תרגיל מס׳: 2

מגיש: רועי בלוק

תעודת זהות: 207733395

207733395

תרגיל בית מספר 2

שאלה 1

יהיו שני מאורעות A ו- B עבורם מתקיים $P(A|B) > P(A)$. הוכח ש:

1. $P(B|A) > P(B)$
2. $P(B^c|A) < P(B^c)$
3. $P(B^c|A^c) > P(B^c)$

שאלה 2

ב k כדים יש m כדורים לבנים ו n כדורים שחורים כל אחד. בוחרים כדור באקראי מהכד הראשון ושמים בכד השני. אז לוקחים כדור באקראי מהכד השני ושמים בשלישי, וכו. לבסוף מוציאים כדור באקראי מכד מספר k.

א. הראו באינדוקציה שהסיכוי שיצא לבן בהוצאה האחרונה שווה לסיכוי שיצא לבן בכד הראשון.

ב. אם ידוע שיצא לבן בכד השלישי, מה הסיכוי שיצא לבן בכד הראשון.

שאלה 3

נתונים $N+1$ כדים הממוספרים $0,1,2 \dots N$. בכד ה i ישנם i כדורים שחורים ו $N-i$ כדורים לבנים. בוחרים כד באקראי ולאחר מכן מוציאים ממנו כדור באקראי, רושמים את צבעו ומחזירים אותו לכד. לאחר מכן, מוציאים כדור מאותו הכד, רושמים את צבעו, ומחזירים אותו לכד, וכך הלאה.

א. עבור $i = 0,1 \dots N$, בהינתן שב-n ההוצאות הראשונות הוצאו רק כדורים שחורים, מה ההסתברות שבחרנו בכד i?

ב. בהינתן שב-n ההוצאות הראשונות הוצאו רק כדורים שחורים, מה ההסתברות שהכדור הבא יהיה שחור?

שאלה 4

חברת ייעוץ ניגשה למכרז בשני פרויקטים. על פי הערכתה, ההסתברות שלה לזכות בפרויקט א׳ היא 0.6, בפרויקט ב׳ 0.3, ואילו ההסתברות שלא תזכה באף אחד מהפרויקטים היא 0.25.
חשב את ההסתברות שהחברה תזכה בפרויקט ב׳ בהינתן שהיא:

א. זכתה לפחות בפרויקט אחד.
ב. זכתה בדיוק בפרויקט אחד.
ג. זכתה בפרויקט א׳.

<u>שאלה 5</u>

במיכל x כדורים שחורים ו-y כדורים לבנים. בוחרים באקראי סדרות כדורים לפי החוקים הבאים: בכל בחירה בוחרים רק כדור אחד, ואז מחזירים אותו פלוס z כדורים נוספים באותו צבע (למשל, אחרי n בחירות והחזרות, נמצאים במיכל $(x+y)+n\cdot z$ כדורים).

1. **בהינתן שהכדור השני היה שחור, מה ההסתברות שהראשון היה לבן?**
2. **הוכח באמצעות אינדוקציה, שההסתברות לבחור כדור לבן בשלב כלשהו היא $\frac{y}{x+y}$.**
3. **מה ההסתברות שאחרי n בחירות נבחרו n_B כדורים שחורים ו-n_W כדורים לבנים?**

<u>שאלה 6</u>

בהינתן יום שמשי, ההסתברות שיום למחרת יהיה יום גשום היא 1/2.

בנוסף, בהינתן בדיוק k ימים גשומים <u>רצופים</u>, ההסתברות שהיום למחרת יהיה יום שמשי היא $\frac{1}{k+1}$.

בהינתן שהיום יום שמשי, חשבו את ההסתברות ש n-הימים הבאים יהיו כולם ימים גשומים.

<u>שאלה 7</u>

לחשבון בנק משותף לבני זוג יש שתי סיסמאות – אחת לכל אחד מבני הזוג. סיסמאות בבנק יכולות להיות אחת מתוך n סיסמאות אפשריות, ולאחר k ניסיונות החשבון ננעל ולא ניתן יותר לנסות סיסמאות. האקר מתכנן התקפת מילון על הבנק, בה הוא מנחש את הסיסמאות השונות בבנק בסדר אקראי (לכל סדר הסתברות שווה). מה ההסתברות שההאקר יפרוץ לחשבון בדיוק בניסיון הk?

<u>שאלה 8</u>

בפקולטה להנדסת תעשייה וניהול ניתנים השנה 3 קורסים: סטטיסטיקה, מבני נתונים וחישוביות.
בוחרים סטודנט אקראי ושואלים אותו אם למד/הצליח בכל אחד מהקורסים.
נתון:

- **ההסתברות שהסטודנט הצליח במבחן בסטטיסטיקה היא 0.85, ההסתברות שלמד למבחן בסטטיסטיקה היא 0.9 וההסתברות שלמד והצליח במבחן בסטטיסטיקה היא 0.8.**
- **ההסתברות שהסטודנט למד והצליח במבחן במבני נתונים היא 0.67, ואילו ההסתברות שלא למד והצליח במבחן זה היא 0.2.**
- **ההסתברות שהסטודנט הצליח במבחן בחישוביות אינה אפס.**
- **על פי דרישות הקורס בחישוביות, סטודנט לא יכול לקחת את הקורס במקביל לקורס במבני נתונים (כלומר לא יתכן שיצליח בשני הקורסים ביחד).**

א. מה ההסתברות שסטודנט למד למבחן בסטטיסטיקה בהינתן שהוא הצליח בו?
ב. מה ההסתברות שסטודנט הצליח במבחן במבני נתונים?

207733395

שאלה 1

יהיו שני מאורעות A ו- B עבורם מתקיים $P(A|B) > P(A)$. הוכח ש:

1. $P(B|A) > P(B)$
2. $P(B^c|A) < P(B^c)$
3. $P(B^c|A^c) > P(B^c)$

א) לפי הגדרה

$$p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

ומנתון

$$\frac{p(A\cap B)}{p(B)} > p(A) \quad / \cdot p(B) : p(A)\neq 0$$

$$\frac{p(A\cap B)}{p(A)} > p(B)$$

לפי הגדרה

$$p(B|A) > p(B)$$

$$\frac{p(B^c\cap A)}{\cancel{p(A)}} \qquad \frac{p(B\cap A)}{\cancel{p(A)}}$$

ב) נתון:

$$\begin{cases} p(A|B) > p(A) \\ p(B|A) > p(B) \end{cases}$$

צ"ל: $P(B^c|A) < P(B^c)$ .2

$$p(B^c|A) \underset{\text{תכונות משלים}}{=} 1-p(B|A) \underset{\text{סעיף א}}{<} 1-p(B) \underset{\text{תכונות משלים.}}{=} p(B^c) \Rightarrow p(B^c|A) < p(B^c)$$

ג) צ"ל: $p(B^c|A^c) > p(B^c)$

$$p(B^c|A^c) = \frac{p(B^c\cap A^c)}{p(A^c)} \underset{\text{דה מורגן}}{=} \frac{p((A\cup B)^c)}{p(A^c)} \underset{\text{משלים}}{=} \frac{1-p(A\cup B)}{p(A^c)} =$$

$$\underset{\text{הכלה והדרה}}{=} \frac{1-p(A)-p(B)+p(A\cap B)}{p(A^c)} \underset{\text{כלל הכפל}}{=} \frac{1-p(A)-p(B)+p(A)\cdot p(B|A)}{p(A^c)}$$

סעיף ב

גורם משותף

$$> \frac{1-p(A)-p(B)+p(A)\cdot p(B)}{p(A^c)} \overset{?}{=} \frac{1-p(A)(1-p(B))-p(B)}{p(A^c)}$$

$$= \frac{(1-p(B))(1-p(A))}{1-p(A)} = 1-p(B) = p(B^c)$$

כלל משלים

$$\Downarrow$$

$$p(B^c|A^c) > p(B^c)$$

207733395

שאלה 2

ב k כדים יש m כדורים לבנים ו n כדורים שחורים כל אחד. בוחרים כדור באקראי מהכד הראשון ושמים בכד השני. אז לוקחים כדור באקראי מהכד השני ושמים בשלישי, וכו. לבסוף מוציאים כדור באקראי מכד מספר k.

א. הראו באינדוקציה שהסיכוי שיצא לבן בהוצאה האחרונה שווה לסיכוי שיצא לבן בכד הראשון.

ב. אם ידוע שיצא לבן בכד השלישי, מה הסיכוי שיצא לבן בכד הראשון.

א) k כדים, m כדורים לבנים, n כדורים שחורים.

בסיס:

עבור $n=1$, ההוצאה הראשונה היא גם האחרונה.

נשתמש בסימון: W_2 הסיכוי להוציא לבן בהוצאה 2 $\Leftarrow$ כד, מספר הוצאה.

$$p(W_1) = \frac{m}{m+n} = p(W_n)$$

נניח כי עבור n כלשהו, $p(W_1) = p(W_n)$

נוכיח עבור $n+1$:

נשתמש בחוק ההסתברות השלמה:

207733395

$$p(W_{n+1}) = p(W_{n+1}|W_n)p(W_n) + p(W_{n+1}|W_n^c)\cdot p(W_n^c)$$

מהנחת האינדוקציה אנו יודעים כי:

$$p(W_n) = p(W_1) = \frac{n}{m+n}$$

ומכאן מסיקים אנו יודעים:
$$p(b_n) = 1 - p(W_n) = 1 - p(W_1) = p(b_1)$$

לכן:

$$p(W_{n+1}) = \frac{n+1}{m+n+1}\cdot\frac{n}{m+n} + \frac{n}{m+n+1}\cdot\frac{m}{m+n}$$

$$= \frac{n(n+1)+nm}{(m+n+1)(m+n)} = \frac{n(n+m+1)}{(m+n+1)(m+n)} = \frac{n}{m+n} = p(W_1)$$

כנדרש.

הוכחנו באינדוקציה ■

ב. אם ידוע שיצא לבן בכד השלישי, מה הסיכוי שיצא לבן בכד הראשון.

$$p(W_1|W_3) \underset{\text{לפי חוק בייס}}{=} p(W_3|W_1)\cdot\frac{p(W_1)}{p(W_3)}$$

$$p(W_1) \underset{\text{מסעיף א'}}{=} p(W_3) = \frac{N}{M+N} \implies p(W_3|W_1) = p(W_1|W_3)$$

$$p(W_3|W_1) = \frac{p(W_3\cap W_1)}{p(W_1)} \underset{\text{הסתברות שלמה}}{=} \frac{p(W_3\cap W_1\cap W_2) + p(W_3\cap W_1\cap W_2^c)}{p(W_1)}$$

כלל הכפל

$$= \frac{\cancel{\frac{N}{M+N}}\cdot\frac{N+1}{M+N+1}\cdot\frac{N+1}{M+N+1} + \cancel{\frac{N}{M+N}}\cdot\frac{M}{M+N+1}\cdot\frac{N}{M+N+1}}{\cancel{\frac{N}{M+N}}}$$

$$= \frac{(N+1)^2 + mN}{m+N+1}$$

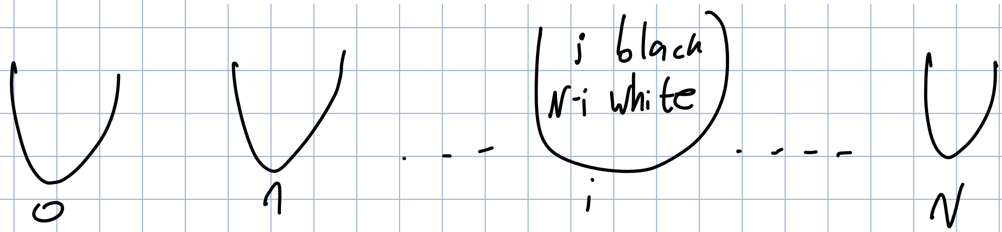
שאלה 3

נתונים $N+1$ כדים הממוספרים $0,1,2 \dots N$. בכד ה i ישנם i כדורים שחורים ו $N-i$ כדורים לבנים. בוחרים כד באקראי ולאחר מכן מוציאים ממנו כדור באקראי, רושמים את צבעו ומחזירים אותו לכד. לאחר מכן, מוציאים כדור מאותו הכד, רושמים את צבעו, ומחזירים אותו לכד, וכך הלאה.

א. עבור $i=0,1 \dots N$, בהינתן שב-n ההוצאות הראשונות הוצאו רק כדורים שחורים, מה ההסתברות שבחרנו בכד i?

ב. בהינתן שב-n ההוצאות הראשונות הוצאו רק כדורים שחורים, מה ההסתברות שהכדור הבא יהיה שחור?

א



נסמן: C_i - ההסתברות לבחור בכד ה i

A_n - ההסתברות שב n ההוצאות הראשונות יצאו רק שחורים.

$$P(C_i|A_n) = P(A_n|C_i)\cdot\frac{P(C_i)}{P(A_n)}$$

חוק ביים

$$P(A_n|C_i) = \left(\frac{i}{N}\right)^n$$ //בכד ה i יש i כדורים שחורים, ולפי עקרון הכפל

$$P(C_i) = \frac{1}{N+1}$$ //בחירה אקראית בין N+1 כדים

$$P(A_n) = P(A_n \cap C_0)\cdot P(C_0) + \dots + P(A_n \cap C_N)\cdot P(C_N)$$

חוק ההסתברות השלמה.

207733395

$$= \frac{1}{N+1}\left(\left(\frac{0}{N}\right)^n + \left(\frac{1}{N}\right)^n + \dots + \left(\frac{N}{N}\right)^n\right) = \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^n$$

$$\Longrightarrow p(A_n \mid C_i)\cdot\frac{p(C_i)}{p(A_n)} = \frac{\left(\frac{i}{N}\right)^n\cdot\cancel{\frac{1}{N+1}}}{\cancel{\frac{1}{N+1}}\cdot\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^n} = \frac{j^n}{\sum_{j=0}^{N} j^n}$$

ב. **בהינתן שב-n ההוצאות הראשונות הוצאו רק כדורים שחורים, מה ההסתברות שהכדור הבא יהיה שחור?**

נגדיר: A_n - ב n ההוצאות הראשונות יצאו רק שחורים.

B - הכדור ה $n+1$ יהיה שחור.

$$p(B \mid A_n) = \frac{p(B\cap A_n)}{p(A_n)}$$

סעיף א

$$A_n = \frac{1}{N+1}\cdot\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^n$$

$$p(B\cap A_n) = p(A_{n+1}) = \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n+1}$$

כהגדרת B, A_n

$$\frac{p(B\cap A_n)}{p(A_n)} = \frac{p(A_{n+1})}{p(A_n)} = \frac{\cancel{\frac{1}{N+1}}\cdot\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n+1}}{\cancel{\frac{1}{N+1}}\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{i}{N}\right)^{n}} = \frac{1}{N}\cdot\frac{\sum_{i=0}^{N} i^{n+1}}{\sum_{i=0}^{N} i^{n}}$$

ניתן להשתמש בקירוב:

$$\left(\sum_{j=0}^{N} j^{n+1} = \int_0^N j^{n+1} = \frac{j^{n+2}}{n+2}\Big|_0^N = \frac{N^{n+2}}{n+2}\right.$$

ובאופן דומה

$$\left.\sum_{j=0}^{N} j^{n} = \frac{N^{n+1}}{n+1}\right)$$

207733395

ולכן נקבל:

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{\frac{N^{n+2}}{n+2}}{\frac{N^{n+1}}{n+1}}=\frac{n+1}{n+2}$$

שאלה 4

חברת ייעוץ ניגשה למכרז בשני פרויקטים. על פי הערכתה, ההסתברות שלה לזכות בפרויקט א' היא 0.6, בפרויקט ב' 0.3, ואילו ההסתברות שלא תזכה באף אחד מהפרויקטים היא 0.25.

חשב את ההסתברות שהחברה תזכה בפרויקט ב' בהינתן שהיא:

א. זכתה לפחות בפרויקט אחד.

ב. זכתה בדיוק בפרויקט אחד.

ג. זכתה בפרויקט א'.

א) נסמן

S_+ - זכייה בלפחות פרויקט אחד 0.75

B - זכייה בפרויקט ב 0.3

A - זכייה בפרויקט א 0.6

S_0 - סיכוי לאפס זכיות 0.25

$p(B|S_+)$

נתון

$$p(S_+)=1-p(S_0)=1-0.25=0.75$$

$$p(B)=0.3$$

$$p(B|S_+)=\frac{p(B\cap S_+)}{p(S_+)}=\frac{0.3}{0.75}=0.4$$

ב) נגדיר S_1 - זכייה בדיוק במכרז אחד

נחפש: $p(B|S_1)$

$$p(S_1)=p\big((A\cap B')\cup(A'\cap B)\big)=p(A\cap B')+p(A'\cap B)$$

זרות

207733395

נחשב את $p(A\cap B')$:

נשתמש בחוק ההסתברות השלמה ונקבל כי:

$$p(A')=p(A'\cap B)+p(A'\cap B')$$

נציב את הנתונים ונקבל:

$$0.4=p(A'\cap B)+0.25$$
$$p(A'\cap B)=0.15$$

באותו אופן נחשב את $p(A\cap B')$

$$p(B')=p(B'\cap A')+p(B'\cap A)$$
$$0.7=0.25+p(B'\cap A)$$
$$p(B'\cap A)=0.45$$

$$p(B\mid S_1)=\frac{p(B\cap S_1)}{p(S_1)}=\frac{0.15}{0.6}=0.25 \Longleftarrow$$

ג. זכתה בפרויקט א'.

$$p(B|A)=\frac{\overset{\#1}{p(B\cap A)}}{p(A)}=\frac{0.15}{0.6}=0.25$$

#1

$$p(B)=p(B\cap A)+p(B\cap A')$$

חוק ההסתברות השלמה

$$0.3=p(B\cap A)+0.15$$
$$p(B\cap A)=0.15$$

207733395

<u>**שאלה 5**</u>

במיכל x כדורים שחורים ו-y כדורים לבנים. בוחרים באקראי סדרות כדורים לפי החוקים הבאים: בכל בחירה בוחרים רק כדור אחד, ואז מחזירים אותו פלוס z כדורים נוספים באותו צבע (למשל, אחרי n בחירות והחזרות, נמצאים במיכל $(x+y)+n\cdot z$ כדורים).

1. **בהינתן שהכדור השני היה שחור, מה ההסתברות שהראשון היה לבן?**
2. **הוכח באמצעות אינדוקציה, שההסתברות לבחור כדור לבן בשלב כלשהו היא $\frac{y}{x+y}$.**
3. **מה ההסתברות שאחרי n בחירות נבחרו n_B כדורים שחורים ו-n_W כדורים לבנים?**

1) x שחורים, y לבנים

נשתמש בסימון הוצאות כמו בשאלה 2.

בייס

$$p(W_1 \mid B_2) = p(B_2 \mid W_1)\cdot\frac{p(W_1)}{p(B_2)}$$

הסתברות שלמה

$$p(B_2) = p(B_2 \mid W_1)\,p(W_1) + p(B_2 \mid B_1)\,|\,p(B_1)$$

$$= \frac{x}{x+y+z}\cdot\frac{y}{x+y} + \frac{x+z}{x+y+z}\cdot\frac{x}{x+y}$$

$$= \frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+y+z)} = \frac{x}{x+y}$$

$$p(B_2 \mid W_1) = \frac{x}{x+y+z}$$

$$\Longrightarrow p(W_1 \mid B_2) = p(B_2 \mid W_1)\cdot\frac{p(W_1)}{p(B_2)} = \frac{x}{x+y+z}\cdot\frac{\frac{y}{x+y}}{\frac{x}{x+y}} = \frac{y}{x+y+z}$$

207733395

ⓑ בסיס:

עבור n=1, אכן מתקיים:

$$p(W_1)=\frac{y}{x+y}$$

נניח שעבור n כלשהו, $p(W_n)=\frac{y}{x+y}$

נוכיח עבור n+1.

חוק ההסתברות השלמה.

$$p(W_{n+1})=p(W_{n+1}\mid W_1)\cdot p(W_1)+p(W_{n+1}\mid B_1)\cdot p(B_1)$$

התנייה כאן אומרת בעצם מה ההסתברות להוציא כדור מסוים בהוצאה ה n+1, לאחר שיש בכד x+z כדורים שחורים או y+z כדורים לבנים בהתאמה, לסדר הבא. (←)

$$=\frac{y}{x+y}\cdot p(W_{n+1}\mid W_1)+\frac{x}{x+y}\cdot p(W_{n+1}\mid B_1)$$

ניתן להוסיף את המצב בכל מני ההסתברויות להוציא לבן בהוצאה ה n כאשר בהתחלה בכד, יש x+z כדורים לבנים. ולפי הנחת האינדוקציה נקבל:

$$=\frac{y}{x+y}\cdot\frac{y+z}{x+y+z}+\frac{x}{x+y}\cdot\frac{y}{x+y+z}$$

$$=\frac{y\,(x+y+z)}{(x+y)(x+y+z)}=\frac{y}{x+y}$$

והוכחנו באינדוקציה.

3. מה ההסתברות שאחרי n בחירות נבחרו n_B כדורים שחורים ו- n_W כדורים לבנים?

ראשית נבחר מבין n ההוצאות את ההוצאות בהן נשלוף כדור שחור:

$$\binom{n}{n_B}$$

וכעת נבחר, למשל את הפירוק בו ב n_B ההוצאות הראשונות יצא כדור שחור:

$$S=(\underbrace{b,b,\dots,b}_{n_B},\underbrace{w,\dots,w}_{n_W})$$

לפי כלל הכפל נקבל:

$$p(S)=\frac{x}{x+y}\cdot\frac{x+z}{x+y+z}+\frac{x+2z}{x+y+2z}+\dots\frac{x+(n_B-1)z}{x+y+(n_B-1)z}$$

$$+\dots\frac{y+(n_W-1)z}{x+y+(n-1)z}$$

ונשים לב, כי לכל סידור של הוקטור הבינארי, מספר המכפלות והמכנים (שזורים) נכונים, ומה שמשתנה זה רק סדר המונים

ולכן כל יחיד ע ההסתברות תהיה זהה. ונשאר לנו:

$$p(A)=\binom{n}{n_B}\cdot p(S)$$

מעוקדם.

207733395

<u>שאלה 6</u>

בהינתן יום שמשי, ההסתברות שיום למחרת יהיה יום גשום היא 1/2.

בנוסף, בהינתן בדיוק k ימים גשומים <u>רצופים</u>, ההסתברות שהיום למחרת יהיה יום שמשי היא $\frac{1}{k+1}$.

בהינתן שהיום יום שמשי, חשבו את ההסתברות ש n-הימים הבאים יהיו כולם ימים גשומים.

נתון

יום ראשון: $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = p(d_1)$

יום שני: $1-\frac{1}{2} \rightarrow \frac{2}{3} = p(d_2|d_1)$

יום שלי: $1-\frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{4} = p(d_3|d_2\cap d_1)$

$\vdots$

יום n: $1-\frac{1}{n} \rightarrow \frac{n-1}{n} \quad p(d_n|d_{n-1}\cap\ldots d_1)$

כלל הכפל

$$p(d_1\cap d_2\cap\ldots d_n) \overset{!}{=} p(A_1)\cdot p(A_2|A_1)\cdot\ldots p(A_n|A_{n-1}\cap\ldots A_1)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}$$

זוהי מכפלה טלסקופית, נקבל:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{4}\cdot\ldots\cancel{}\cdot\frac{\cancel{n-1}}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}$$

207733395

שאלה 7

לחשבון בנק משותף לבני זוג יש שתי סיסמאות – אחת לכל אחד מבני הזוג. סיסמאות בבנק יכולות להיות אחת מתוך n סיסמאות אפשריות, ולאחר k ניסיונות החשבון ננעל ולא ניתן יותר לנסות סיסמאות. האקר מתכנן התקפת מילון על הבנק, בה הוא מנחש את הסיסמאות השונות בבנק בסדר אקראי (לכל סדר הסתברות שווה). מה ההסתברות שההאקר יפרוץ לחשבון בדיוק בניסיון הk?

על האקר לעבור בכל $k-1$ הנסיונות הראשונים

נסמן זאת ב: $p(t_1' \cap t_2' \cap .. t_{k-1}')$

ולבדוק בניסיון ה k. נסמן זאת ב $p(t_k)$

נבין את ההסתברויות השונות:

$$p(t_1) = \frac{2}{n} \Rightarrow p(t_1') = \frac{n-2}{n}$$

$$p(t_2 | t_1') = \frac{2}{n-1} \Rightarrow p(t_2' | t_1') = \frac{n-3}{n-1}$$

$$\vdots$$

$$p(t_{k-1}' | t_1' \cap .. t_{k-2}') = \frac{n-k}{n-k+2}$$

$$p(t_k | t_{k-1}' \cap .. \cap t_1') = \frac{2}{n-k+1}$$

לפי כלל הכפל:

$$p(t_1' \cap .. t_{k-1}') = p(t_1') \cdot p(t_2' | t_1') \cdot p(t_{k-1}' | t_1' \cap .. t_{k-2}')$$

$$= \frac{\cancel{n-2}}{n} \cdot \frac{\cancel{n-3}}{n-1} \cdot \frac{\cancel{n-4}}{\cancel{n-2}} \cdot \frac{n-5}{\cancel{n-3}} \cdots \frac{n-k+1}{\cancel{n-k+3}} \cdot \frac{n-k}{\cancel{n-k+2}}$$

$$= \frac{(n-k+1)(n-k)}{n(n-1)}$$

207733395

$$p(t_k \mid t_1^c \cap \dots \cap t_{k-1}^c) = \frac{2}{n-k+1}$$

סה״כ, נקבל כי:

$$p\left(\text{יצליח בדיוק בניסיון ה-}k\right) \overset{\text{חוק הכפל}}{=} p\left(\text{ייכשל ב-}k-1\text{ ניסיונות ראשונים}\right) \cdot p\left(\text{יצליח בניסיון ה-}k\text{ בהינתן שנכשל ב-}k-1\text{ הראשונים}\right)$$

$$p(t_k \cap t_{k-1}^c \cap \dots \cap t_1^c) \overset{\text{חוק הכפל}}{=} p(t_k \mid t_{k-1}^c \cap \dots \cap t_1^c) \cdot p(t_{k-1}^c \cap \dots \cap t_1^c)$$

$$= \frac{\cancel{(n-k+1)}(n-k)}{n(n-1)} \cdot \frac{2}{\cancel{n-k+1}} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

207733395

שאלה 8

בפקולטה להנדסת תעשייה וניהול ניתנים השנה 3 קורסים: סטטיסטיקה, מבני נתונים וחישוביות.

בוחרים סטודנט אקראי ושואלים אותו אם למד/הצליח בכל אחד מהקורסים.

נתון:

- **ההסתברות שהסטודנט הצליח במבחן בסטטיסטיקה היא 0.85, ההסתברות שלמד למבחן בסטטיסטיקה היא 0.9 וההסתברות שלמד והצליח במבחן בסטטיסטיקה היא 0.8.**
- **ההסתברות שהסטודנט למד והצליח במבחן במבני נתונים היא 0.67, ואילו ההסתברות שלא למד והצליח במבחן זה היא 0.2.**
- **ההסתברות שהסטודנט הצליח במבחן בחישוביות אינה אפס.**
- **על פי דרישות הקורס בחישוביות, סטודנט לא יכול לקחת את הקורס במקביל לקורס במבני נתונים (כלומר לא יתכן שיצליח בשני הקורסים ביחד).**

א. מה ההסתברות שסטודנט למד למבחן בסטטיסטיקה בהינתן שהוא הצליח בו?

ב. מה ההסתברות שסטודנט הצליח במבחן במבני נתונים?

א)

L_s - למד לסטטיסטיקה

S_s - הצלחת בסטטיסטיקה

$$P(S_s)=0.85$$
$$P(L_s)=0.9$$
$$P(S_s \cap L_s)=0.8$$

$$P(L_s \mid S_s)=\frac{P(L_s \cap S_s)}{P(S_s)}=\frac{0.8}{0.85}=0.941$$

ב)

L_n למד למבני

S_n הצלחת במבני

$$P(S_n)=P(S_n \cap L_n)+P(S_n \cap L_n')$$

הסתברות שלמה

$$P(S_n)=0.67+0.2=0.87$$