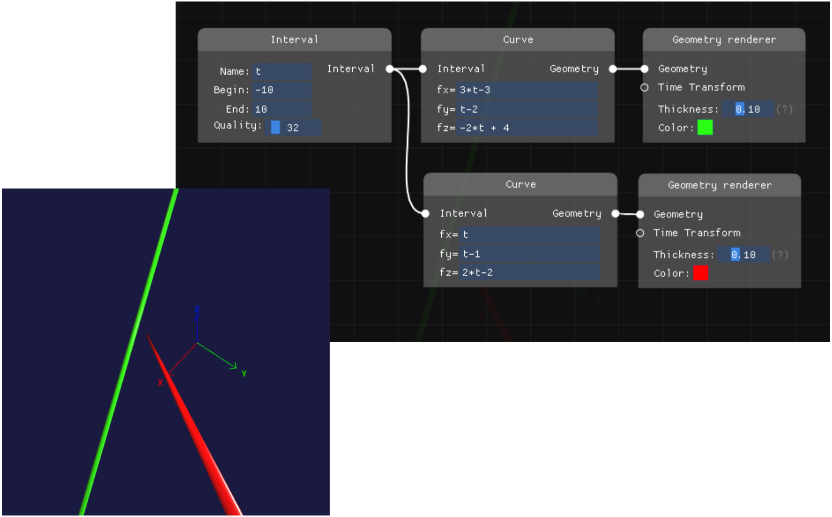
Esercizio 2 - iii

Svolgo le somme e sposto i termini in t a sinistra:

$$\begin{cases} s = 3t - 3 \\ 2t = 2 \\ 8t = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} s = 3t - 3 \\ t = 1 \\ t = 3/2 \end{cases}$$

La seconda e terza riga evidenziano che il sistema lineare non ha soluzione, quindi le due rette non si intersecano!
$\Rightarrow$ Le due rette non sono perpendicolari, sono sghembe.

Esercizio 2 - iv



Esercizio 3

Dati i punti

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si calcolino:

- una rappresentazione parametrica della retta r passante per $\mathbf{P}$ e $\mathbf{R}$.
- una rappresentazione parametrica della retta s passante per $\mathbf{P}$ e $\mathbf{S}$.

Le due rette sono perpendicolari?

Esercizio 3 - i

La rappresentazione di r e s non sono uniche; la più immediata per r sarà:

- vettore direttore $\overrightarrow{PR}$
- retta passante per P

Dai dati ricaviamo che:

$$\overrightarrow{PR} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

quindi

$$r: \quad \begin{cases} x = 3t + 0 \\ y = 1t - 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Esercizio 3 - ii

Alla stessa maniera, per s scegliamo:

- vettore direttore $\overrightarrow{PS}$
- retta passante per P

Dai dati ricaviamo che:

$$\overrightarrow{PS} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

quindi

$$s: \quad \begin{cases} x = \text{-}2t + 0 \\ y = 3t - 2 \\ z = 1t - 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Nota: le rappresentazioni non sono uniche! Esempio: come termine noto per r avremmo potuto usare il punto $\mathbf{R}$, e per s il punto $\mathbf{S}$.

Esercizio 3 - iii

Affinché due rette siano perpendicolari, esse devono essere incidenti e le loro direzioni devono formare un angolo retto.

In questo caso sappiamo già che le rette hanno il punto **P** in comune, quindi sappiamo che sono incidenti. Verifichiamo se le direzioni formano un angolo retto:

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -6 + 3 + 3 = 0$$

Possiamo quindi concludere che le rette sono perpendicolari.

Esercizio 4

- Rappresentare la retta r passante per i punti

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix};$$

- Determinare la retta s perpendicolare ad r e passante per:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4 - i

- Vettore direttore della retta r:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \textit{oppure} \quad \overrightarrow{QP} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- Rappresentazione della retta r: (usando $\overrightarrow{PQ}$ e $\mathbf{Q}$)

$$r : \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 1 \\ z = 2t + 3 \end{cases}$$

Esercizio 4 - ii

Se voglio trovare una retta perpendicolare a r che passa per **M**, devo trovare un punto $\mathbf{H} \in r$ tale che $\overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{PQ}$

H incognito, so solo che appartiene a r!

- ma se appartiene a r, allora $\mathbf{H} = r(\tilde{t})$
- $\mathbf{H} : \begin{cases} \mathbf{H}_x = -\tilde{t} + 1 \\ \mathbf{H}_y = 1 \\ \mathbf{H}_z = 2\tilde{t} + 3 \end{cases}$

$$\overrightarrow{MH} = \mathbf{H} - \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\tilde{t} + 1 \\ 1 \\ 2\tilde{t} + 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{t} \\ -1 \\ 2\tilde{t} + 5 \end{bmatrix}$$

Esercizio 4 - iii

$$\overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

Quindi:

$$\begin{bmatrix} -\tilde{t} \\ -1 \\ 2\tilde{t}+5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

Svolgo il prodotto scalare, ottengo una equazione in $\tilde{t}$

$$\tilde{t} + 0 + 4\tilde{t} + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5\tilde{t} = -10$$

Quindi, il valore del parametro che cercavo è $\tilde{t} = -2$!

Esercizio 4 - iv

Il problema richiedeva di trovare una parametrizzazione di s. Scegliamo:

- vettore direttore $\overrightarrow{MH}$
- retta passante per M

Per trovare i valori del vettore $\overrightarrow{MH}$, vado a sostituire il valore ricavato per $\tilde{t}$:

$$\overrightarrow{MH} = \begin{bmatrix} -\tilde{t} \\ -1 \\ 2\tilde{t}+5 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{t} = -2 \Rightarrow \overrightarrow{MH} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- Sostituisco nell'espressione per $s(t)$, trovando:

$$s: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = \ \ t - 2 \end{cases}$$

Esercizio 4 - v