Opgave 1

Givet to vektorfelter:

$$F(x,y) = \begin{matrix} 4x + 5y^3 - 10xy \\ 15xy^2 - 5x^2 - cy \end{matrix}$$

$$G(x,y) = \begin{matrix} 4x + 5y^3 - 10xy \\ 15xy^2 - 5x^2 - 15x \end{matrix}$$

a) Vis at G ikke er et konservativt vektorfelt:

Hvis de to koordinater i F differentieret med hensyn til henholdsvis y og x ikke giver det samme er vektorfeltet ikke konservativt.

$$\frac{\partial G_y}{\partial x} = 15y^2 - 10x - 15$$
$$\frac{\partial G_x}{\partial y} = 15y^2 - 10x$$

Vektorfeltet er tydeligvist ikke konservativt.

b) For hvilken værdi af c er vektorfeltet F konservativt?

c kan være en vilkårlig konstant da den vil forsvinde og de to differentierede udtryk vil være lig hinanden.

c) Find en potentialfunktion ϕ(x, y) for F (x, y)

Potentialfunktionen for et vektorfelt er givet ved:

$$F = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} i + \frac{\partial\phi}{\partial y} j$$

Dette giver:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 4x + 5y - 10xy$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 15xy^2 - 5x - cy$$

Hvorefter Φ kan findes:

$$\phi_1 = 2x^2 + 5y^3x - 5x^2y + f(y)$$
$$\phi_2 = 5y^3x - 5x^2y + \frac{c}{2}y^2 + g(x)$$

Sættes de lig med hinanden findes:

$$f(y) = -\frac{c}{2}y^2$$

f(y) sættes ind og vi får:

$$\phi = 2x^2 + 5y^3x - 5x^2y - \frac{c}{2}y^2$$

Dette kan verificeres ved at finde $\nabla\phi$ og se at den er lig F.