Curve e Superfici per il Design
Laboratorio - 2

Prof. Nicola Parolini

24 Ottobre 2019

Materiali

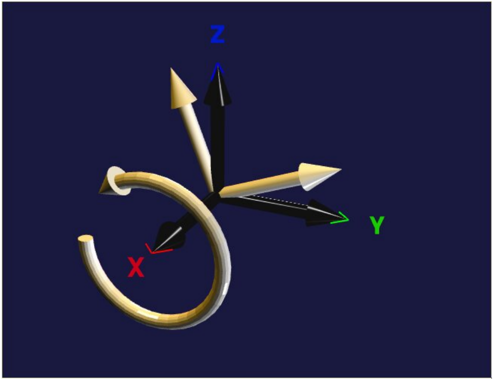
Il materiale per l'esercitazione di oggi:

- Questa presentazione (`Materiale Didattico/Laboratori/lab 2/lab2.pdf`);
- L'eseguibile del FranzPlot (`Software/Franzplot 19.08 - Windows.exe`)

Inoltre è stata caricata anche la soluzione dell'esercizio lasciato per casa nel laboratorio precedente (`Materiale Didattico/Laboratori/lab 1/lab1_homework_solution.toml`)

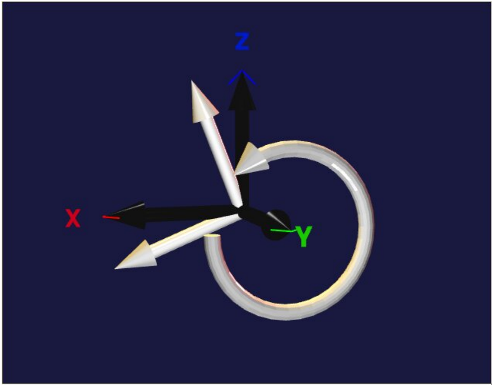
Rotazioni: Asse x

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{1}$$



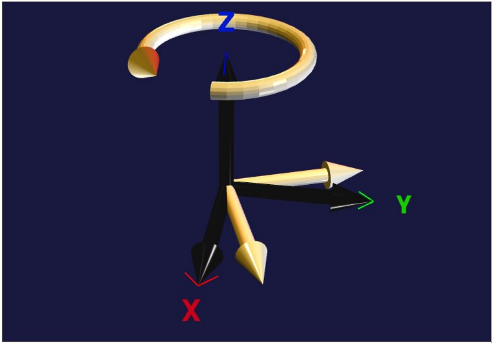
Rotazioni: Asse y

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{2}$$



Rotazioni: Asse z

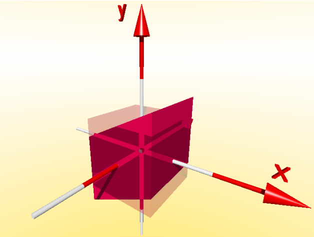
$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

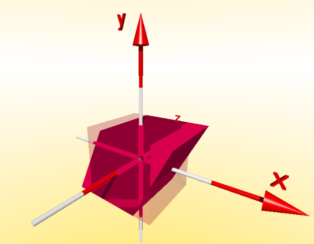


Tagli

Taglio in direzione x sulle facce con normale y:

$$T_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & k_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$





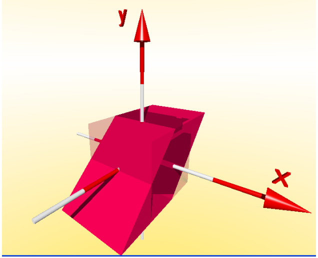
Taglio in direzione y sulle facce con normale x:

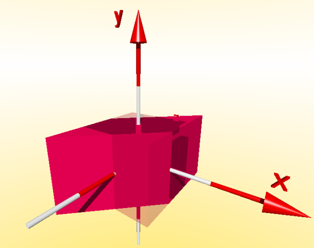
$$T_{yx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Tagli[2]

Taglio in direzione z sulle facce con normale x:

$$T_{zx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k_z & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$





Taglio in direzione z sulle facce con normale y:

$$T_{zy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_z & 1 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Scalatura, Riflessione,Proiezione

- Scalatura

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix} \tag{8}$$

- Riflessione

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \tag{9}$$

- Proiezione

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \tag{10}$$

Coordinate omogenee

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + t_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + t_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + t_3 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Esercizio 1

- Creare un oggetto ‘dado’ e traslarlo del vettore $[1, 1, 0]^T$.
- Scrivere la matrice T che descrive la rotazione di 180 gradi intorno all’asse Z.
- Applicare la matrice T calcolata in precedenza al dado traslato, usando il nodo “Generic Matrix”.
- Scrivere una matrice di rotazione in cui l’angolo sia una variabile tempo-dipendente t. Inserire questa matrice in un nodo ”Time Transform” per verificare che il senso di rotazione sia quello corretto (rispetti la regola della mano destra).

Esercizio 1 - i

Matrice generica di rotazione intorno l'asse Z:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

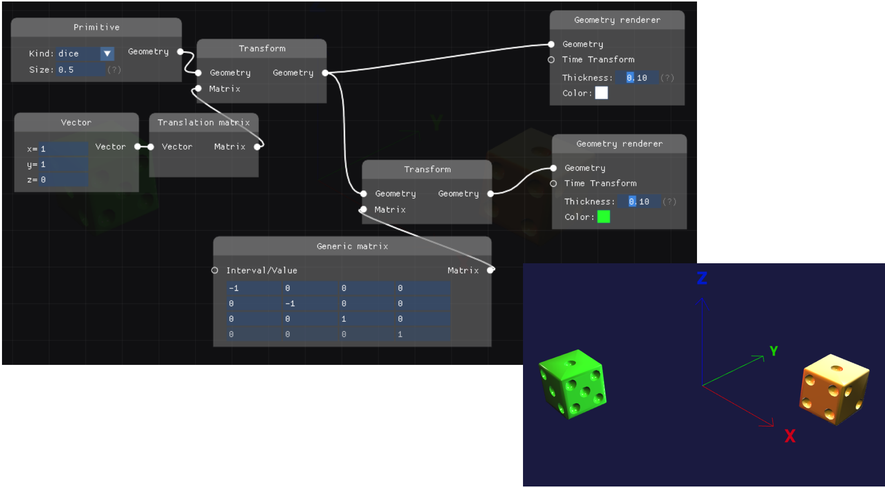
Nel nostro caso, $\theta = \pi$. Andiamo quindi a sostituire per ottenere

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & -\sin(\pi) & 0 \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sappiamo anche che $cos(\pi) = -1$ e $sin(\pi) = 0$.
La matrice che cerchiamo è quindi:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1 - ii

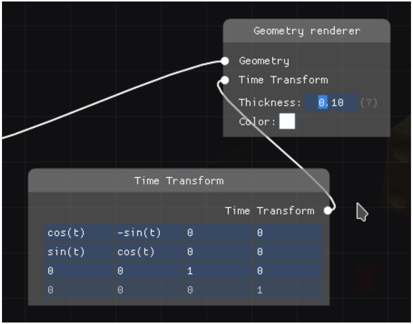


Esercizio 1 - iii

Riscriviamo la matrice, ma come angolo scriviamo la variabile t:

$$\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e la inseriamo nel nodo "Time Transform"



Esercizio 2

- Creare un oggetto 'dado' e traslarlo del vettore $v = [1, 1, 0]^T$.
- Scrivere la matrice R che descrive la riflessione rispetto al piano passante per l'origine e avente vettore normale v
- Applicare la matrice R al dado traslato, usando il nodo "Generic Matrix".
- Rappresentare il dado traslato, il dado riflesso e il piano di riflessione.
- Scrivere la matrice $Q = \mathbb{I} - 2t\hat{v}\hat{v}^T$, con t variabile tempo-dipendente. Inserire questa matrice in un nodo "Time Transform" e animare la scena con t che va da 0 a 1. Commentare il risultato.
- Confrontare l'oggetto finale ottenuto in questo esercizio con quello ottenuto nell'esercizio precedente.

Esercizio 2 - i

Matrice di riflessione generica (quando **n** è il **versore** normale)

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \tag{11}$$

Nel nostro caso, **v** è il vettore normale, **non il versore!**
$\Rightarrow$ dobbiamo prima ricavare $\hat{v}$ versore!

Esercizio 2 - ii

Ricordando la definizione:

$$\hat{v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

calcoliamo

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

e otteniamo

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2 - iii

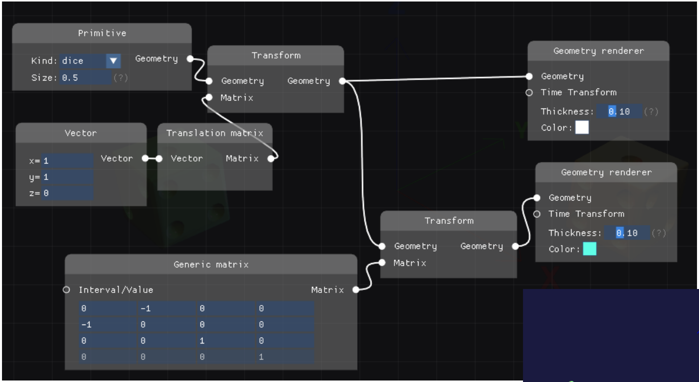
La matrice di riflessione cercata diventa dunque:

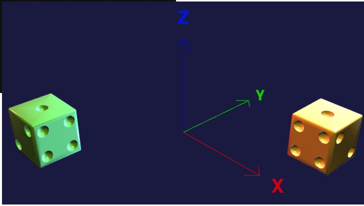
$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2 - iv





Esercizio 2 - v

Il calcolo di $Q = \mathbb{I} - 2t\hat{v}\hat{v}^T$ è molto simile, dobbiamo solo stare attenti a t:

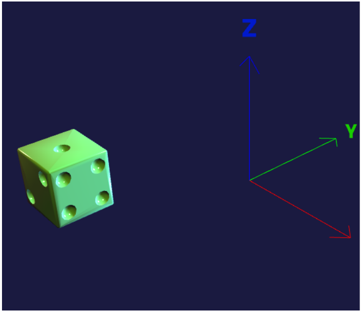
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2t \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

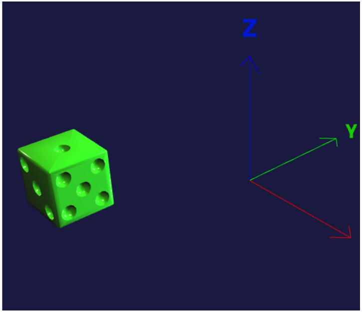
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2t \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t & t & 0 \\ t & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2 - vi

Confrontiamo questo risultato (sx) con quello precedente (dx)





Il dado si trova nella stessa posizione, ma le facce sono orientate in maniera diversa. La riflessione ne ha cambiato l'ordine!
Ruotando la scena ottenuta in questo esercizio si può verificare che l'ordine nel dado originale è 2-3-5-4, nel dado riflesso è 2-4-5-3.

Esercizio 3

Dati i due vettori $\mathbf{u} = [0, 1, 2]^T$ e $\mathbf{v} = [0, -3, 1]^T$:

- Determinare se i due vettori siano paralleli.
- Determinare se i due vettori siano perpendicolari tra loro.
- Rappresentare nel FranzPlot i due vettori, spiccandoli entrambi dall'origine degli assi.

Esercizio 3 - i

$$\mathbf{u} /\!/ \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, t \neq 0, \text{ tale che } \mathbf{u} = t\mathbf{v}$$

$$\begin{cases} u_x = t \cdot v_x \\ u_y = t \cdot v_y \\ u_z = t \cdot v_z \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0 = 0 \ t \\ 1 = -3 \ t \\ 2 = 1 \ t \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \textit{nessuna informazione} \\ t = -1/3 \\ t = 2 \end{cases}$$

La seconda e terza equazione sono in contraddizione, pertanto non esiste alcuna t che soddisfi il sistema lineare
$\Rightarrow$ **u** e **v** non sono paralleli.

Esercizio 3 - ii

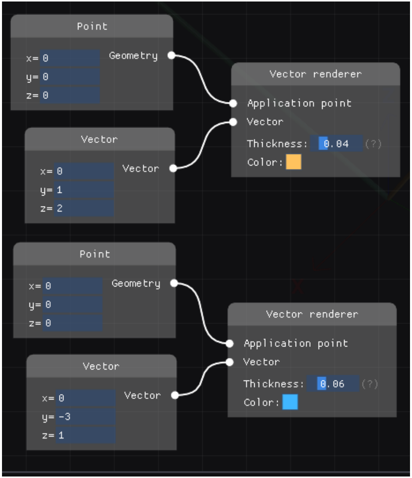
$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

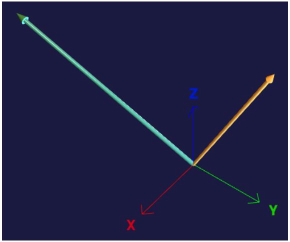
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 = -1$$

Poiché il prodotto scalare dei due vettori è diverso da zero, sappiamo che essi non sono perpendicolari.

Esercizio 3 - iii





Notare come da alcune angolazioni i vettori potrebbero sembrare perpendicolari anche se in realtà non lo sono.

Esercizio 4

Dati i seguenti punti con relative coordinate: $A(1,0,1)$, $B(0,2,2)$, $C(1,1,3)$ e $D(2,-1,2)$

- Calcolare i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$.
- Determinare se i due vettori siano paralleli.
- Rappresentare i due vettori nel FranzPlot .

Esercizio 4 - i

Determiniamo i due vettori:

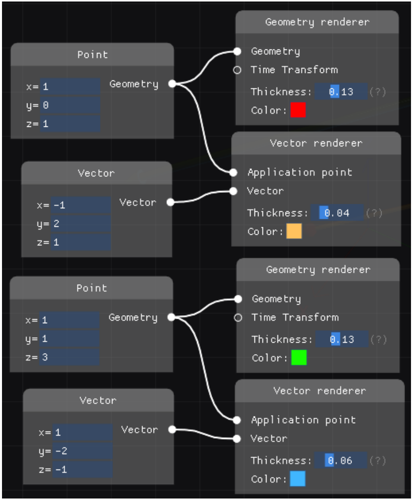
$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \\ B_z - A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} D_x - C_x \\ D_y - C_y \\ D_z - C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

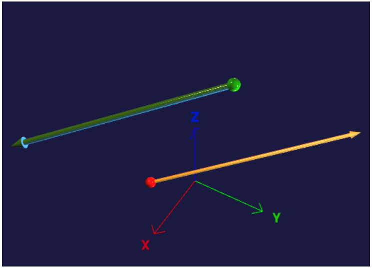
e proseguiamo impostando il sistema lineare come in precedenza:
$\overrightarrow{AB} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}, t \neq 0,$ t.c. $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{CD}$

$$\begin{cases} -1 = 1\ t \\ 2 = -2\ t \\ 1 = -1\ t \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$$

Poiché $t = -1$ soddisfa tutte le equazioni del sistema, possiamo affermare che $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sono paralleli.

Esercizio 4 - ii





Per disegnare correttamente i vettori, è fondamentale spiccarli correttamente!
($\overrightarrow{AB}$ parte da A, $\overrightarrow{CD}$ parte da C!)

Esercizio 5

Dati i due vettori $\mathbf{u} = [1, 1, -2]^T$ e $\mathbf{v} = [0.5, -0.5, -0.5]^T$:

- Calcolare il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$
- Rappresentare nel FranzPlot i tre vettori, con l'origine degli assi come punto di applicazione.
- Rappresentare nel FranzPlot il piano passante per l'origine e avente normale $\mathbf{w}$. Verificare che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ giacciono sul piano.
- Cosa cambierebbe se anziché $\mathbf{w}$ usassimo $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$?

Esercizio 5 - i

Ricordiamo la formula generica per il calcolo del prodotto vettore:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ b_x a_z - a_x b_z \\ a_x b_y - b_x a_y \end{bmatrix}$$

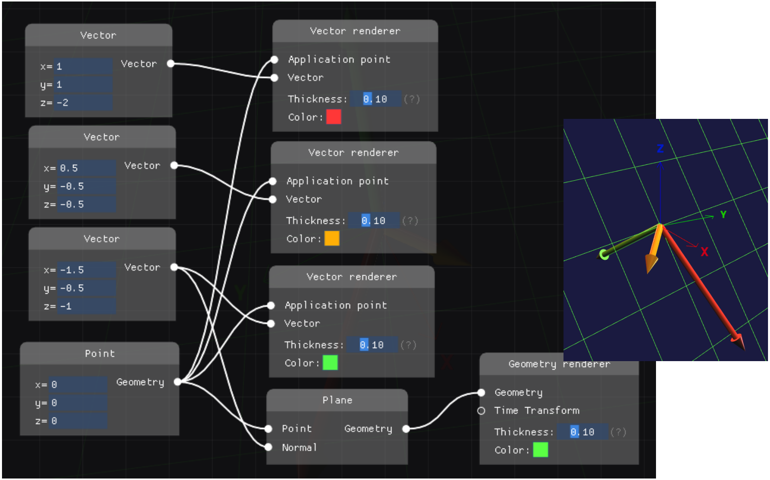
Nel nostro caso:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (\text{-}0.5) - (\text{-}0.5) \cdot (\text{-}2) \\ 0.5 \cdot (\text{-}2) - 1 \cdot (\text{-}0.5) \\ 1 \cdot (\text{-}0.5) - (0.5) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{-}0.5 - 1 \\ \text{-}1 + 0.5 \\ \text{-}0.5 - 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{-}1.5 \\ \text{-}0.5 \\ \text{-}1 \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi trovato il risultato che cercavamo:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \text{-}1.5 \\ \text{-}0.5 \\ \text{-}1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 5 - ii



Esercizio 5 - iii

Dalla teoria sappiamo che

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

ovvero invertendo l'ordine del prodotto vettoriale otteniamo un vettore con i segni opposti rispetto al precedente.

$$\tilde{\mathbf{w}} = \text{-}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dal punto di vista geometrico, significa che il vettore ha stesso modulo e direzione, ma verso opposto.