Opgave 7

Transformér ligningen til normal form og løs denne.

$$u_{xx} + 10u_{xy} + 9u_{yy} = 0$$

Hvor u afhænger af x og y: u(x, y)

Vi ved at:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$$

Vi finder:

$$A = 1$$

$$B = 5$$

$$C = 9$$

Vi kan så finde:

$$Ay'^2 - 2By' + C = 0 \Rightarrow y'^2 - 10y' + 9 = 0$$

Diskriminanten findes:

$$D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 64$$

Hvorved vi kan se ligningen er hyperbolsk

$$y' = \frac{-(-10) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

$$y' = 9 \wedge y' = 1$$

y' integreres og de nye variabler isoleres:

$$y = 9x + c_1$$

$$y = x + c_2$$

$$c_1 = y - 9x = v$$

$$c_2 = y - x = w$$

De afledte af w og v findes med hensyn til x og y:

$$v_x = -9$$

$$v_y = 1$$

$$w_x = -1$$

$$w_y = 1$$

Bruger kædereglen:

$$u_x = u_v \cdot v_x + u_w \cdot w_x = -9u_v - u_w$$

$$u_{xx} = (u_x)_v \cdot v_x + (u_x)_w \cdot w_x = (-9u_v - u_w)_v \cdot (-9) + (-9u_v - u_w)_w \cdot (-1)$$
$$= -9u_{vv} - 10u_{wv} - u_{ww}$$

$$u_{xy} = (u_x)_v \cdot v_y + (u_x)_w \cdot w_y$$
$$= (-9u_v - u_w)_v \cdot 1 + (-9u_v - u_w)_w \cdot 1$$
$$= -9u_{vv} - 10u_{wv} - u_{ww}$$

$$u_y = u_v \cdot v_y + u_w \cdot w_y$$
$$= u_v + u_w$$

$$u_{yy} = (u_y)_v \cdot v_y + (u_y)_w \cdot w_y$$
$$= u_{vv} + 2u_{wv} + u_{ww}$$

Alt dette substitueres ind i den givne ligning:

$$0 = 81u_{vv} + 18u_{wv} + u_{ww} - 90u_{vv} - 100u_{wv} - 10u_{ww} + 9u_{vv} + 18u_{wu} + 9u_{ww}$$
$$= -64u_{wv}$$

u(x,t) findes ved integration:

$$u_{wv} = 0$$
$$u_w = f(w)$$
$$u = \int f(w)dw + g(v)$$
$$= h(w) + g(v)$$

w og v sættes ind fra da vi fandt dem:

$$u(x,y) = h(y-x) + g(y-9x)$$