Олимпиада ДММ-2017 по математике

57 лет

математико-механическому факультету

В красивой рамке, перед каждой задачей указан вектор $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbf{R}^3$. Его координаты являются ориентировочным количеством баллов, которое могут заработать за эту задачу: α - студент(ка) первого курса, β - студент(ка) второго курса, γ - студент(ка) курса старше второго. Напоминаем, что решения задач принимаются 10 апреля, в понедельник, с 12.00 до 14.00, на кафедре алгебры и дискретной математики. Счастливой вам Олимпиады,и пусть призы и удача всегда будут на вашей стороне!

№1 (4, 4, 4) Разминка мозга для высвобождения из объятия Морфея. На плоскости нарисована одна ветвь гиперболы (и ничего больше). Вольдемар отметил на ней какую-то точку. Может ли Вольдемар с помощью циркуля и линейки построить касательную к этой линии в этой точке?

№2 (5, 4, 4) Николай Валуев зачем-то взял два комплексных числа z_1 и z_2 таких, что $|z_1|\le 1, |z_2|\le 1$ и $|z_1+z_2|=1$. Отберите их у него и найдите $\max|z_1^2+z_2^2|$ и $\min|z_1^2+z_2^2|$. Отдайте ему найденные значения, чтоб он не плакал.

№3 (10, 10, 10) Милые девушки! Если вы докажете, что многочлен $f(x)=1+x+x^2+\ldots+x^{100}\in\mathbf{Z}_2[x]$ неприводим над $\mathbf{Z}_2$, то вы войдете в топ-миллиард самых красивых людей планеты! К мужикам это также относится.

№4 (18, 17, 16) Вот и наступил тот долгожданный момент в вашей жизни, когда нужно доказать, что аддитивная и мультипликативная группы бесконечного поля не могут быть конечно порождены.

№5 (7, 6, 8) Задачка на дьявольскую смекалку по геометрии. Из 32 одинаковых отрезков сложите 24 квадрата.

№6 (10, 10, 10) Рассмотрим систему подмножеств $\{A_\alpha\}$, $A_\alpha\subset\mathbf{N}$ таких, что каждые два из них сравнимы в смысле включения (т.е. либо первое входит во второе, либо второе — в первое). Может ли такая система множеств быть несчетной?

№7 (5, 4, 4) Британские ученые открыли ящик виски и доказали, что если $p_1(x), p_2(x),\ldots, p_k(x)$ – многочлены степеней $n_1, n_2,\ldots, n_k$ и $n_1+n_2+\ldots+n_k<\dfrac{k(k-1)}{2}$, то эти многочлены линейно зависимы. Повторите хотя бы второе их достижение.

№8 (9, 9, 9) Докажите, что если число $n\in\mathbf{N}$ не является целой степенью простого числа, то существует перестановка $(i_1, i_2,\ldots, i_n)$ чисел 1,2,…,n для которой выполнено равенство: $\sum_{k=1}^{n} k\cos\left(\dfrac{2\pi\cdot i_k}{n}\right)=0$.

№9 (25, 25, 25) Связь времен. По традиции, вот вам одна из задач прошлых олимпиад, так и не получивших вразумительного решения. Докажите, что для любых четырех точек на плоскости, одно из расстояний между ними не является нечетным целым числом.

№10 (7, 5, 5) Математик! Хватит переживать, что твой лучший результат в беге на три километра – два километра! Лучше посчитай интеграл: $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos x}{1+e^x}dx$.

№11 (4, 3, 3) Известно: чтобы поймать десантника, нужно думать как фонтан. А чтобы повысить шансы на победу в олимпиаде, нужно найти минимальное n для которого существует монотонная самодвойственная несимметричная булева функция, существенно зависящая от всех n переменных.

№12 (10, 9, 8) Хихикающий мальчик в Амстердаме высказал предположение, что если A и B – вещественные положительно определенные симметричные матрицы порядка n, то $\det(A+B)\geq\det A+\det B$. Это так?

№13 (6, 5, 4) Милые участники! Как вы думаете, существует ли функция $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ такая, что $f(f(n))\equiv n^2$, а?

№14 (12, 11, 10) Друзья! Компактное множество $A\subset\mathbf{R}^n$ таково, что для любой точки $x\in\mathbf{R}^n$ существует в точности одна точка $a(x)\in A$ такая, что $\|x-a(x)\|=\sup\limits_{a\in A}\|x-a\|$. Докажите, что A одноэлементно. Докажите это утверждение для ограниченного множества $A\subset\mathbf{R}^n$.

№15 (35, 35, 35) И снова убойная классика! Докажите, что многочлен x^5-x+k раскладывается в произведение неприводимых над $\mathbf{Z}$ квадратного и кубического многочленов тогда и только тогда, когда $k=\pm15$, $k=\pm22440$ и $k=\pm2759640$.

№16 (7,6,5) Суперкомпьютер "Эй Брюс" иногда самопроизвольно исторгает перфоленту с записанным на ней абсолютно случайным k-ичным числом из N цифр (N – большое!). Оператор Даша в этом случае вырезает из ленты и цепляет к багрепорту произвольный кусок, на котором записан "дубль" - фрагмент вида XX, где X – любая последовательность цифр. У Даши разбегаются глаза от количества способов выбрать дубль. Помогите ей, найдя матожидание числа дублей как функцию от N с точностью до o(1) (o – маленькое!).

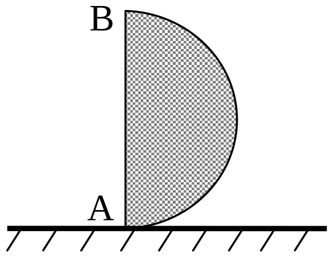
№17 (20, 20, 20) Вот ситуация. Абонент Alice хочет передавать абоненту Bob мультимножества из 9 16-битовых слов. Всегда ли Alice сможет передать по 8 слов таких мультимножеств, чтобы Bob узнавал и девятое?

№18 (13,10,10) Если вы боитесь прыгать с парашютом, прыгайте без него! А для пущей уверенности в себе, найдите траекторию движения материальной точки под действием вертикальной силы, направленной вверх и пропорциональной скорости. Направление начальной скорости точки не является вертикальным.

№19 (35, 35, 35) Чтобы начать новую жизнь, обозначьте через $a(n)$ количество цифр, которые не меньше 5, в десятичной записи числа 2^n. Затем докажите, что $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{2^n}=\frac{2}{9}$ и подивитесь этому восхитительному факту вашей новой жизни.

№20 (20, 20, 20) Коллеги! У Маши есть ожерелье из бусин нескольких цветов и младший брат Вася с ножницами. Вася хочет разрезать ожерелье в одном месте, чтобы получившаяся нитка бус была палиндромом: с какой стороны на нее не смотри, последовательность цветов одна и та же. Докажите, что из машиных бус можно получить не более двух различных палиндромов, если бусин – четное число, и не более одного – если нечетное.

№21 (25, 25, 24) Привет с кафедры теоретической механики! Однородный полуцилиндр радиуса R опирается на горизонтальную шероховатую поверхность так, что его грань AB (см.рис.) в начальный момент вертикальна и полуцилиндр неподвижен. Из этого положения, под действием силы тяжести, он начинает качание без проскальзывания по плоскости. Найти максимальную угловую скорость и максимальное угловое ускорение цилиндра.



№22 (5, 10, 15) Рычи как волк! Борись как лев! Суй руку в реку как Грека! Делай что хочешь, но докажи, что среди любых трех единичных векторов гильбертова пространства всегда найдутся два, чья норма суммы будет не меньше единицы.

№23 (20, 22, 23) Истинные математики во время бессонницы не считают овец, а перечисляют решетки, изоморфные своей решетке конгруэнций. Помогите членам жюри заснуть, предъявив им 2017 таких различных решеток.

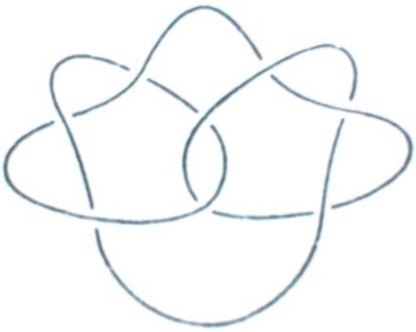
№24 (23, 23, 23) Матмеховцы! Паспортистка в домоуправлении легко привела пример двух таких универсальных алгебр A_1 и A_2, что ни одна из них не вкладывается в декартово произведение $A_1 \times A_2$. А вы сможете?

№25 (8, 8, 8) Карл у Клары угнал McLaren, а Клара у Карла угнала Corvette. На угнанных машинах они гоняют по двум окружностям, которые пересекаются в различных точках A и B. Идиоты одновременно начали движение по часовой стрелке с одинаковыми угловыми скоростями из точки A каждый по своей окружности. Докажите, что на протяжении всего движения Карл и Клара равноудалены от некоторой фиксированной точки.

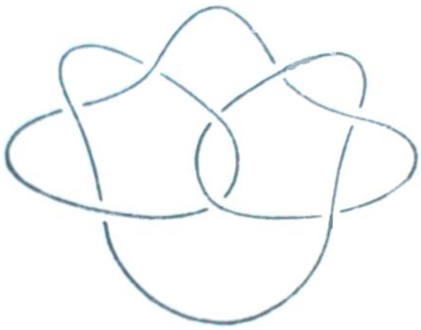
№26 (12, 9, 9) Известно, что Стефан носит с собой два коробка спичек, в каждом из которых изначально было по N спичек. Когда Стефану нужна спичка, он достает коробок наугад и вынимает ровно одну спичку. Найдите вероятность того, что когда Стефан впервые достанет пустой коробок, число спичек в другом будет делиться на 3.

№27 (3, 3, 3) Простенькая задача для отдыха от предыдущих. Докажите, что из любых четырех чисел можно выбрать два, x и y, для которых $0 \le \frac{x-y}{1+xy} \le 1$.

№28 (30, 28, 27) Традиционная вкуснятина для ботанов! Перед вами два узла:



и



.

Первый называется «узел истинной дружбы», второй – «узел ложной дружбы». Докажите, что эти узлы не изотопны.

№29 (15, 10, 10) Математики вышли на митинг против часовой стрелки и обозначили через $f(n)$ наибольшее количество точек в $\mathbf{R}^n$ таких, что углы, образованные любыми тремя из них, меньше $\pi/2$. Докажите теперь, что $2n-1 \le f(n) \le 2^n$.

№30 В «интернетах» среди любителей «нечегоделать» активно мусолится такая задача: Имеется k одинаковых стеклянных шариков. Их кидают с некоторых этажей N-этажного дома. Требуется за наименьшее число бросаний $f(N,k)$ определить самый нижний этаж, при бросании с которого шарики разбиваются (или убедиться, что таких этажей в доме нет). Задача состоит в том, чтобы найти значение $f(N,k)$ для обсуждаемого дома и числа шариков. Особенно популярны у пользователей «инторнетов» значения N=100 – дом в сто этажей и k=2 – два шарика в руках. Все талдычат и спорят, стратегии предлагают. А мы, давайте, поступим по серьезному.

(40, 38, 37) А) Вычислить $f(1000,2)$ – дом в 1000 этажей и у вас 2 шарика.

(48, 47, 46) Б) Вычислить $f(1000,3)$– дом в 1000 этажей и у вас 3 шарика.

(50, 50, 50) В) Поставьте, наконец, точку в этом вопросе – укажите явный вид функции $f(N,k)$.

Деканат и оргкомитет ДММ поздравляют Вас с Днем Математика и Механика, желают Вам светлого разума и высоких достижений в Олимпиаде ДММ-2017!!!