Curve e Superfici per il Design
Laboratorio - 3

Prof. Nicola Parolini

31 Ottobre 2019

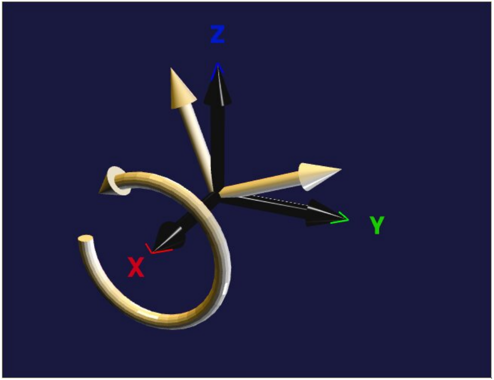
Materiali

Il materiale per l'esercitazione di oggi:

- Questa presentazione
  (`Materiale Didattico/Laboratori/lab 3/lab3_testo.pdf`);
- L'eseguibile del FranzPlot
  (`Software/Franzplot 19.08 - Windows.exe`)

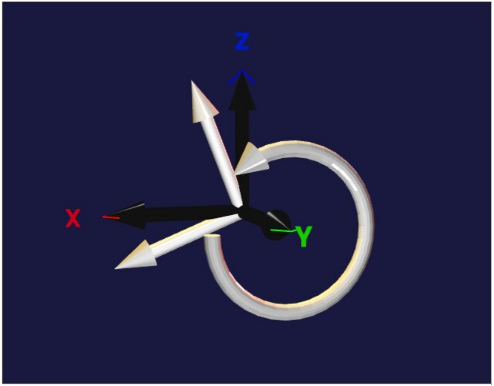
Rotazioni: Asse x

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{1}$$



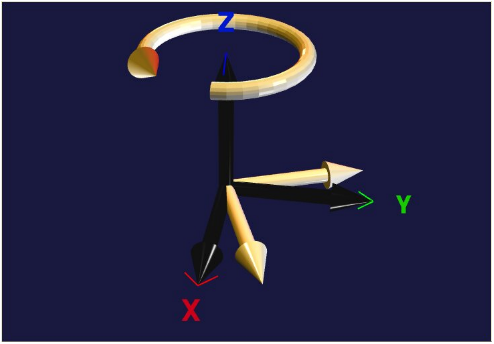
Rotazioni: Asse y

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{2}$$



Rotazioni: Asse z

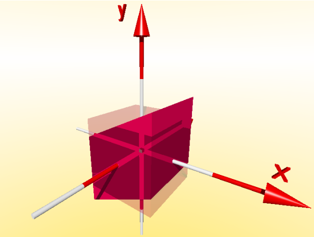
$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

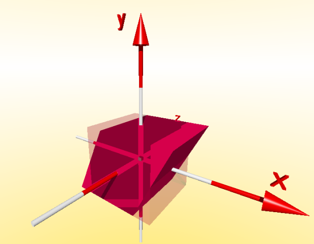


Tagli

Taglio in direzione x sulle facce con normale y:

$$T_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & k_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$





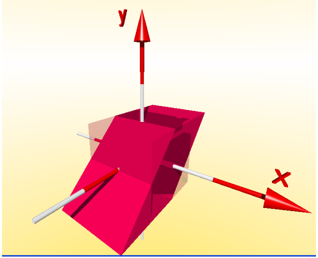
Taglio in direzione y sulle facce con normale x:

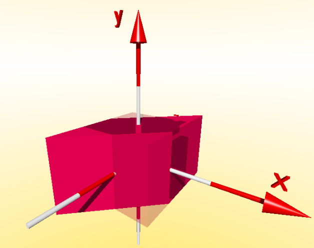
$$T_{yx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Tagli[2]

Taglio in direzione z sulle facce con normale x:

$$T_{zx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k_z & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$





Taglio in direzione z sulle facce con normale y:

$$T_{zy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_z & 1 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Scalatura, Riflessione,Proiezione

- Scalatura

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix} \tag{8}$$

- Riflessione

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \tag{9}$$

- Proiezione

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \tag{10}$$

Coordinate omogenee

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + t_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + t_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + t_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1 - Moltiplicazioni matrice-matrice

Date le due matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcolare la matrice $M = AB$
- Calcolare la matrice $N = BA$

Esercizio 1 - i

Calcolo di M:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice M risultante sarà una matrice 4×4, e dobbiamo calcolarla elemento per elemento:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

Esercizio 1 - ii

L'elemento m_{ij}, ovvero quel numero contenuto nella matrice M e posizionato nella **riga i** e nella **colonna j**, è il **prodotto scalare** dei vettori **riga i-esima di A** e **colonna j-esima di B**
Vediamo il calcolo di alcuni elementi di matrice:

$$m_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 5$$

Esercizio 1 - iii

$$m_{21} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \text{-}2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$m_{23} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \text{-}2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \text{-}3 + 1 \cdot 0 = \text{-}6$$

E così via per tutti gli altri elementi.

Esercizio 1 - iv

Poiché ogni singolo elemento di matrice richiede il calcolo di un prodotto scalare di due vettori, per calcolare la matrice M dovremo calcolare **16** prodotti scalari.

- Allenarsi nel calcolo a mente dei prodotti scalari ci permette di non consumare quantità industriali di carta.

Nei nostri esercizi in genere le matrici contengono molti zeri, questo semplifica molto i calcoli.

- In particolare, quando lavoriamo in coordinate omogenee **l'ultima riga** di una qualsiasi matrice di trasformazione è sempre $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Esercizio 1 - v

Svolgendo tutti i calcoli, giungiamo al risultato:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per il calcolo di N, cambia l'ordine delle matrici da moltiplicare!

$$N = BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 1 - vi

Poiché in generale la moltiplicazione tra matrici non è commutativa, cambia anche il risultato:

$$N = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ -7 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In generale è sempre necessario calcolare il risultato di un prodotto matrice-matrice quando cerchiamo di comporre due trasformazioni! Tuttavia esiste una eccezione che vedremo più avanti.

Esercizio 2

- Scrivere la matrice S che descrive la scalatura con $S_x = 0.5$, $S_y = 0.5$, $S_z = 1$.
- Scrivere la matrice R che descrive la rotazione di 90° intorno l'asse Y.
- Calcolare la matrice $M = RS$.
- Usando il FranzPlot , creare una primitiva 'cono' e applicare la trasformazione rappresentata dalla matrice M.
- Verificare che la trasformazione M corrisponde all'applicare **prima** una scalatura e **poi** una rotazione.
- Cosa succederebbe se invece applicassimo prima la rotazione e poi la scalatura?

Esercizio 2 - i

Matrice di scalatura S:

$$S = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione R:

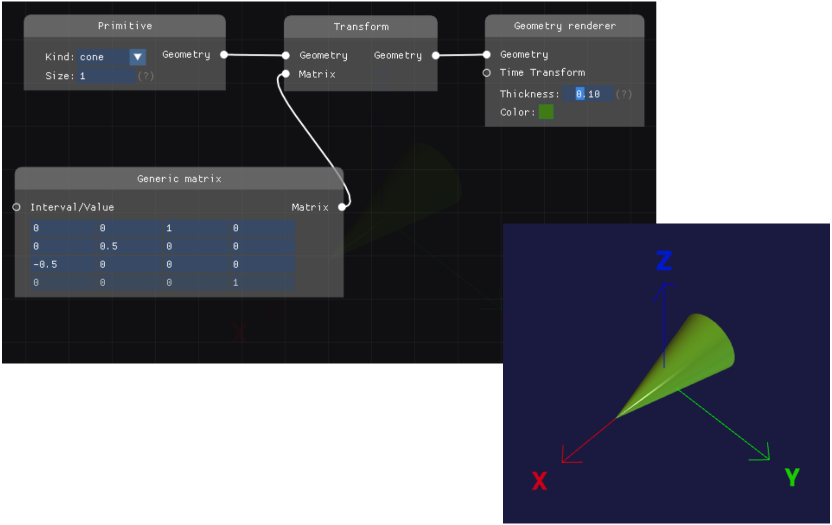
$$R = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & 0 & \sin(\pi/2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\pi/2) & 0 & \cos(\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2 - ii

Matrice M:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2 - iii

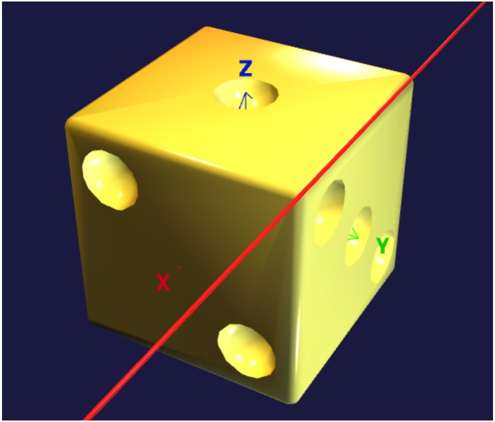


Esercizio 3

- Creare un oggetto di tipo ‘dado’ che abbia lato di dimensione pari a 2.
- Scrivere la matrice M che descrive la rotazione di 90° intorno alla retta che passa per il punto $P(1,1,1)$ ed è parallela all’asse X.

Esercizio 3 - traccia di soluzione

Il nostro obiettivo è quello di ruotare il dado intorno a uno dei suoi lati, anzichè ruotarlo su se stesso.



Nell'immagine, la retta di cui parla l'esercizio è segnata in rosso

Esercizio 3 - traccia di soluzione

Non abbiamo una formula per rotazioni intorno ad un asse generico. Tuttavia, in questo caso possiamo:

1. Traslare il dado di un vettore tale che il punto P venga traslato sull'origine degli assi (T_1)
   $\Rightarrow$ In questa maniera, la retta rossa coinciderà con l'asse X
2. Applicare una rotazione intorno l'asse X (R)
3. Traslare nuovamente il dado riportando il punto P alla sua posizione iniziale (T_2)

La trasformazione cercata sarà quindi la composizione delle tre trasformazioni, e la matrice che la rappresenta sarà $M = T_2 R T_1$.

Esercizio 3 - i

Voglio che il punto P vada in O origine degli assi: devo traslare del vettore $\overrightarrow{PO}$.

$$\overrightarrow{PO} = \begin{bmatrix} 0 - P_x \\ 0 - P_y \\ 0 - P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Quindi la matrice di traslazione in coordinate omogenee sarà:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3 - ii

La matrice R è una comune matrice di rotazione intorno all'asse X. Ricordando che $cos(\pi/2) = 0$ e $sin(\pi/2) = 1$, abbiamo:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) & 0 \\ 0 & \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3 - iii

Per l'ultimo step, voglio la traslazione che riporta lo spigolo del dado nella posizione iniziale, quindi voglio andare dal punto O in P. Scrivo il vettore $\overrightarrow{OP}$:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} P_x - 0 \\ P_y - 0 \\ P_z - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi la matrice di traslazione in coordinate omogenee sarà:

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3 - iv

Componiamo ora le tre trasformazioni per ottenere il risultato richiesto. Come già detto, $M = T_2 R T_1$. Dobbiamo moltiplicare 3 matrici, iniziamo moltiplicando le due più a destra; per comodità chiamiamo questo risultato intermedio M_1:

$$M_1 = RT_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

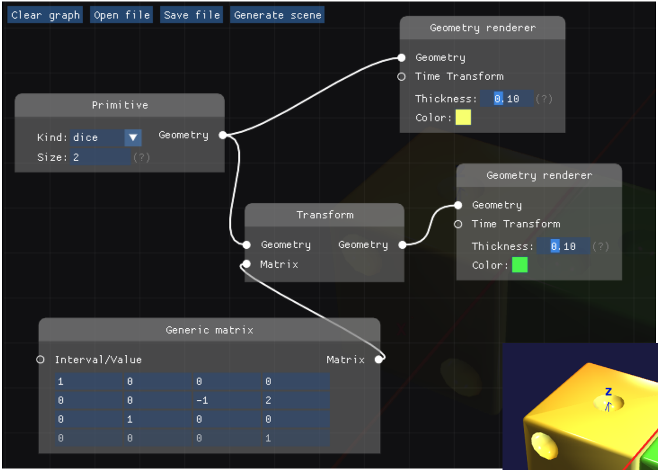
Esercizio 3 - v

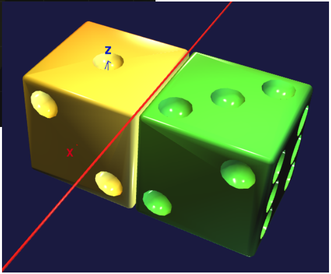
Eseguiamo ora una ulteriore moltiplicazione matrice-matrice per completare il calcolo di M:

$$M = T_2 R T_1 = T_2 M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3 - vi





Esercizio 3 - note

Nel calcolo di M_1 abbiamo composto **prima** una traslazione e **poi** una rotazione; abbiamo dovuto svolgere la moltiplicazione.
Nel calcolo di M invece la abbiamo composto **prima** una certa trasformazione e **poi** una traslazione. Quando l'ultima trasformazione applicata è una traslazione, abbiamo una scorciatoia! Siano date

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Allora

$$TA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} + t_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} + t_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} + t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3 - note

Nel nostro caso specifico:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = T_2 M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (-1+1) \\ 0 & 0 & -1 & (1+1) \\ 0 & 1 & 0 & (-1+1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sottolineiamo che questo è possibile **solo se la traslazione viene applicata dopo** l'altra generica trasformazione.