Aktivitet: Gauss' lov

Nis Sarup 201078

2. marts 2010

SDU - Det Tekniske Fakultet
Kursus: FD-DDF1-U1-1-E09
Vejleder: Rene
Projektperiode: 25. september - 14. december 2009

1 Opgave 1

Kraften på en testmasse i et tyngdefelt er:

$$\vec{F} = G \cdot \frac{m \cdot m_0}{r^2} \cdot \vec{r} \tag{1}$$

Det ligner til forveksling kraften for en punktladning i et elektriskfelt:

$$\vec{F} = k \cdot \frac{q \cdot q_0}{r^2} \cdot \vec{r} \tag{2}$$

For at finde tyngdefeltet, $\vec{T}$, skal vi dividere kraften med testmassen:

$$\vec{T} = \frac{\vec{F}}{m_0} = G \cdot \frac{m}{r^2} \cdot \vec{r} \tag{3}$$

Hvilket er udtrukket for tygndefeltet opstillet på samme måde som Gauss' lov:

$$\vec{E} = k \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{r} \tag{4}$$

Hvis tyngdefeltet skal beregnes hvor testmassen ligger uden for jorden er det bare ligning 3 der skal bruges. Skal tyngdefeltet beregnes inden for jorden, skal der tages højde for at det ikke er hele jordens massen der påvirker testmassen. Da vi snakker om Gauss flader vi intelligent har lagt så tyngdekraftvektorerne ligger vinkelret på overfladen af Gaussfladen vil tyngdefeltet fra den del af jordens masse der ligger uden for Gaussfladen være lig nul, da tyngdekraften på en del af Gaussfladen ophæves af tyngdekraften på den dimentralt modsatte del af Gaussfladen. Ergo kan vi opsætte formlen således:

$$T = \frac{\vec{F}}{m_0} = G \cdot \frac{m'}{r^2} \tag{5}$$

Hvor m' er den del af jordens masse der ligger inden for Gaussfladen. Hvis vi antager at tyngden i jorden er ligeligt fordelt kan vi sige at forholdet mellem hele tyngden af jorden og dens volumen, må være lig forholdet mellem tyngden af den del af jorden inden for Gaussfladen og volumen af Gaussfladen:

$$\begin{aligned} \frac{m'}{\frac{4}{3}\pi r^3} &= \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \\ m' &= q\frac{r^3}{R^3} \end{aligned} \tag{6}$$

Hvor r er Gaussfladens raidus og R er jordens radius. Putter man det ind i ligning 5 får man:

$$E = (\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3})r \tag{7}$$

2 Opgave 2

2.1 Del a

Uden at have noget udtryk for det vil jeg mene at den eneste pertikel der ikke bidrager med et elektrisk felt i punktet P er q_3, da de tre andre partikler "spærrer"for dens feltlinjer ved at have samme ladning og derved skubber dem væk. Dog kan der argumenteres for at q_3 vil have en indflydelse på de tre andre partiklers feltlinjer, og at q_3 derved også har en indflydelse på det elektriske felt i punktet P

2.2 Del b

Netto fluxen gennem en Gaussflade er defineret ved summen af de indkapslede ladninger delt med ϵ_0, ergo er fluxen fra q_1 og q_2 størst:

$$\Phi = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0} \tag{8}$$

3 Opgave 3

3.1 Del a

Fluxen igennem bundfladen vil være det samme som fluxen igennem topfladen, dog med omvendt fortegn. Fluxen gennem sidevæggen vil være lig nul, da væggen er parallel med det elektriske felt. Den elektriske flus vil derfor være lig nul. Endefladerne ophæver hinanden, og sidevæggen bidrager ikke. Den elektriske flux vil derfor være det samme for dem alle sammen og lig nul.

3.2 Del b

Den elektriske flux gennem topfladerne er også ens. Jo mere skrå en flade det elektriske felt strømmer igennem, jo mindre er fluxen. Til gengæld har de slkrå flader, i det her tilfælde, et større areal, der modvirker den mindre gennemstrømning per arealenhed.

En analogi kan være en ventilationsskakt med strømmende luft. Uanset den flade du måler luftgennemstrømningen vil der stadig strømme den samme mængde luft igennem skakten.

4 Opgave 4

Vi har formlen for netto flux gennem en lukket flade:

$$\Phi = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0} \tag{9}$$

Da en terning er lavet af seks lige store dele må fluxen gennem en side være en sjettedel af den samlede flux:

$$\Phi_{\frac{1}{6}} = \frac{q}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{6} \tag{10}$$

5 Opgave 5

5.1 Del a

Da ladningen ligger i overfladen af metalpladen vil den Gaussflade med størst toppladeareal omslutte den største ladning. Rækkefølgen vil derfor være S_3, S_2, S_1.

5.2 Del b

Vi har formlen for størrelsen det elektriske felt ved endefladen på et legeme halvt nedsænket i en leder:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{11}$$

Da overfladearealet ikke indgår i formlen har det ikke nogen indflydelse. Størrelsen af det elektriske felt ved topfladerne må derfor være det samme for alle tre Gaussflader.

5.3 Del c

Det elektriske felt inde i en leder er lig nul og derfor må den elektriske flux igennem bundfladerne også være lig nul.

6 Opgave 6

Hvis vi satte metalkassen om A ville der dannes en ladning på indersiden af kassen og den modsatte ladning på ydersiden af kassen. Dette vil gøre at B stadig er under indflydelse af et elektrisk felt.

Sætter man derimod B ind i kassen vil A skabe en elektrisk ladning på ydersiden vendt mod A og en modsat ladet ladning på ydersiden af kassen vendt væk fra A. B vil derfor ikke være påvirket af noget felt.

7 Opgave 7

Den inderste kugle har ladningen q den inderste skal vil så få en ladning på indersiden på $-q$ og ladningen på ydersiden vil så være $4q$ da nettoladningen skal være $3q$. Den ydersteskal vil så få en ladning på indersiden på $-4q$ og på ydersiden $9q$ da nettoladningen skal være $5q$. Vi får så Elektriske felter for Gaussfladerne, G_1, G_2, G_3 på:

$$\begin{aligned}
E_{G1} &= k \cdot \frac{q}{r^2} \\
E_{G2} &= k \cdot \frac{4q}{(2r)^2} = k \cdot \frac{4q}{4r^2} = k \cdot \frac{q}{r^2} \\
E_{G3} &= k \cdot \frac{9q}{(3r)^2} = k \cdot \frac{9q}{9r^2} = k \cdot \frac{q}{r^2} \Rightarrow \\
E_{G1} &= E_{G2} = E_{G3} \qquad (12)
\end{aligned}$$

Som det kan ses er størrelsen af det elektriske felt på de tre Gaussflader ens.

8 Opgave 8

8.1 Del a

Hvis vi skal have ophævet feltet i punkt 1 (som jeg vælger at tolke som liggende lige langt far overfladen af cylinder a og den inderste overflade af cylinder b) skal indersiden af cylinder b have den samme ladning som overfladen af cylinder a. Dette vil gøre at feltlinjerne afbøjes, så feltet er lig nul i punkt 1.

8.2 Del b

Hvis indersiden af cylinder b har ladningen $+3q_0$ så vil ydersiden have ladningen $-3q_0$ hvis vi så sætter indersiden af cylinder til at have ladningen $-3q_0$ vil feltet i punkt 2 være lig nul.

8.3 Del c

Uanset hvilken ladning vi giver cylindrene vil der altid være et felt da fra ladningerne inde i cylindrene. Vi kan derfor ikke komme af med det elektriske felt i punkt 3.

9 Opgave 9

9.1 Del a

E-feltet når $r = 0$ er lig nul da der ikke er nogen ladning inde i vores Gaussflade.

9.2 Del b

E-feltet når $r = \frac{a}{2}$ er lig nul da der ikke er nogen ladning inde i vores Gaussflade.

9.3 Del c

E-feltet når $r = a$ er lig nul da der ikke er nogen ladning inde i vores Gaussflade.

9.4 Del d

E-feltet kan udregnes ved følgende formel:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \tag{13}$$

Hvor q er den ladning Gausfladen omslutter og r er radius af Gaussfladen, der i dette tilfælde er en kugle.

Sætter vi r til $1.5a$ vil Gaussfladen omslutte noget ladning. Rumfanget af den del af kuglen der har en ladning må være:

$$V = V_d - V_a \tag{14}$$

Hvor V_a er rumfanget af den kugle uden ladning og V_d er rumfanget af kuglen med radius $1.5a$. Resultatet, V, vil så kunne bruges til at regne ud hvor maget ladning der er indenfor Gaussfladen da vi har ladningsdensiteten for objektet: $\rho = 1.84 \cdot 10^{-9} \frac{C}{m^3}$

Ladningen er:

$$\begin{aligned} q &= \rho \cdot V && (15) \\ q &= 1.84 \cdot 0.00994838 && (16) \\ q &= 1.8305 \cdot 10^{-11} C. && (17) \end{aligned}$$

Når vi har fundet ladningen kan vi regne E-feltet ud:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} && (18) \\ E &= 8.99 \cdot 10^9 \cdot \frac{1.8305}{0.15^2} && (19) \\ E &= 7.31387 && (20) \end{aligned}$$

9.5 Del e

Fremgangsmåden er præcist den samme som i del d, man sætter bare $r = b$.

$$E = 12.1256 \tag{21}$$

9.6 Del f

Her skal man passe lidt på da den ladning man skal regne på ikke fylder helt ud til $r = 0.6m$, her vild en ladning Gaussfladen indeholde være lig $5.39516C$ (Ladningen vil være ladningen af kuglen med $r = 0.2m$ minus det indre hulrum). Så vil E-feltet blive:

$$E = 1.34729 \tag{22}$$

10 Opgave 10

10.1 Del a

Vi har Gauss' lov:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc} \tag{23}$$

Og formlen for overfladearealet og volumen af en cylinder:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r h && (24) \\ V &= \pi r^2 h && (25) \end{aligned}$$

Da E-feltet er konstant og Gaussfladen lagt så efeltet står vinkelret på Gaussfladen kan ligning 23 simplificeres:

$$\epsilon_0 E \cdot 2\pi r h = q_{enc} \tag{26}$$

q_{enc} kan vi finde ved:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{q}{v} \\ \rho &= \frac{q}{\pi r^2 h} \\ q &= \rho \pi r^2 h && (27) \end{aligned}$$

Så kan vi sætte ligning 27 ind i 26:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 E \cdot 2\pi r h &= \rho \pi r^2 h \\ \epsilon_0 E \cdot 2 &= \rho r \\ E &= \frac{\rho r}{2\epsilon_0} && (28) \end{aligned}$$

Hvilket jo var det vi skulle vise.

10.2 Del B

Hvis Gaussfladen er større end den ladede cylinder vil det bare betyde at der er nogen r'er der ikke går ud med hinanden da vi akl bruge cylindrens radius R til at udregne q_{enc} i stedet for Gaussfladens radius r.

$$\begin{aligned}
q &= \rho\pi R^2 h \\
\epsilon_0 E \cdot 2\pi r h &= \rho\pi R^2 h \\
\epsilon_0 E \cdot 2r &= \rho R^2 \\
E &= \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0} \qquad (29)
\end{aligned}$$