Opgave 6

(1) $U_{tt} + au_t + bu = c^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$

a) Omskriv den partielle differentialligning til to ordinære differentialligninger ved brug af metoden seperation af variable.

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

Hvilket giver:

$$u_{tt} = F\ddot{G}$$

$$u_{xx} = F''G$$

Dette sættes ind i (1):

$$F\ddot{G} + aF\dot{G} + bFG = c^2 F''G$$

Jeg dividerer med F & G:

$$\frac{\ddot{G} + a\dot{G} + bG}{G} = \frac{c^2 F''}{F} = k$$

Så er venstresiden kun afhængig af t og højresiden kun afhængig af x. De må være konstante da at ændre en variabel ikke ville ændre den anden side.

Jeg ganger over med nævnerne og får 2 ordinære DE'er:

(2) $c^2 F'' - kF = 0$

(3) $\ddot{G} + a\dot{G} + bG - kG = 0$

b) Brug randbetingelserne og differentialligningen for F (x) til at vise at seperationskonstan- ten er negativ, og løs dermed differentialligningen for F (x):

Randbetingelser:

$$u(0,t) = 0$$

$$u(l,t) = 0$$

Hvis k = 0:

$$c^2 F'' = 0$$

Hvilket har løsningen F = ax+b hvor a = b = 0 for at opfylde randbetingelserne.
Dette er uinteressant.

Hvis k er positiv:

$$k = p^2$$

Så:

$$c^2 F'' - p^2 F = 0$$

Diskriminanten findes:

$$D = b^2 - 4ac = 4c^2 p^2$$

Og rødderne:

$$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \pm \frac{p}{c}$$

Når determinanten er over nul er løsningen på formen:

$$F = Ae^{\frac{p}{c}x} + Be^{\frac{-p}{c}x}$$

Dette giver ultimativt at A skal være lig nul for at opfylde randbetingelserne.
Denne løsning er også uinteressant.

Hvis K er negativ:

$$k = -p^2$$

Så fås:

$$c^2F'' + p^2F = 0$$

Diskriminanten bliver så:

$$D = b^2 - 4ac = -4c^2p^2$$

Og rødderne:

$$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \pm\frac{p}{c}$$

Løses

$$F = A\cos\left(\frac{p}{c}x\right) + B\sin\left(\frac{p}{c}x\right)$$

Hvis vi indsætter randbetingelsen u(0,t) = 0 kan vi se at sinusen går ud og A skal være lig nul.
Så sætter vi u(l,t) = 0 og A = 0:

$$F = B\sin\left(\frac{p}{c}L\right)$$

B skal være forskellig fra nul og vi kan udlede:

$$p = \frac{n\pi c}{L}$$

$$\frac{p}{c}L = n\pi$$

Og:

$$F(x) = B\sin\left(\frac{\frac{n\pi c}{L}}{c}x\right)$$

Sættes B = Bn (hvor n er et heltal) fås uendeligt mange løsninger:

$$F(x) = F_n(x) = B_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

c) Find den samlede løsning for u(x, t)

$$\ddot{G} + a\dot{G} + bG - kG = 0$$
$$D = 0$$
$$k = -p^2$$

Omskriver ligningen til:

$$\ddot{G} + a\dot{G} + (b-k)G = 0$$

Finder rødderne:

$$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = -\frac{a}{2}$$

Når determinanten er nul er løsningen på formen:

(4) $f(x) = Ae^{kt} + Be^{kt}$

Indsættelse af rødder:

$$f(x) = Ae^{-\frac{a}{2}t} + Bte^{-\frac{a}{2}t}$$

Begyndelsesbetingelse u(x,o) = f(x):

$$f(x) = Ae^{-\frac{a}{2}o} + B \cdot 0 \cdot e^{-\frac{a}{2}0} \Rightarrow A = f(x)$$

Differentierer (4) til anden begyndelsesbetingelse:

$$u_t(x,0) = 0$$
$$f'(x) = A\frac{-a}{2}e^{\frac{-a}{2}t} + B\left(1 \cdot e^{\frac{-a}{2}t} + t \cdot \frac{-a}{2} \cdot e^{\frac{-a}{2}t}\right)$$

Anden begyndelsesbetingelse sættes ind:

$$0 = f(x) \cdot \frac{-a}{2} + b \Rightarrow B = f(x)\frac{a}{2}$$

A og B kan så indsættes i (4):

$$f(x)e^{\frac{-a}{2}t} + f(x)\frac{a}{2}te^{\frac{-a}{2}t}$$

Det samles sammen:

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left(f_n(x)e^{\frac{-a}{2}t} + f_n(x)\frac{a}{2}te^{\frac{-a}{2}t}\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(u_n(x,t)$$