

# Curve e Superfici per il Design

## Laboratorio - 2

Prof. Nicola Parolini

31 Ottobre 2019

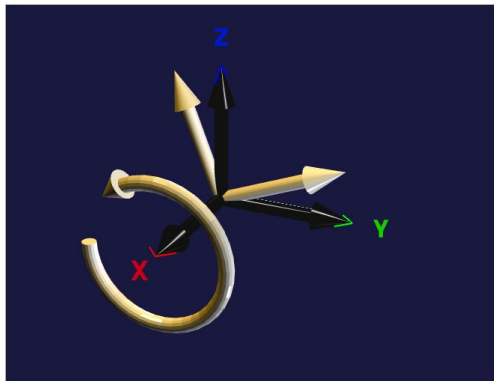
# Materiali

Il materiale per l'esercitazione di oggi:

- ▶ Questa presentazione  
(Materiale Didattico/Laboratori/lab  
3/lab3\_testo.pdf);
- ▶ L'eseguibile del FranzPlot  
(Software/Franzplot 19.08 - Windows.exe)

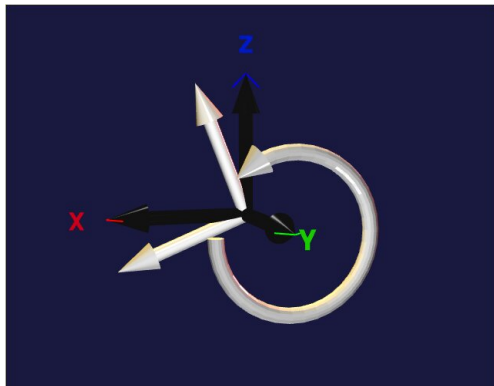
## Rotazioni: Asse x

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (1)$$



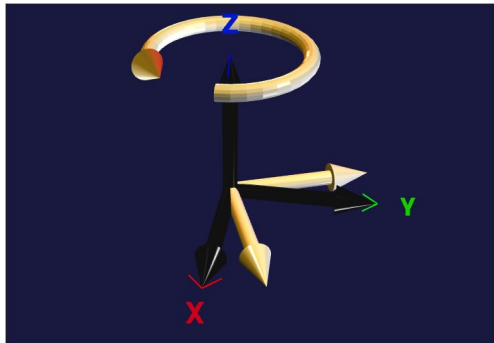
## Rotazioni: Asse y

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2)$$



## Rotazioni: Asse z

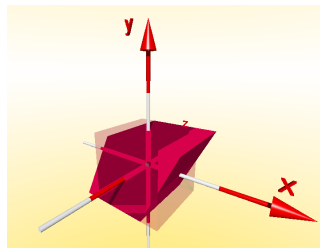
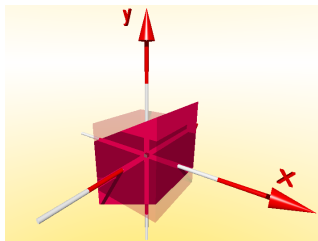
$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$



# Tagli

Taglio in direzione x sulle facce con normale y:

$$T_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & k_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$



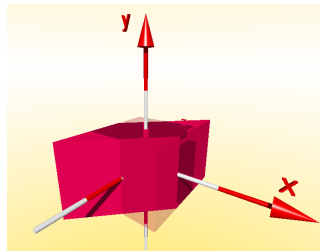
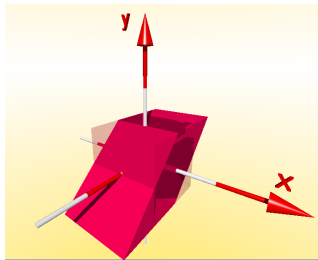
Taglio in direzione y sulle facce con normale x:

$$T_{yx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

## Tagli[2]

Taglio in direzione z sulle facce  
con normale x:

$$T_{zx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k_z & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$



Taglio in direzione z sulle facce  
con normale y:

$$T_{zy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_z & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

# Scalatura, Riflessione, Proiezione

## ► Scalatura

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix} \quad (8)$$

## ► Riflessione

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \quad (9)$$

## ► Proiezione

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \quad (10)$$



# Coordinate omogenee

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + t_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + t_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + t_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Esercizio 1 - Moltiplicazioni matrice-matrice

Date le due matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcolare la matrice  $M = AB$
- Calcolare la matrice  $N = BA$

## Esercizio 1 - i

Calcolo di M:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice M risultante sarà una matrice  $4 \times 4$ , e dobbiamo calcolarla elemento per elemento:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix}$$

## Esercizio 1 - ii

L'elemento  $M_{ij}$ , ovvero quel numero contenuto nella matrice  $M$  e posizionato nella **riga i** e nella **colonna j**, è il **prodotto scalare** dei vettori **riga i-esima di A** e **colonna j-esima di B**

Vediamo il calcolo di alcuni elementi di matrice:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 5$$

## Esercizio 1 - iii

$$M_{21} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot -3 + 1 \cdot 0 = -6$$

E così via per tutti gli altri elementi.

## Esercizio 1 - iv

Poiché ogni singolo elemento di matrice richiede il calcolo di un prodotto scalare di due vettori, per calcolare la matrice  $M$  dovremo calcolare **16** prodotti scalari.

- ▶ Allenarsi nel calcolo a mente dei prodotti scalari ci permette di non consumare quantità industriali di carta.

Nei nostri esercizi in genere le matrici contengono molti zeri, questo semplifica molto i calcoli.

- ▶ In particolare, quando lavoriamo in coordinate omogenee **l'ultima riga** di una qualsiasi matrice di trasformazione è sempre  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

## Esercizio 1 - v

Svolgendo tutti i calcoli, giungiamo al risultato:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per il calcolo di N, cambia l'ordine delle matrici da moltiplicare!

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Esercizio 1 - vi

Poiché in generale la moltiplicazione tra matrici non è commutativa, cambia anche il risultato:

$$N = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ -7 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In generale è sempre necessario calcolare il risultato di un prodotto matrice-matrice quando cerchiamo di comporre due trasformazioni! Tuttavia esiste una eccezione che vedremo più avanti.



## Esercizio 2

- ▶ Scrivere la matrice  $S$  che descrive la scalatura con parametri  $S_x = 0.5$ ,  $S_y = 0.5$ ,  $S_z = 1$ .
- ▶ Scrivere la matrice  $R$  che descrive la rotazione di  $90^\circ$  intorno l'asse  $Y$ .
- ▶ Calcolare la matrice  $M = RS$ .
- ▶ Usando il FranzPlot , creare una primitiva 'piramide' e applicare la trasformazione rappresentata dalla matrice  $M$ .
- ▶ Verificare che la trasformazione  $M$  corrisponde all'applicare **prima** una scalatura e **poi** una rotazione.
- ▶ Cosa succederebbe se invece applicassimo prima la rotazione e poi la scalatura?

## Esercizio 2 - i

Matrice di scalatura S:

$$S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione R:

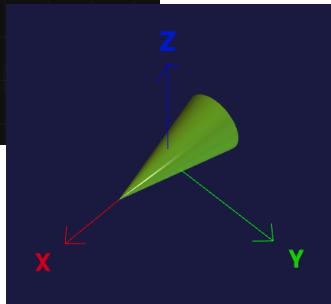
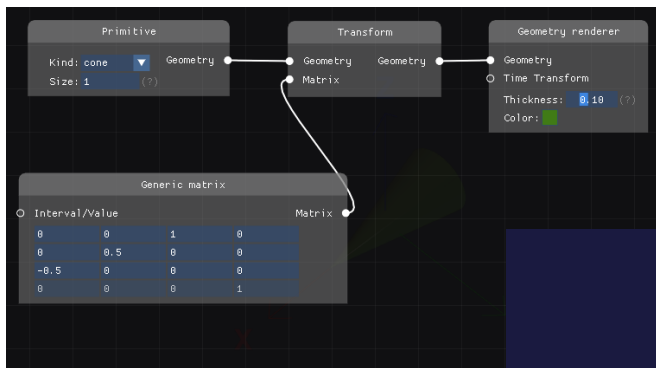
$$R = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & 0 & \sin(\pi/2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\pi/2) & 0 & \cos(\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Esercizio 2 - ii

Matrice M:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Esercizio 2 - iii

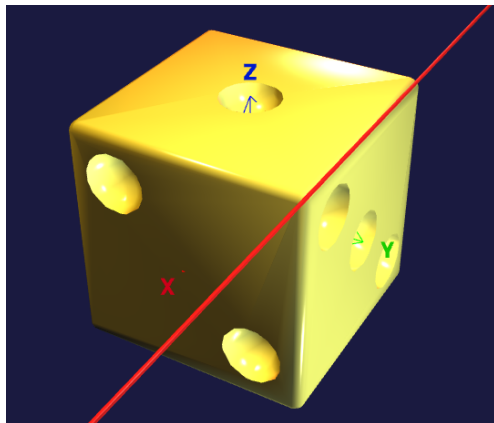


## Esercizio 3

- ▶ Creare un oggetto di tipo 'dado' che abbia lato di dimensione pari a 2.
- ▶ Scrivere la matrice  $M$  che descrive la rotazione di  $90^\circ$  intorno alla retta che passa per il punto  $S(1, 1, 1)$  ed è parallela all'asse  $X$ .

## Esercizio 3 - traccia di soluzione

Il nostro obiettivo è quello di ruotare il dado intorno a uno dei suoi lati, anzichè ruotarlo su se stesso.



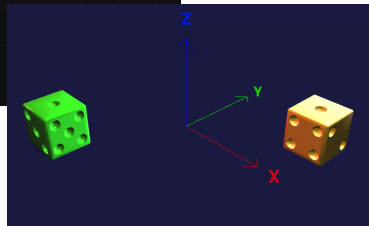
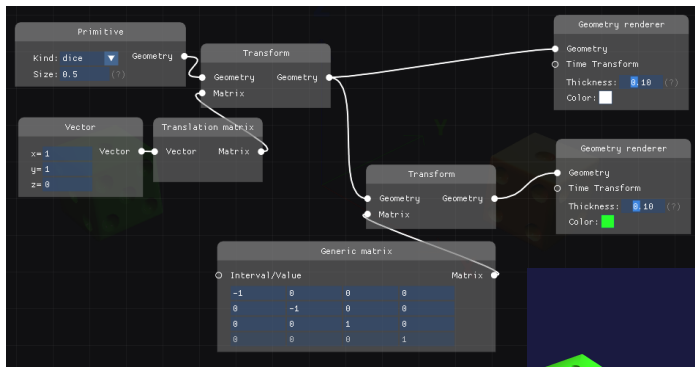
Nell'immagine, la retta di cui parla l'esercizio è segnata in rosso

## Esercizio 3 - traccia di soluzione

Non abbiamo una formula per rotazioni intorno ad un asse generico. Tuttavia, in questo caso possiamo:

1. Traslare il dado di un vettore tale che il punto  $S$  venga spostato sull'origine degli assi  
⇒ In questa maniera, la retta rossa coinciderà con l'asse  $X$
2. Applicare una rotazione intorno l'asse  $X$
3. Traslare nuovamente il dado riportando il punto  $S$  alla sua posizione iniziale

# Esercizio 1 - ii



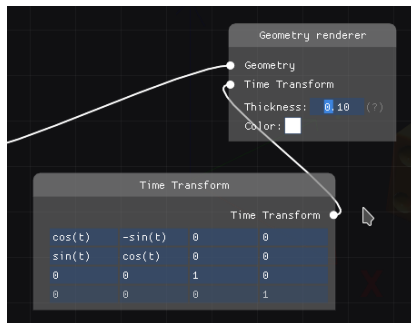


## Esercizio 1 - iii

Riscriviamo la matrice, ma come angolo scriviamo la variabile  $t$ :

$$\begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e la inseriamo nel nodo "Time Transform"



## Esercizio 2

- ▶ Creare un oggetto 'dado' e traslarlo del vettore  $v = [1, 1, 0]^T$ .
- ▶ Scrivere la matrice  $R$  che descrive la riflessione rispetto al piano passante per l'origine e avente vettore normale  $v$
- ▶ Applicare la matrice  $R$  al dado traslato, usando il nodo "Generic Matrix".
- ▶ Rappresentare il dado traslato, il dado riflesso e il piano di riflessione.
- ▶ Scrivere la matrice  $Q = \mathbb{I} - 2t\hat{v}\hat{v}^T$ , con  $t$  variabile tempo-dipendente. Inserire questa matrice in un nodo "Time Transform" e animare la scena con  $t$  che va da 0 a 1. Commentare il risultato.
- ▶ Confrontare l'oggetto finale ottenuto in questo esercizio con quello ottenuto nell'esercizio precedente.

## Esercizio 2 - i

Matrice di riflessione generica (quando  $\mathbf{n}$  è il **versore** normale)

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \quad (11)$$

Nel nostro caso,  $\mathbf{v}$  è il vettore normale, **non il versore!**

$\Rightarrow$  dobbiamo prima ricavare  $\hat{\mathbf{v}}$  versore!

## Esercizio 2 - ii

Ricordando la definizione:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

calcoliamo

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

e otteniamo

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Esercizio 2 - iii

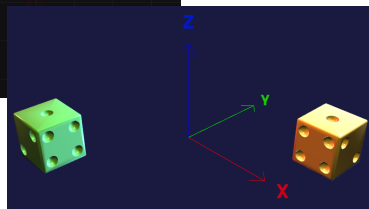
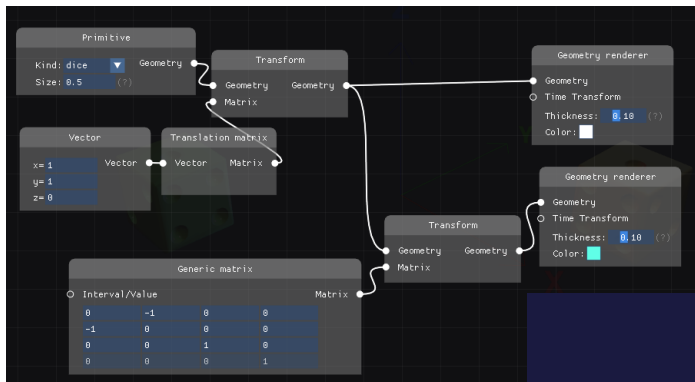
La matrice di riflessione cercata diventa dunque:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Esercizio 2 - iv



## Esercizio 2 - v

Il calcolo di  $Q = \mathbb{I} - 2t\hat{v}\hat{v}^T$  è molto simile, dobbiamo solo stare attenti a  $t$ :

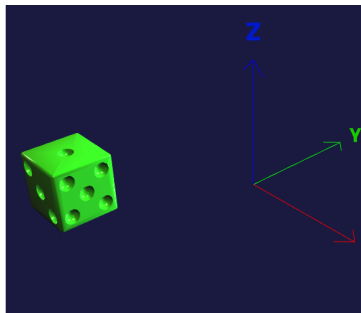
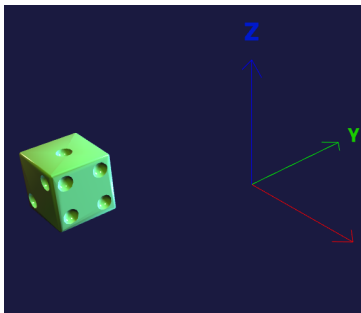
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2t \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2t \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t & t & 0 \\ t & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Esercizio 2 - vi

Confrontiamo questo risultato (sx) con quello precedente (dx)



Il dado si trova nella stessa posizione, ma le facce sono orientate in maniera diversa. La riflessione ne ha cambiato l'ordine!

Ruotando la scena ottenuta in questo esercizio si può verificare che l'ordine nel dado originale è 2-3-5-4, nel dado riflesso è 2-4-5-3.



## Esercizio 3

Dati i due vettori  $\mathbf{u} = [0, 1, 2]^T$  e  $\mathbf{v} = [0, -3, 1]^T$ :

- ▶ Determinare se i due vettori siano paralleli.
- ▶ Determinare se i due vettori siano perpendicolari tra loro.
- ▶ Rappresentare nel FranzPlot i due vettori, spiccandoli entrambi dall'origine degli assi.

## Esercizio 3 - i

$$\mathbf{u} // \mathbf{v} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, t \neq 0, \text{ tale che } \mathbf{u} = t\mathbf{v}$$

$$\begin{cases} u_x = t \cdot v_x \\ u_y = t \cdot v_y \\ u_z = t \cdot v_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \ t \\ 1 = -3 \ t \\ 2 = 1 \ t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{nessuna informazione} \\ t = -1/3 \\ t = 2 \end{cases}$$

La seconda e terza equazione sono in contraddizione, pertanto non esiste alcuna  $t$  che soddisfi il sistema lineare

$\Rightarrow \mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  non sono paralleli.

## Esercizio 3 - ii

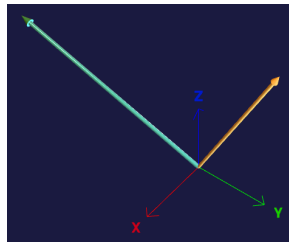
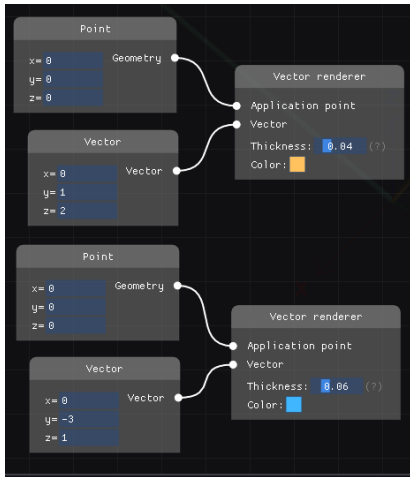
$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 = -1$$

Poiché il prodotto scalare dei due vettori è diverso da zero, sappiamo che essi non sono perpendicolari.

## Esercizio 3 - iii



Notare come da alcune angolazioni i vettori potrebbero sembrare perpendicolari anche se in realtà non lo sono.

## Esercizio 4

Dati i seguenti punti con relative coordinate:  $A(1, 0, 1)$ ,  $B(0, 2, 2)$ ,  $C(1, 1, 3)$  e  $D(2, -1, 2)$

- ▶ Calcolare i vettori  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$ .
- ▶ Determinare se i due vettori siano paralleli.
- ▶ Rappresentare i due vettori nel FranzPlot .

## Esercizio 4 - i

Determiniamo i due vettori:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \\ B_z - A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} D_x - C_x \\ D_y - C_y \\ D_z - C_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

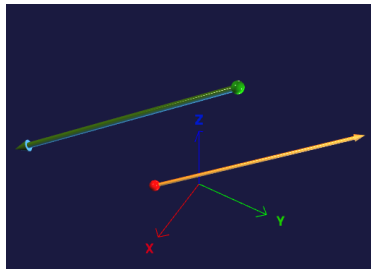
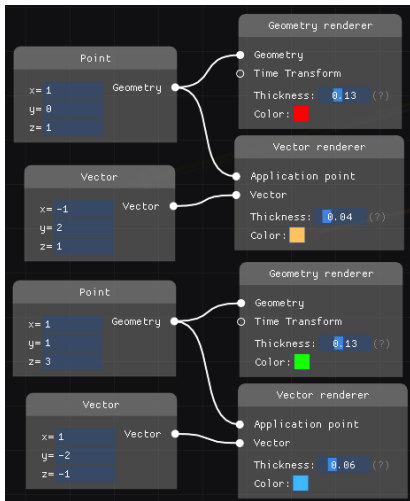
e proseguiamo impostando il sistema lineare come in precedenza:

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, t \neq 0, \text{ t.c. } \overrightarrow{AB} = t \overrightarrow{CD}$$

$$\begin{cases} -1 = 1 t \\ 2 = -2 t \\ 1 = -1 t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$$

Poiché  $t = -1$  soddisfa tutte le equazioni del sistema, possiamo affermare che  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  sono paralleli.

## Esercizio 4 - ii



Per disegnare correttamente i vettori, è fondamentale spicarli correttamente!

( $\overrightarrow{AB}$  parte da A,  $\overrightarrow{CD}$  parte da C!)

## Esercizio 5

Dati i due vettori  $\mathbf{u} = [1, 1, -2]^T$  e  $\mathbf{v} = [0.5, -0.5, -0.5]^T$ :

- ▶ Calcolare il vettore  $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$
- ▶ Rappresentare nel FranzPlot i tre vettori, con l'origine degli assi come punto di applicazione.
- ▶ Rappresentare nel FranzPlot il piano passante per l'origine e avente normale  $\mathbf{w}$ . Verificare che  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  giacciono sul piano.
- ▶ Cosa cambierebbe se anziché  $\mathbf{w}$  usassimo  $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$ ?



## Esercizio 5 - i

Ricordiamo la formula generica per il calcolo del prodotto vettore:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ b_x a_z - a_x b_z \\ a_x b_y - b_x a_y \end{bmatrix}$$

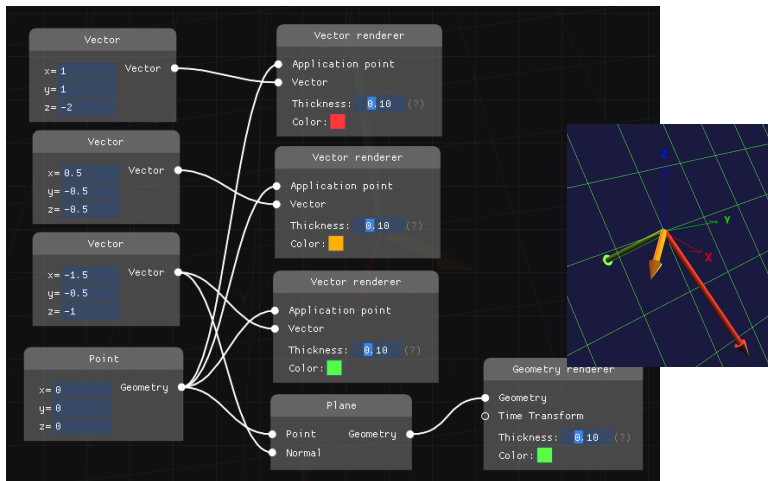
Nel nostro caso:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-0.5) - (-0.5) \cdot (-2) \\ 0.5 \cdot (-2) - 1 \cdot (-0.5) \\ 1 \cdot (-0.5) - (0.5) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 - 1 \\ -1 + 0.5 \\ -0.5 - 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ -0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi trovato il risultato che cercavamo:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ -0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

## Esercizio 5 - ii



## Esercizio 5 - iii

Dalla teoria sappiamo che

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

ovvero invertendo l'ordine del prodotto vettoriale otteniamo un vettore con i segni opposti rispetto al precedente.

$$\tilde{\mathbf{w}} = -\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dal punto di vista geometrico, significa che il vettore ha stesso modulo e direzione, ma verso opposto.