Materiali

Il materiale per l'esercitazione di oggi:

- Questa presentazione (`Materiale Didattico/Laboratori/lab 4/lab4_testo.pdf`);
- L'eseguibile del FranzPlot (`Software/Franzplot 19.08 - Windows.exe`)

Riepilogo

Per scrivere una retta in forma parametrica necessito di un **vettore direttore** e di un **punto appartente alla retta** (a volte chiamato *termine noto*.

Sia $\mathbf{v}$ il vettore direttore e sia $\mathbf{P}$ il punto appartenente alla retta, allora la forma parametrica sarà $r(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{P}$, con $t \in \mathbb{R}$.
Scritto come sistema lineare:

$$r(t) : \begin{cases} x = v_x t + P_x \\ y = v_y t + P_y \\ z = v_z t + P_z \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Il nome del parametro è arbitrario (tipicamente useremo t o s).
È sempre importante specificare l'intervallo di appartenenza.

Esercizio 1

Dati i punti

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si calcolino:

- una rappresentazione parametrica della retta r passante per $\mathbf{P}$ e $\mathbf{R}$.
- una rappresentazione parametrica della retta s passante per $\mathbf{P}$ e $\mathbf{S}$.

Le due rette sono perpendicolari?

Esercizio 1 - i

La rappresentazione di r e s non sono uniche; la più immediata per r sarà:

- vettore direttore $\overrightarrow{PR}$
- retta passante per P

Dai dati ricaviamo che:

$$\overrightarrow{PR} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

quindi

$$r: \quad \begin{cases} x = 3t + 0 \\ y = 1t - 2 \\ z = 3t - 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Esercizio 1 - ii

Alla stessa maniera, per s scegliamo:

- vettore direttore $\overrightarrow{PS}$
- retta passante per P

Dai dati ricaviamo che:

$$\overrightarrow{PS} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

quindi

$$s: \quad \begin{cases} x = \text{-}2t + 0 \\ y = 3t - 2 \\ z = 1t - 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Nota: le rappresentazioni non sono uniche! Esempio: come termine noto per r avremmo potuto usare il punto $\mathbf{R}$, e per s il punto $\mathbf{S}$.

Esercizio 1-ii

Affinché due rette siano perpendicolari, esse devono essere incidenti e le loro direzioni devono formare un angolo retto.

In questo caso sappiamo già che le rette hanno il punto **P** in comune, quindi sappiamo che sono incidenti. Verifichiamo se le direzioni formano un angolo retto:

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = -6 + 3 + 3 = 0$$

Possiamo quindi concludere che le rette sono perpendicolari.

Esercizio 2

- Rappresentare la retta r passante per i punti

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix};$$

- Determinare la retta s perpendicolare ad r e passante per:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2 - i

- Vettore direttore della retta r: $$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \textit{oppure} \quad \overrightarrow{QP} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$
- Rappresentazione della retta r: $$r : \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 1 \\ z = 2t + 3 \end{cases}$$

Esercizio 2 - ii

Se voglio trovare una retta perpendicolare a r che passa per **M**, devo trovare un punto $\mathbf{H} \in r$ tale che $\overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{PQ}$

H incognito, so solo che appartiene a r!

- ma se appartiene a r, allora $\mathbf{H} = r(\tilde{t})$
- $\mathbf{H} : \begin{cases} \mathbf{H}_x = -\tilde{t} + 1 \\ \mathbf{H}_y = 1 \\ \mathbf{H}_z = 2\tilde{t} + 3 \end{cases}$

$$\overrightarrow{MH} = \mathbf{H} - \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\tilde{t} + 1 \\ 1 \\ 2\tilde{t} + 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{t} \\ -1 \\ 2\tilde{t} + 5 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2 - iii

$$\overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

Scritto in forma vettoriale:

$$\begin{bmatrix} -\tilde{t} \\ -1 \\ 2\tilde{t}+5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

Svolgo il prodotto scalare, ottengo una equazione in $\tilde{t}$

$$\tilde{t} + 0 + 4\tilde{t} + 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5\tilde{t} = -10$$

Quindi, il valore del parametro che cercavo è $\tilde{t} = -2$!

Esercizio 2 - iv

Il problema richiedeva di trovare una parametrizzazione di s. Scegliamo:

- vettore direttore $\overrightarrow{MH}$
- retta passante per M

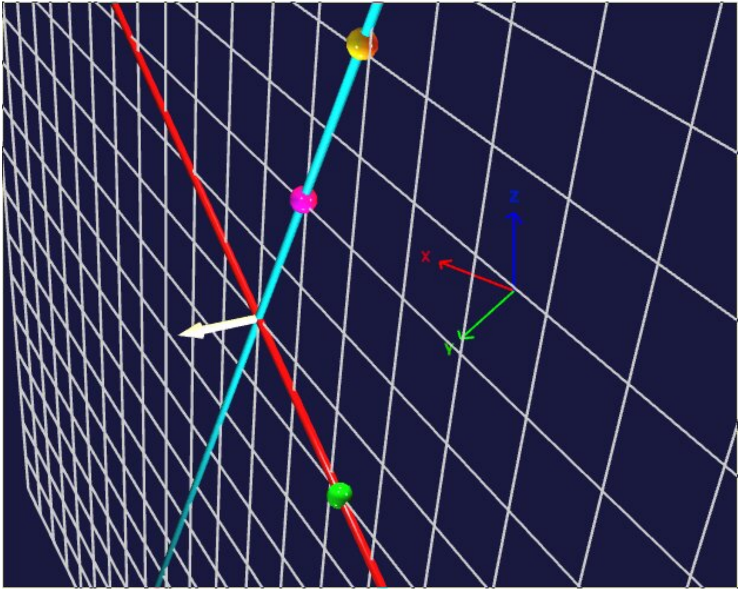
Per trovare i valori del vettore $\overrightarrow{MH}$, vado a sostituire il valore ricavato per $\tilde{t}$:

$$\overrightarrow{MH} = \begin{bmatrix} -\tilde{t} \\ -1 \\ 2\tilde{t}+5 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{t} = -2 \Rightarrow \overrightarrow{MH} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- Sostituisco nell'espressione per $s(t)$, trovando:

$$s : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = \ \ t - 2 \end{cases}$$

Esercizio 2 - iv



Esercizio 3 - i

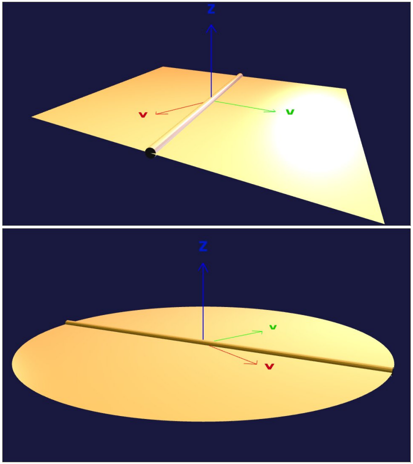
Con FranzPlot è possibile rappresentare un piano parametricamente, come una superficie qualsiasi.

- Rappresentare la retta r:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 0.5\ t \\ z = 0 \end{cases}$$

- Rappresentare l'oggetto che si ottiene:
  1. Traslando la retta in direzione y facendo variare il parametro della traslazione tra -5 e 5.
  2. Ruotanto rispetto a z la retta di 2π radianti.

Esercizio 3 - ii



Esercizio 4 - i

Date le rette:

$$p: \begin{cases} x = 3\ t - \frac{1}{2} \\ y = t - \frac{1}{2} \\ z = -2\ t \end{cases} \qquad q: \begin{cases} x = t - 13 \\ y = 2 \\ z = -t + 15 \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x = t + \frac{3}{2} \\ y = t + \frac{1}{2} \\ z = 2\ t - 2 \end{cases}$$

- Rappresentare le rette con FranzPlot
- Le rette p e q sono perpendicolari? E le rette p ed r?
- Determinare e rappresentare i punti di intersezione se presenti

Esercizio 4 - ii

- Scrivere l'equazione del piano α con normale $\mathbf{n} = [1, 1, 1]^T$ passante per il punto $(1, 0, 0)$. Rappresentare il piano con FranzPlot
- Calcolare e rappresentare i punti di intersezione di p e q con il piano.
- Calcolare e rappresentare il piano β su cui giacciono le rette p e q, e scrivere l'espressione parametrica della retta s intersezione dei piani α e β

Esercizio 4 - iii