

# Relaciones, Funciones y Enumerabilidad

RAFAEL F. ISAACS G. \*

Fecha: 10 de diciembre de 2004

El lector debe tener familiaridad tanto con las relaciones como con las funciones. Estos conceptos son básicos en la construcción del lenguaje de las matemáticas actuales. Uno de los temas que se pueden abordar con este lenguaje es el de la cardinalidad, o sea el número de elementos de un conjunto cuando no nos limitamos a conjuntos finitos. Específicamente al hablar de numerabilidad y sobre todo, de conjuntos no enumerables, obtenemos resultados sorprendentes y relevantes en cuanto a lo que puede ser computable.

## 1. Relaciones

### 1.1. Generalidades

**Definición 1.** Siendo  $A$  y  $B$  conjuntos el producto cartesiano  $A \times B$  está definido por:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

**Definición 2.** Siendo  $A$  y  $B$  conjuntos una relación de  $A$  en  $B$  es cualquier conjunto  $R$  que cumple  $R \subseteq A \times B$

**Notación.** Cuando  $R$  es una relación también se nota  $xRy$  en lugar de  $(x, y) \in R$

Según nuestra definición una relación es simplemente un conjunto de parejas, es conveniente a veces asociar esas parejas a un predicado de dos variables, digamos  $p(x, y)$ , así la relación sería  $\{(x, y) \mid p(x, y)\}$

**Definición 3.** Siendo  $A$  un conjunto y  $R$  una relación de  $A$  en  $A$ , es decir una relación sobre  $A$ , se dice que  $R$  es:

**Reflexiva** Si  $\forall x \in A ((x, x) \in R)$

**Simétrica** Si  $\forall x, y \in A ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$

**Transitiva** Si  $\forall x, y, z \in A (((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \Rightarrow (x, z) \in R)$

**Antisimétrica** Si  $\forall x, y \in A (((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \Rightarrow x = y)$

**Definición 4.** Una relación  $R$  sobre un conjunto  $A$  se dice que es de **equivalencia** sobre  $A$  si es reflexiva, simétrica y transitiva

---

\*Profesor titular UIS

**Notación.** Las relaciones de equivalencia se notan con signos simétricos como  $\sim, \equiv, \simeq, \approx, \cong$ .

**Ejemplo 1.1.** La relación de congruencia entre enteros módulo  $m$  es siempre una relación de equivalencia para cualquier entero  $m \geq 1$

**Definición 5.** Dada una relación de equivalencia  $\sim$  sobre el conjunto  $A$ , se define para cada  $a \in A$  la clase de equivalencia de  $a$  según  $\sim$  que se nota  $[a]_\sim$  así:

$$[a]_\sim = \{x \in A \mid a \sim x\}$$

cuando no hay lugar a confusión se nota simplemente  $[a]$ . El conjunto de todas las diferentes clases de equivalencia así formadas se nota  $A/\sim$ .

**Proposición 1.** Dada una relación de equivalencia  $\sim$  sobre el conjunto  $A$ , las clases de equivalencia forman una partición de  $A$ .

**Definición 6.** Una relación  $R$  sobre un conjunto  $A$  se dice que es de **orden parcial** sobre  $A$  si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

## 1.2. Representación de Relaciones

Una relación se puede “pintar” como un subconjunto del producto cartesiano, siempre y cuando dicho producto cartesiano se pueda representar. Por ejemplo la relación  $R$  de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  definida por  $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$  se representa un disco centrado en el origen y con radio 2 del plano cartesiano.

También podemos utilizar flechas, especialmente cuando trabajamos relaciones finitas: Representamos los elementos de los conjuntos  $A$  y  $B$  por puntos y siempre que  $(x, y) \in R$  trazamos una flecha entre los respectivos puntos. Cuando  $A = B$  se pintan los puntos de  $A$  sólo una vez y se obtiene el **grafo** de  $R$ .

Desde el punto de vista informático, así como los conjuntos se representan por vectores booleanos, las relaciones conviene representarlas por matrices booleanas.

**Definición 7.** Siendo  $A$  y  $B$  conjuntos finitos, digamos  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  y  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ , cualquier relación  $R$  de  $A$  en  $B$  se puede representar por la matriz booleana  $M_R = (m_{i,j})_{i:1,\dots,n; j:1,\dots,m}$  de  $n$  filas y  $m$  columnas donde  $m_{i,j} = 1 \Leftrightarrow (a_i, b_j) \in R$ .

Observando la matriz de una relación entre conjuntos finitos es inmediato saber si la relación es reflexiva, simétrica y antisimétrica. Por una observación así de sencilla no es fácil ver si es transitiva.

## 1.3. Composición de Relaciones

**Definición 8.** Siendo  $A$  y  $B$  conjuntos y  $R$  una relación entre ellos se define  $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$

**Definición 9.** Siendo  $A$ ,  $B$  y  $C$  conjuntos,  $R$  una relación de  $A$  en  $B$ ,  $S$  una relación de  $B$  en  $C$ , definimos la relación  $R \circ S$  de  $A$  en  $C$  así:

$$(x, z) \in (R \circ S) \Leftrightarrow \exists y \in B ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S)$$

**Proposición 2.** La composición entre relaciones  $\circ$  es asociativa es decir  $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

**Proposición 3.**  $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

**Proposición 4.** La relación  $R$  es transitiva si y solo si  $R \circ R \subseteq R$

**Definición 10.** Sea  $M = (m_{i,j})$  matriz booleana de orden  $n \times m$  y  $N = (n_{j,k})$  matriz booleana de orden  $m \times p$ , se define el producto booleano de  $M$  y  $N$  como la matriz  $M \odot N = (c_{i,k})$  de orden  $n \times p$  así:

$$c_{i,k} = \bigvee_{j=1}^m (m_{i,j} \wedge n_{j,k})$$

**Proposición 5.** Siendo  $A$ ,  $B$  y  $C$  conjuntos finitos,  $R$  una relación de  $A$  en  $B$ ,  $S$  una relación de  $B$  en  $C$ , la matriz de la relación  $R \circ S$  de  $A$  en  $C$  está dada por:

$$M_{(R \circ S)} = M_R \odot M_S$$

*Demostración.* Sea  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$  y  $C = \{c_1, \dots, c_p\}$  entonces

$$(a_i, c_k) \in (S \circ R) \Leftrightarrow \exists b_j \in B ((a_i, b_j) \in R \wedge (b_j, c_k) \in S)$$

esto quiere decir que

$$(a_i, c_k) \in (S \circ R) \Leftrightarrow \exists j : 1, \dots, m (m_{i,j} = 1) \wedge (n_{j,k} = 1)$$

que es lo mismo que

$$(a_i, c_k) \in (S \circ R) \Leftrightarrow \bigvee_{j=1}^m (m_{i,j} \wedge n_{j,k}) = 1$$

□

## 1.4. Ejercicios

1. Cuáles de las siguientes relaciones sobre los naturales son reflexivas, antirreflexivas, simétricas, antisimétricas o transitivas:

- a)  $nRm \Leftrightarrow n + m$  es par.
- b)  $nRm \Leftrightarrow n + m$  es impar.
- c)  $nRm \Leftrightarrow n - m$  es par.
- d)  $nRm \Leftrightarrow n - m$  es impar.
- e)  $nRm \Leftrightarrow n/m$  es potencia de 2.
- f)  $nRm \Leftrightarrow n/m$  es impar.
- g)  $nRm \Leftrightarrow n - m$  es múltiplo de 5.
- h)  $nRm \Leftrightarrow n$  divide a  $m$

2. Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  en cada caso se define recursivamente la relación  $\Theta$  sobre  $\Sigma^*$ . Interprete qué significa cada relación y decida si la relación así definida es reflexiva, antirreflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva:
- i) **Base:**  $\forall \alpha \in \Sigma^* (\alpha, \alpha) \in \Theta$ .

ii) **Paso inductivo:** Si  $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ ,  $x \in \Sigma$  y  $(\alpha, \beta) \in \Theta$  entonces  $(\alpha, \beta x) \in \Theta$ .

iii) **Clausura:**  $\Theta$  se calcula únicamente aplicando i) y ii).
  - i) **Base:**  $(\lambda, \lambda) \in \Theta$ .

ii) **Paso inductivo:** Si  $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ ,  $x \in \Sigma$  y  $(\alpha, \beta) \in \Theta$  entonces  $(\alpha, \beta x) \in \Theta$ .

iii) **Clausura:**  $\Theta$  se calcula únicamente aplicando i) y ii).
  - i) **Base:**  $\forall \alpha \in \Sigma^* (\alpha, \alpha) \in \Theta$ .

ii) **Paso inductivo:** Si  $\alpha \in \Sigma^*$ ,  $x \in \Sigma$  y  $(\alpha, \beta) \in \Theta$  entonces  $(\alpha, \beta x) \in \Theta$  y  $(\alpha, x\beta) \in \Theta$ .

iii) **Clausura:**  $\Theta$  se calcula únicamente aplicando i) y ii).
  - i) **Base:**  $\forall x \in \Sigma (x, x) \in \Theta$ .

ii) **Paso inductivo:** Si  $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ ,  $x \in \Sigma$  y  $(\alpha x, \beta) \in \Theta$  entonces  $(\alpha, \beta x) \in \Theta$ , y  $(\alpha, x\beta) \in \Theta$ .

iii) **Clausura:**  $\Theta$  se calcula únicamente aplicando i) y ii).
  - i) **Base:**  $\forall \alpha \in \Sigma^* (\alpha, \alpha) \in \Theta$ .

ii) **Paso inductivo:** Si  $\alpha \in \Sigma^*$ ,  $x \in \Sigma$  y  $(\alpha x, \beta) \in \Theta$  entonces  $(\alpha, x\beta) \in \Theta$ .

iii) **Clausura:**  $\Theta$  se calcula únicamente aplicando i) y ii).
3. El conjunto  $\emptyset$  es una relación entre cualquier par de conjuntos  $A$  y  $B$ . ¿Qué propiedades tiene?
4. Sean  $R$  y  $S$  relaciones sobre el conjunto  $A$ .  $I_A$  la identidad en  $A$ . En cada caso conteste falso o verdadero y justifique brevemente.
- Si  $R$  es reflexiva entonces  $R \cap S$  lo es.
  - Si  $R$  es simétrica entonces  $R = R^{-1}$ .
  - Si  $R$  y  $S$  son antisimétricas entonces  $R \cup S$  lo es.
  - Si  $R \cup S$  es reflexiva entonces  $R$  ó  $S$  lo son.
  - Si  $R$  es simétrica entonces  $R \subset I_A$ .
  - Siempre  $R \cup R^{-1}$  es reflexiva.
  - Si  $R$  y  $S$  son transitivas entonces  $R \cup S$  lo es.
5. Sean  $R$  y  $S$  las relaciones definidas sobre el conjunto  $\{-5, -4, \dots, 0, 1, \dots, 4, 5\}$  así:
- $$nRm \Leftrightarrow a \leq b.$$
- $$nSm \Leftrightarrow a = -b.$$

Analizar cada relación y exhibir su matriz:

- a)  $R \cap S$ .
  - b)  $R \cup S$
  - c)  $R \cap S^{-1}$
  - d)  $S \circ R$
  - e)  $R \cap S$
6. Muestre dos relaciones simétricas sobre el conjunto  $\{a, b, c\}$  de tal forma que su compuesta no sea simétrica.
7. Muestre dos relaciones transitivas sobre el conjunto  $\{a, b, c\}$  de tal forma que su compuesta no sea transitiva.
8. Sean  $R = \{(2, 1), (2, 3)\}$  y  $S = \{(2, 3), (4, 2)(2, 1), (4, 1)\}$  relaciones sobre el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  enumere los elementos de las siguientes relaciones:
- (a)  $R \cup S^{-1}$
  - (b)  $R \circ S^{-1}$
9. Sea  $R = \{(2, 1), (2, 3), (4, 2)(2, 1), (4, 1)\}$ .
- a) Enumere los elementos de la menor relación  $S$  sobre el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  que es transitiva y tal que  $R \subseteq S$  ( $S$  es la **clausura transitiva** de  $R$ ).
  - b) Enumere los elementos de la menor relación  $T$  sobre el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  que es de equivalencia y tal que  $R \subseteq T$ . ( $T$  es la **clausura de equivalencia** de  $R$ ).
  - c) ¿Cuáles son las clases de equivalencia que forma  $T$ ?
10. Probar que si las relaciones  $R$  y  $S$  son reflexivas y simétricas entonces las siguientes condiciones son equivalentes:
- i)  $R \circ S$  es simétrica.
  - ii)  $R \circ S = S \circ R$ .
  - iii)  $R \circ S = R \cup S$ .
11. A continuación se define la relación  $\sim$  sobre el conjunto  $\mathbb{Z}$ . Demuestre que en cada caso la relación es de equivalencia y determine cuántas clases de equivalencia se forman.
- a)  $n \sim m \Leftrightarrow n - m$  es par.
  - b)  $n \sim m \Leftrightarrow n - m$  es divisible por 5.
  - c)  $n \sim m \Leftrightarrow nm > 0$  o  $n = m = 0$ .
  - d)  $n \sim m \Leftrightarrow n/m$  o  $m/n$  son potencia de 2 o  $n = m = 0$
12. A continuación se define la relación  $\sim$  sobre  $\mathbb{C}^\bullet$  el conjunto de los complejos sin el 0. Demuestre que en cada caso la relación es de equivalencia y determine cómo son sus clases de equivalencia.

- a)  $z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}(\alpha z_1 = z_2)$
  - b)  $z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0(\alpha z_1 = z_2)$
  - c)  $z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow (|z_1| = |z_2|)$
  - d)  $z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow (Re(z_1) = Re(z_2))$
  - e)  $z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow (Im(z_1) = Im(z_2))$
13. Probar que si una relación  $R$  es reflexiva y transitiva entonces  $R \cap R^{-1}$  es de equivalencia.
14. ¿Cuántas relaciones hay de un conjunto con  $n$  elementos en un conjunto con  $m$  elementos? Demuestre que si  $|A| = n$  hay exactamente  $2^{n^2}$  sobre  $A$  y que de éstas,  $2^{n(n-1)}$  son reflexivas y  $2^{n(n+1)/2}$  son simétricas.

## 2. Funciones

Las funciones son un tipo especial de relaciones.

**Definición 11.** Sea  $R$  una relación de  $A$  en  $B$ , se dice que  $R$  es una función de  $A$  en  $B$  si se cumple

- i)  $\forall x \in A \exists y \in B((x, y) \in R)$
- ii)  $\forall x \in A \forall y_1, y_2 \in B((x, y_1) \in R \wedge (x, y_2) \in R) \Rightarrow y_1 = y_2$

La primera propiedad exige que cada elemento del dominio tenga uno relacionado en el recorrido, la segunda exige que éste sea único.

**Notación.** Se acostumbra notar con las letras  $f, g, h$  las funciones. Cuando  $f$  es una función de  $A$  en  $B$  se nota  $f : A \longrightarrow B$  y si  $(x, y) \in f$  se escribe  $f(x) = y$ . Así,  $f(x)$  se denomina **la imagen** de  $x$ .

Tal como las relaciones, las funciones pueden tener o no una fórmula, expresión o algoritmo que determine la imagen de cada elemento del dominio. Sin embargo las funciones que tienen dicha “fórmula, expresión o algoritmo” son una parte muy pequeña de todas las funciones. Por tanto no conviene confundir el concepto de función con una “fórmula, expresión o algoritmo”.

### 2.1. Ejemplos de funciones

**Ejemplo 2.1.** La colección indizada de conjuntos  $\{A_i\}_{i \in I}$  se puede entender como una función  $f : I \longrightarrow \mathcal{P}(X)$  donde  $A_i \subseteq X$  para todo  $i \in I$ .

**Ejemplo 2.2.** La función característica de un conjunto  $A$  donde  $A \subseteq X$  es una función  $\chi_A : X \longrightarrow \mathbb{Z}_2$  donde  $\chi_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \notin A$ .

**Ejemplo 2.3.** La pareja  $(a, b)$  se puede ver como una función  $f : \{1, 2\} \longrightarrow X$  donde  $f(1) = a, f(2) = b$  y  $a, b \in X$ . El producto cartesiano  $A \times B$  se puede ver como el conjunto de funciones  $\{f : \{1, 2\} \longrightarrow A \cup B \mid f(1) \in A, f(2) \in B\}$ . De aquí se generaliza el concepto de producto cartesiano para cualquier colección indizada de conjuntos  $\{A_i\}_{i \in I}$ , así:

$$\prod_{i \in I} = \{f : I \longrightarrow \bigcap_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i\}.$$

**Ejemplo 2.4.** Una palabra de  $n$  letras sobre el alfabeto  $\Sigma$  se puede ver como una función  $w : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \Sigma$ .

**Ejemplo 2.5.** La función **parte entera**  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  donde  $f(x)$  es el mayor entero menor o igual que  $x$ . Se nota  $\lfloor x \rfloor$

**Ejemplo 2.6.** La función exponencial  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$  en base  $b$  definida por  $f(x) = b^x$ .

**Ejemplo 2.7.** La función de Collatz  $f : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{N}^+$  está definida así:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ f(n) = \frac{n}{2} & \text{Si } n \text{ es par} \\ f(n) = 3n + 1 & \text{Si } n \text{ es impar mayor que 1} \end{cases}$$

## 2.2. Composición de funciones

La composición de funciones se hace como la de las relaciones, toca sin embargo, asegurarnos que realmente se produce una nueva función.

**Proposición 6.** Sean  $R \subseteq A \times B$  y  $S \subseteq B \times C$ , si  $R$  y  $S$  son funciones (de  $A$  en  $B$  y de  $B$  en  $C$ , respectivamente) entonces  $R \circ S$  es función de  $A$  en  $C$ .

Por la notación para las funciones la función compuesta de  $f$  y  $g$  a un punto  $x$  del dominio de  $f$  le hace corresponder  $g(f(x))$  y por eso se “invierte” la notación.

**Notación.** Si  $f : A \longrightarrow B$  y  $g : B \longrightarrow C$  son funciones su compuesta se nota  $g \circ f : A \longrightarrow C$  es decir  $g \circ f(x) = g(f(x))$

**Definición 12.** Sea  $f : A \longrightarrow B$  una función entonces:

$f$  es **inyectiva**, o uno a uno (o 1-1) si  $\forall x, y \in A \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

$f$  es **sobreyectiva**, o simplemente sobre si  $\forall y \in B \exists x \in A \quad f(x) = y$

$f$  es **biyectiva** si es uno a uno y sobre.

Si  $f$  es biyección y  $A = B$  se dice que  $f$  es una **permutación** de  $A$ .

**Ejemplo 2.8.** Si  $A \subseteq B$  se puede definir  $in_{A,B} : A \longrightarrow B$ , la **función inclusión**, definida por  $in_{A,B}(a) = a$  para todo  $a \in A$ . Esta función  $in_{A,B}$  siempre es inyectiva y si  $A = B$  se tiene  $in_{A,B} = I_A$  la función idéntica que es la única relación que es a la vez de equivalencia y función. Se define además para cada  $f : B \longrightarrow C$  la **restricción** de  $f$  a  $A$  como la función  $f \downarrow_A = f \circ in_{A,B}$ .

**Proposición 7.** Sea  $f : A \longrightarrow B$  una función entonces:

- i) Composición de funciones inyectivas es inyectiva.
- ii) Composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva.
- iii)  $f \circ g$  es biyectiva implica que  $f$  es sobreyectiva y  $g$  es uno a uno.

Las funciones como las relaciones tiene inversa pero no siempre dicha inversa es una función.

**Proposición 8.** Condición necesaria y suficiente para que  $f^{-1}$  sea función es que  $f$  sea biyección.

**Ejemplo 2.9.** La función exponencial  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$  en base  $b$  definida por  $f(x) = b^x$  tiene como inversa la función  $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = \log_b(x)$

**Definición 13.** Sea  $f : A \longrightarrow B$  cualquier función y  $X \subseteq A, Y \subseteq B$  se define:

- i)  $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$
- ii)  $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$

**Proposición 9.** Sea  $f : A \longrightarrow B$  una función,  $X_1, X_2 \subseteq A$  y  $Y_1, Y_2 \subseteq B$  entonces:

- i) Para todo  $X \subseteq A$  siempre  $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ .
- ii) Para todo  $X \subseteq A$  se tiene  $X = f^{-1}(f(X))$  si y sólo si  $f$  es inyectiva.
- iii) Para todo  $Y \subseteq B$  siempre  $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ .
- iv) Para todo  $Y \subseteq B$  se tiene  $f(f^{-1}(Y)) = Y$  si y sólo si  $f$  es sobreyectiva.
- v) Para todo  $Y_1, Y_2 \subseteq B$  se tiene  $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$ .
- vi) Para todo  $X_1, X_2 \subseteq A$  se tiene  $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$  y  $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$ .
- vii)  $f$  es inyectiva si y sólo si para todo  $X_1, X_2 \subseteq A$  se tiene  $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$ .

## 2.3. Contando funciones entre conjuntos finitos

**Proposición 10.** El número de funciones entre un conjunto con  $n$  elementos y otro con  $m$  elementos está dado por

$$m^n$$

*Demostración.* Hay tantas de estas funciones como palabras de  $n$  letras sobre un alfabeto con  $m$  letras. □

**Proposición 11.** El número de funciones inyectivas entre un conjunto con  $n$  elementos y otro con  $m$  elementos, donde  $0 < n \leq m$ , está dado por

$$m^{\underline{n}} = m(m-1) \dots (m-n+1)$$



*Demostración.* Hacemos inducción sobre  $n$ : Si  $n = 1$  es claro que hay  $m$  funciones todas inyectivas ( $m \geq n$ ). Supongamos (hipótesis de inducción) que hay  $m^n = m(m-1) \dots (m-n+1)$  y  $m > n$  entonces para cada función  $f : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, m\}$  podemos construir  $f' : \{1, \dots, n, n+1\} \longrightarrow \{1, \dots, m\}$  escogiendo  $f'(n+1)$  en el conjunto  $\{1, \dots, m\} - f\{1, \dots, n\}$  así  $f'$  será inyectiva y podríamos escoger  $m-n$  funciones. Por otra parte todas las funciones inyectivas se pueden construir así y de manera única. Por tanto hay

$$m^{n+1} = m(m-1) \dots (m-n+1)(m-n)$$

funciones  $f : \{1, \dots, n, n+1\} \longrightarrow \{1, \dots, m\}$  inyectivas. □

**Proposición 12.** *El número de permutaciones de un conjunto con  $n$  elementos es*

$$n!$$

*Demostración.* Este es un corolario de la proposición anterior. □

Para la demostración de la siguiente proposición se usa el principio de inclusión-exclusión y el cardinal del conjunto de funciones entre dos conjuntos (proposición 10). Antes veamos un ejemplo.

**Ejemplo 2.10.** Calcularemos el cardinal del conjunto de funciones sobreyectivas de  $\{1, 2, 3, 4\}$  en  $\{1, 2, 3\}$ . De las  $3^4$  funciones que hay de  $\{1, 2, 3, 4\}$  en  $\{1, 2, 3\}$ , debemos quitar las que no son sobreyectivas. Entonces sea  $A_i = \{f : \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{1, 2, 3\} \mid i \notin f(\{1, 2, 3, 4\})\}$  es decir, aquellas cuya imagen está contenida en  $\{1, 2, 3\} - \{i\}$  (hay  $2^4$ ) y así las funciones no sobreyectivas son exactamente las del conjunto  $A_1 \cup A_2 \cup A_3$  y por el principio de inclusión exclusión (descontando las tres constantes) hay

$$\binom{3}{2} 2^4 - 3$$

funciones no sobreyectivas, es decir tenemos

$$3^4 - \binom{3}{2} 2^4 + 3 = 81 - 3 \times 16 + 3 = 36$$

funciones sobreyectivas. Es bueno contarlas de otras maneras. Todas las funciones sobreyectivas tiene necesariamente dos elementos y únicamente dos, que tiene igual imagen. Si esta imagen es 1 hay  $2\binom{4}{2} = 12$  funciones sobreyectivas que envían dos elementos a 1. Como lo mismo sucede con 2 y con 3 tendremos  $3 \times 2\binom{4}{2} = 36$  funciones sobreyectivas

**Proposición 13.** *El número de funciones sobreyectivas entre un conjunto con  $n$  elementos y otro con  $m$  elementos está dado por*

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n$$

*Demostración.* Notemos  $\bar{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ . Sabemos que el cardinal de  $M$  el conjunto de las funciones entre  $\bar{n}$  y  $\bar{m}$  es  $m^n$ . Por cada  $j \in \bar{m}$  sea

$$M_j = \{f \in M \mid j \notin f(\bar{n})\}$$

es evidente que  $N = \bigcup_{j \in \bar{n}} M_j$  es el conjunto de todas las funciones de  $M$  que NO son sobreyectivas. Por el principio de inclusión exclusión se tiene

$$|N| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \bar{n}} (-1)^{|J|-1} |A_J|, \text{ donde } A_J = \bigcap_{j \in J} M_j.$$

Pero  $A_J = \{f \in M \mid f(\bar{n}) \subseteq \bar{m} - J\}$  entonces  $|A_J| = (m - |J|)^n$ . Si hacemos la suma sobre  $i = |J|$  como hay  $\binom{m}{i}$  conjuntos  $J \subseteq \bar{n}$  con esta condición entonces

$$|N| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{m}{i} (m-i)^n$$

como nos interesa son las funciones sobreyectivas tenemos

$$|M - N| = m^n - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{m}{i} (m-i)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{m}{i} (m-i)^n$$

□

## 2.4. Ejercicios

1. Demostrar que la relación  $R$  sobre el conjunto  $A$  es una biyección sí y sólo si  $R \circ R^{-1} = R^{-1} \circ R = I_A$
2. Si  $A$  tiene  $n$  elementos ¿cuántas funciones hay de  $A$  en  $\{1\}$ ?
3. ¿Entre cuáles conjuntos  $\emptyset$  es una función?
4. A cada persona de una población se le asocia su lugar de residencia. ¿Qué significa que esta relación sea función? ¿Que sea inyectiva? ¿Que sea sobre?
5. Sean  $R \subseteq A \times B$  una relación y  $f : B \longrightarrow C$  una función demostrar que  $R \circ f$  cumple

$$(x, y) \in R \Rightarrow (x, f(y)) \in (R \circ f)$$

6. Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  en cada caso se define recursivamente la función  $f$  con dominio  $\Sigma^*$ . Decidir si la función queda bien definida, y en caso afirmativo si es inyectiva y/o sobreyectiva:
  - i) **Base:**  $f(\lambda) = \lambda$ .
  - ii) **Paso inductivo:** Si  $v \in \Sigma^*$  entonces  $f(va) = f(v)aa$  y  $f(vb) = f(v)$ .
  - iii) **Clausura:**  $f$  se calcula únicamente aplicando i) y ii).
8. i) **Base:**  $f(\lambda) = \lambda$ .

- ii) **Paso inductivo:** Si  $v \in \Sigma^*$  entonces  $f(va) = f(v)b$  y  $f(vb) = f(v)a$ .
- iii) **Clausura:**  $f$  se calcula únicamente aplicando i) y ii).
9. i) **Base:**  $f(\lambda) = 0$ .
- ii) **Paso inductivo:** Si  $v \in \Sigma^*$  entonces  $f(va) = f(v) + 1$  y  $f(vb) = f(v) + 1$ .
- iii) **Clausura:**  $f$  se calcula únicamente aplicando i) y ii).
10. i) **Base:**  $f(\lambda) = \lambda$ .
- ii) **Paso inductivo:** Si  $v \in \Sigma^*$  entonces  $f(va) = af(v)$  y  $f(vb) = bf(v)$ .
- iii) **Clausura:**  $f$  se calcula únicamente aplicando i) y ii).
11. Sean  $R \subseteq A \times A$  una relación y  $f : A \longrightarrow B$  una biyección entonces  $f^{-1} \circ R \circ f$  cumple
- $$(x, y) \in R \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in (f^{-1} \circ R \circ f)$$
12. Analice la función  $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definida recursivamente así:
- $$f(n) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } n = 0 \\ (i + 1, j - 1) & \text{si } f(n - 1) = (i, j) \text{ con } j > 0 \\ (0, i) & \text{si } f(n - 1) = (i, 0). \end{cases}$$
13. Mostrar funciones  $f$  y  $g$  tales que  $f \circ g$  no es biyectiva, aunque  $f$  es sobreyectiva y  $g$  es uno a uno.
14. Sea  $f : A \longrightarrow B$  una función.
- $f$  es inyectiva sí y sólo si existe  $g : B \longrightarrow A$  tal que  $f \circ g = id_B$
- $f$  es sobreyectiva sí y sólo si existe  $g : B \longrightarrow A$  tal que  $g \circ f = id_A$
15. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 10 personas en una sala de 15 asientos?.
16. ¿De cuántas maneras se pueden se pueden intercambiar los dígitos del sistema decimal si los pares se deben intercambiar con pares y los impares con impares?.
17. 6 personas ocupan 4 habitaciones sabiendo que ninguna puede quedar vacía ¿De cuántas maneras se pueden distribuir?.

### 3. Cardinalidad

Los números surgen ante la necesidad de contar los elementos que tiene un conjunto  $A$ . Así los números naturales nos sirven para contar los elementos de conjuntos finitos. Se llega a entender un conjunto finito como aquel que tiene un número natural de elementos. Faltaría hablar de otro número  $\infty$  para contar los elementos de conjuntos infinitos. Pero ¡NO!. En primer lugar el  $\infty$  con el que el lector debe estar familiarizado por sus cursos de cálculo, es un infinito **potencial** por cuanto se refiere a una cantidad o variable que puede crecer tanto como se quiera. George Cantor descubrió a finales del siglo XIX que se necesitan muchos

números de “otros” para contar los elementos de los conjuntos no finitos. Así nacieron los **números transfinitos** que no son los reales ni los complejos sino que conforman según Hilbert, “el paraíso que dejó Cantor para nosotros”. Intentaremos en esta sección dar una breve introducción a este paraíso (del cual “nadie nos podrá expulsar”). ¡Bienvenidos!



Figura 1: George Cantor (1845-1918)

**Definición 14.** Dos conjuntos  $A$  y  $B$  son **equipotentes** si existe una biyección  $f : A \longrightarrow B$ . Se nota  $A \sim B$  y la relación  $\sim$  se llama equipotencia y es una relación sobre la clase de todos los conjuntos (que no es un conjunto).

**Proposición 14.** *La relación de equipotencia es una relación de equivalencia.*

**Definición 15.** Un cardinal es cualquier clase de equivalencia según la relación de equipotencia. Si  $A$  es un conjunto, el **cardinal** de  $A$ , que se nota  $|A|$ , será entonces

$$|A| = \{X \mid A \sim X\}$$

**Ejemplo 3.1.** El familiar número dos 2 es como cardinal, la clase de todos los conjuntos que son equipotentes con, por ejemplo,  $\{0, 1\}$ .

**Definición 16.** Un conjunto  $A$  es **infinito** si existe  $B \subseteq A$  tal que  $A \neq B$  y  $A \sim B$ , caso contrario se dice que  $A$  es **finito**.

**Ejemplo 3.2.** El conjunto  $\mathbb{N}$  de los naturales es infinito ya que si  $2\mathbb{N} = \{2n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es el conjunto de los pares, se tiene que  $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$ , en efecto  $f : \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$  definida por  $f(n) = 2n$  es una biyección.

**Ejemplo 3.3.** El conjunto  $\{1, 2\}$  es finito. Esto se puede demostrar exhaustivamente: Tome todos los subconjuntos propios de  $\{1, 2\}$  que no son sino 3, y demuestre que ninguna de las funciones inyectivas de los subconjuntos en él (en total 5), es biyección. Este método puede resultar muy engorroso para demostrar que los conjuntos que conocemos son finitos. La siguiente proposición da una herramienta para demostrar que un conjunto es finito.

**Proposición 15.** Si a un conjunto finito se le une un conjunto con un solo elemento la unión es un conjunto finito.

**Ejemplo 3.4.**  $\emptyset$  es finito, pues no tiene subconjuntos propios. Por la proposición 15,  $\{0\} = \emptyset \cup \{0\}$  es finito. Así mismo  $\{0, 1\}$  y en general  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  es finito. De esta manera se ve que los cardinales finitos coinciden con los números naturales.

**Definición 17.** Un conjunto  $A$  es enumerable si  $A$  es  $\emptyset$  o existe  $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$  que es sobreyectiva.

**Ejemplo 3.5.**  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  es enumerable. En efecto por ejemplo la función  $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definida recursivamente así

$$f(n) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } n = 0 \\ (i+1, j-1) & \text{si } f(n-1) = (i, j) \text{ con } j > 0 \\ (0, i+1) & \text{si } f(n-1) = (i, 0). \end{cases}$$

¿Cuál es la imagen de 5? Se recomienda calcular suficientes valores de  $f$  para convencerse que realmente es sobreyectiva (en realidad biyección). La demostración formal sería algo más engorroso.

Que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  sea numerable es sorprendente y permite demostrar que muchos otros conjuntos son numerables como  $\mathbb{Q}$ ,

**Ejemplo 3.6.**  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  no es enumerable: Este importante resultado debido a Cantor se generaliza en el Teorema de Cantor (ejercicio 14) que nos permite construir cardinales cada vez más grandes. Si existiera una función  $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$  sobreyectiva, vale hacernos la pregunta ¿ $i \in f(i)$ ? Construimos el conjunto  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\}$  que es como “el barbero que afeita a todos aquellos que no se afeitan a sí mismos”. Como  $f$  es sobreyectiva existirá un  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $f(j) = A$  y nos preguntamos “¿quién afeita al barbero?”, es decir ¿ $j \in f(j)$ ? Las dos posibles respuestas nos llevan a un absurdo, por lo tanto no podemos aceptar que exista tal  $f$  sobreyectiva.

**Definición 18.** Se dice que  $|A| \leq |B|$  si existe una función  $f : A \longrightarrow B$  que es inyectiva.

**Ejemplo 3.7.** Para cualquier conjunto  $X$  se tiene  $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$ . En efecto, si a cada elemento  $x \in X$  se le asocia el conjunto  $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$  se tiene una función inyectiva.

**Proposición 16.** La relación  $\leq$  entre cardinales está bien definida, es reflexiva y transitiva.

**Proposición 17.** Un conjunto es enumerable si su cardinal es menor o igual que el de los naturales.

### 3.1. Conjuntos efectivamente enumerables

**Definición 19.** Un conjunto  $A$  es efectivamente enumerable si existe una función  $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$  sobreyectiva que se puede calcular por un algoritmo.

La mayoría de los conjuntos infinitos numerables que conocemos son efectivamente enumerables por cuanto para describirlos de alguna forma utilizamos un algoritmo. Pero esto solo indica lo poco que conocemos. Una idea de conjuntos enumerables pero no efectivamente enumerables se tiene trabajando el ejercicio 12 de esta sección.

Otra noción más fuerte es la de conjunto decidable que se da para un universo numerable por ejemplo las palabras sobre un alfabeto finito. Se pide que dada una palabra se pueda decidir algorítmicamente si ésta pertenece o no al conjunto.

**Definición 20.** Un lenguaje  $L$  sobre  $\Sigma$  es **decidable** si existe un algoritmo que dada una palabra  $w \in \Sigma^*$  decide si  $w \in L$  o  $w \notin L$ .

**Proposición 18.** *Todo lenguaje decidable es efectivamente enumerable.*

*Demostración.* Como el conjunto de las palabras sobre  $\Sigma$  es efectivamente enumerable, hay un algoritmo para numerarlas. Sea  $S$  el lenguaje decidable, modificamos el algoritmo para numerar todas las palabras preguntado si cada palabra producida pertenece o no a  $S$ , si la respuesta es positiva ésta entra de la numeración de  $S$ , si no, pues no entra. Así obtenemos una numeración de  $S$  □

### 3.2. Ejercicios

1. Exhibir funciones biyectivas entre los conjuntos  $A$  y  $B$  dados (lo cual nos demuestra que en cada caso estos conjuntos son equipotentes):

a)  $A = \mathbb{N}$  y  $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 5\}$ .

b)  $A = \mathbb{Z}$  y  $B = \mathbb{N}$ .

c)  $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$  y  $B = \mathbb{N}$ .

d)  $A = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$  y  $B = \mathbb{N}$ .

e)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$  y  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 7\}$ .

f)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$  y  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x < 7\}$ .

g)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$  y  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \leq 7\}$ .

h)  $A = \{X \mid X \subseteq \{a, b, c\}\}$  y  $B = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ .

i)  $A = \{f : \{0, 1\} \longrightarrow \{a, b, c\} \mid f \text{ es función}\}$  y  $B = \{a, b, c\} \times \{a, b, c\}$ .

j)  $A = \{f : \{0, 1\} \longrightarrow X \mid f \text{ es función}\}$  y  $B = X \times X$  donde  $X$  es cualquier conjunto.

k)  $A = \{X \mid X \subseteq U\}$  y  $B = \{f : U \longrightarrow \{0, 1\} \mid f \text{ es función}\}$  donde  $U = \{a, b, c\}$ .

l)  $A = \{X \mid X \subseteq U\}$  y  $B = \{f : U \longrightarrow \{0, 1\} \mid f \text{ es función}\}$  donde  $U$  es cualquier conjunto.

m) (!)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$  y  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} \times \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ .

- $n)$  (!)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$  y  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$ .
2. Demostrar que si  $A$  es finito y  $B \subseteq A$  entonces  $B$  es finito.
  3. Un conjunto contiene un subconjunto equipotente con  $\mathbb{N}$  si y solo si es infinito.
  4. Demostrar que el conjunto de palabras sobre un alfabeto finito es enumerable infinito.
  5. Elaborar en cada caso un algoritmo para numerar:
    - a) Las palabras sobre  $\Sigma = \{a, b\}$  de longitud  $n$ .
    - b) Las palabras sobre  $\Sigma = \{a, b\}$ .
    - c) Las palabras sobre  $\Sigma = \{a, b\}$  que no contienen la subpalabra  $aa$ .
  6. Cada función  $f$  de  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  en  $\{0, 1, \dots, m-1\}$  se puede representar por un arreglo 1-dimensional, digamos  $A(i)$ , de  $n$  componentes de 0 hasta  $n-1$  en donde  $A(i) = f(i)$ . Elaborar algoritmos para:
    - a) Decidir si una función dada es inyectiva.
    - b) Decidir si una función dada es sobreyectiva.
  7. Cada función  $f$  de  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  en  $\{0, 1, \dots, m-1\}$  se puede representar por un arreglo 1-dimensional, digamos  $A(i)$ , de  $n$  componentes de 0 hasta  $n-1$  en donde  $A(i) = f(i)$ . Elaborar algoritmos (o fórmulas recursivas) para enumerar:
    - a) Las funciones de  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  en  $\{0, 1, \dots, m-1\}$  constantes.
    - b) Todas las funciones de  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  en  $\{0, 1, \dots, m-1\}$ .
    - c) Las funciones inyectivas de  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  en  $\{0, 1, \dots, m-1\}$ .
    - d) Las funciones sobreyectivas de  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  en  $\{0, 1, \dots, m-1\}$ .
    - e) Las funciones biyectivas de  $\{0, 1, \dots, n-1\}$  en  $\{0, 1, \dots, m-1\}$ .
  8. Elaborar algoritmos (o fórmulas recursivas) para enumerar:
    - a)  $\mathbb{N} \times \{a, b\}$ .
    - b)  $\mathbb{N} \times \{a, b, c\}$ .
    - c)  $\mathbb{Z}$ .
    - d)  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .
    - e)  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ .
    - f)  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .
    - g)  $\mathbb{Q}$ .
    - h) Palabras sobre un alfabeto finito  $\Sigma$ .
    - i) Los subconjuntos de  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ .
    - j) Los subconjuntos finitos de  $\mathbb{N}$ .
    - k) Los polinomios con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ .

9. Sea  $A$  un conjunto finito y  $B$  efectivamente enumerable, exhiba algoritmos (si existen) para enumerar:
  - a)  $A \cup B$
  - b)  $B - A$
  - c)  $A \cap B$
  - d)  $A \times B$
10. Sea  $A$  y  $B$  conjuntos efectivamente enumerables, exhiba algoritmos (si existen) para enumerar:
  - a)  $A \cup B$
  - b)  $B - A$
  - c)  $A \cap B$
  - d)  $A \times B$
11. Decidir de cada afirmación si es falsa o verdadera y argumentar brevemente su respuesta.
  - a) Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.
  - b) Todo subconjunto de un conjunto infinito es infinito.
  - c) Todo subconjunto de un conjunto enumerable es enumerable.
  - d) Todo subconjunto de un conjunto efectivamente enumerable es efectivamente enumerable.
  - e) Todo subconjunto de un conjunto decidable es decidable.
  - f) Todo conjunto efectivamente enumerable es decidable.
  - g) Todo conjunto decidable es efectivamente enumerable.
  - h) Todo conjunto efectivamente enumerable es enumerable.
  - i) Todo conjunto enumerable es efectivamente enumerable.
  - j) Todo conjunto enumerable es efectivamente enumerable.
  - k) Cualquier unión de conjuntos enumerables es enumerable.
  - l) Intersección de dos conjuntos decidibles es decidable.
  - m) El conjunto de las tautologías es decidable.
12. Sean  $a_0a_1a_2\dots$  las cifras de la expansión decimal de algún número irracional. Aceptamos que la sucesión de los  $a_i$  es generada algorítmicamente. Dar argumentos para decidir si los siguientes conjuntos son finitos, enumerables, efectivamente enumerables y decidibles.
  - a)  $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k, l \in \mathbb{N} \ ((a_k \dots a_{k+l})_{10} = n)\}$
  - b)  $\{n \in \mathbb{N} \mid \forall N \exists k > N, l \in \mathbb{N} \ ((a_k \dots a_{k+l})_{10} = n)\}$



13. Demostrar que los siguientes conjuntos no son enumerables:

a)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

b)  $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ .

c) Todas las funciones de  $\mathbb{N}$  en  $\{0, 1\}$ .

d) Todas las funciones de  $\mathbb{N}$  en  $\{0, 1, \dots, m-1\}$ .

e) Los subconjuntos de  $\mathbb{N}$ .

f) Los reales entre 0 y 1 que en base 3 se escriben sólo con 0's y 2's (Conjunto ternario de Cantor).

14. **Teorema de Cantor** Para cualquier cardinal  $\alpha$  se tiene:  $\alpha < 2^\alpha$