

תרגילים 6-7. תחשיב פסוקים.

1) הוכיחו כי

(א) אם פסוקים $(\neg x \vee y)$ ו- $(\neg z \vee \neg y)$ טאוטולוגיות אז גם $(x \rightarrow \neg z)$ טאוטולוגיה.

(ב) פסוק $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ טאוטולוגיה.

(ג) פסוק $A \leftrightarrow B$ טאוטולוגיה אם ורק אם $A \Leftrightarrow B$ (שקול לוגית ל- B).

(ד) פסוק $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$ טאוטולוגיה.

2) הוכיחו שקלויות לוגיות.

(א) $(A \wedge B) \vee ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) \Leftrightarrow A \vee B$

(ב) $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \Leftrightarrow A$

3) (א) הרכיבו פסוק עם 3 משתנים פסוקים A, B, C שמקיים ערך T אם ורק אם

בדיוק 2 משתנים מקיימים ערך F .

(ב) מצאו כל פסוקים בצורה הדיסיונקטיבית הנורמאלית הקנונית על קבוצת משתנים $\{x, y\}$.

(ג) מצאו את הצורה הדיסיונקטיבית הנורמאלית הקנונית של פסוק

$$(A \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow (B \wedge C))$$

(ד) מצאו את הצורה הדיסיונקטיבית הנורמאלית הקנונית של פסוק

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow \neg C) \rightarrow (A \rightarrow \neg B))$$

4) הוכיחו כי אם פסוק ϕ כתוב ע"י הקשר \rightarrow בלבד (פרט למשתנים פסוקים

וסוגריים) אז קיים משתנה פסוקי p ב ϕ כך ש $\phi \Rightarrow p$.

5) הוכיחו כי מערכות הבאות של קשרים שלמות.

(א) נגדיר פעולות נוספות עם פסוקים $A \downarrow B = \neg(A \vee B)$ הוכיחו כי $\{\downarrow\}$ היא מערכת

פעולות שלמה,

(ב) מערכת קשרים $\{\rightarrow, F\}$, כאשר F פסוק שקר,

(ג) מערכת קשרים $\{\rightarrow, \neg\}$,

(ד) מערכת קשרים $\{+, \vee, T\}$, כאשר T פסוק אמת ו- $Val(A+B, s) = \begin{cases} F, & s(A) = s(B) \\ T, & s(A) \neq s(B) \end{cases}$

$$A+B \Leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow B)$$

(ה) מערכת קשרים $\{\leftrightarrow, \vee, F\}$, כאשר F פסוק שקר.

6) הוכיחו כי מערכות הבאות של קשרים לא שלמות.

(א) מערכת קשרים $\{*, \wedge\}$ כאשר $A * B = \neg A \wedge B$

(ב) מערכת קשרים $\{\neg\}$

(ג) מערכת קשרים $\{\wedge, \vee\}$

(7 א) בטא \vee במערכת קשרים $\{\rightarrow\}$ ז"א מצא פסוק בנוי ממשתנים פסוקים רק בעזרת קשר \rightarrow ושקול ל $(x \vee y)$,

(ב) בטא \neg במערכת קשרים $\{\rightarrow, F\}$,

(ג) בטא \neg במערכת קשרים $\{+, T\}$, כאשר קשר $+$ מוגדר ב שאלה 5 ד.

(8 א) הוכיחו כי קשר \rightarrow אי אפשר לבטא במערכת קשרים $\{\wedge, \vee\}$ ז"א לא קיים פסוק בנוי ממשתנים פסוקים רק בעזרת קשר \wedge, \vee ושקול ל- $x \rightarrow y$,

(ב) הוכיחו כי קשר \neg אי אפשר לבטא במערכת קשרים $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

(ג) הוכיחו כי קשר \leftrightarrow אי אפשר לבטא במערכת קשרים $\{\wedge, \vee, +\}$, כאשר קשר $+$ מוגדר ב שאלה 5 ד.

(9 א) מצאו כל פתרונות X כפסוקים במשתנים (פרמטרים) A, B, C

כך ש- $(A \rightarrow X) \Leftrightarrow (A \rightarrow (B \wedge C))$

כמה קיימים פסוקים כאלה לא שקולים לוגית זה לזה? כמה קיימות פתרונות X כפסוקים במשתנים (פרמטרים) A, B, C, D ?

(ב) מצאו כל X כפסוקים במשתנים A, B, C כך ש- $(A \wedge X) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ ו-

$(A \vee X) \Leftrightarrow (A \vee C)$

כמה קיימים פסוקים כאלה לא שקולים לוגית זה לזה? כמה קיימות פתרונות X כפסוקים במשתנים (פרמטרים) A, B, C, D ?

(10) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.
(א) קיימים בדיוק 4 פונקציות אמת עם 2 משתנים.

(ב) קיים פסוק φ שמקיים תנאי הבא עבור כל פסוק ψ : אם φ גורר לוגית את פסוק ψ אז ψ שקול לוגית ל- φ .

(ג) קיים פסוק φ שמקיים תנאי הבא: כל פסוק שגורר לוגית את פסוק φ הוא שקול לוגית ל- φ .

(ד) קיימים בדיוק 7 צורות הדיסיונקטיביות הנורמאליות הקנוניות (לא ריקות) על קבוצת משתנים $\{x, y, z\}$.

(11) מצאו צורה דיסיונקטיבית נורמאלית מינימאלית עבור פסוק

(א) $(Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg Y \wedge \neg Z)$

(ב) $(Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z)$

(ג) $(X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z \wedge T) \vee (\neg X \wedge T) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z \wedge T)$

רמז. אפשר להשתמש במפות קרנו.

בהצלחה!