SCMA 322 Homework 2

August 26, 2021

1. กำหนดให้ $A \neq \emptyset$ เป็นสับเซตของจำนวนจริงที่มีขอบเขตล่าง นิยามเซต $-A = \{-a \mid a \in A\}$ จงแสดงว่า

$$\inf(A) = -\sup(-A)$$

Archimedean theorem

2. กำหนดให้ $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ เป็นเซตของจำนวนอตรรกยะ จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนจริงใด ๆ $a < b$ จะมี $x \in \mathbb{I}$ โดยที่ $a < x < b$ Hint: แสดงว่า $\{r + \sqrt{2} \mid r \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{I}$

3. จงแสดงว่า Complex field ไม่สามารถเป็น ordered field ได้

4. สำหรับ $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ นิยาม $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ จงแสดงว่า $\|\cdot\|_1$ เป็น norm (ซึ่งเรียกว่า l_1-norm)

5. (Optional) การพิสูจน์ Cauchy-Schwarz inequality

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

   โดยใช้ฟังก์ชันกำลังสองดังนี้ สำหรับ $x, y \in \mathbb{R}^k$ พิจารณาฟังก์ชัน $f(t) = \|x + ty\|^2$ ของจำนวนจริง t เขียน $f(t)$ ในรูปของ $at^2 + bt + c$ เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}$ และพิสูจน์บางอย่างเกี่ยวกับ $b^2 - 4ac$ หากทราบว่า $f(t)$ ไม่เป็นลบเสมอ

ส่งภายในวันที่ 5 กันยายน 23:59 น.

1.) **Proof** เนื่องจาก $A \neq \emptyset$ และ $A \subset \mathbb{R}$ โดย A มีขอบเขตบน

จากสัจพจน์ความบริบูรณ์ จึงได้ว่า A มี inf กำหนดให้ $l = \inf A$

จะได้ว่า $l \leq a$; $\forall a \in A$

ดังนั้น $-l \geq -a$; $\forall a \in A$

เพราะฉะนั้น จะเป็นขอบบนของเซต $-A = \{-a \mid a \in A\}$

ดังนั้น $-l = \sup(-A)$ ①

ให้ u เป็นขอบเขตบนของ $-A$

ได้ว่า $u \geq -a$; $\forall a \in A$

$-u \leq a$; $\forall a \in A$

ดังนั้น $-u$ จึงเป็นขอบเขตล่างของ A

ทำให้ $-u \leq l$ เมื่อ $l = \inf A$

เพราะฉะนั้น $u \geq -l$

ดังนั้น ถ้า u เป็นขอบเขตบนของ $-A$ แล้ว $-l \leq u$ ②

จาก ①, ② ทำให้ได้ว่า $-\inf A = \sup(-A)$

$\therefore \inf A = -\sup(-A)$ ∎

$\mathbb{R} - \mathbb{Q}$

2. กำหนดให้ $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ เป็นเซตของจำนวนอตรรกยะ จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนจริงใด ๆ $a < b$ จะมี $x \in \mathbb{I}$ โดยที่ $a < x < b$ Hint: แสดงว่า $\{r + \sqrt{2} \mid r \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{I}$

Proof ให้ $r \in \mathbb{Q}$ ดังนั้น $r = \frac{k_1}{k_2}$ โดย $\forall k_1, k_2 \in$ จำนวนเต็ม

สมมติให้ $r + \sqrt{2} \notin \mathbb{I}$

แสดงว่า $r + \sqrt{2} = \frac{m}{n}$; $\forall m, n \in$ จำนวนเต็ม

$$\frac{k_1}{k_2} + \sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} - \frac{k_1}{k_2}$$

$$\sqrt{2} = \frac{mk_2 - nk_1}{nk_2}$$

จึงได้ว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ เกิดข้อขัดแย้ง

$\therefore r + \sqrt{2} \subset \mathbb{I}$ — (1)

กำหนดให้ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ โดย $a < b$

จะได้ว่า $a < r < b$ (ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงที่ $a < b$ แล้วจะมี จำนวนตรรกยะ $\frac{q}{p}$ ซึ่ง $a < \frac{q}{p} < b$)

ให้ $x = r + \sqrt{2}$

$$t - r_1 = \frac{r_2 - r_1}{\sqrt{2}}$$

พิจารณา $a + \sqrt{2} < r + \sqrt{2} < b + \sqrt{2}$

ซึ่ง $a < a + \sqrt{2} < r + \sqrt{2} < b < b + \sqrt{2}$

ทำให้ได้ว่า $a < r + \sqrt{2} < b$

$\therefore a < x < b$ ∎

3. จงแสดงว่า Complex field ไม่สามารถเป็น ordered field ได้

proof: สมมติให้ complex field เป็น ordered field

ให้ $i \in \mathbb{C}$ โดย $i^2 = -1$

จาก def. of ordered field ดังนั้น หาก $i \neq 0$ แล้ว i หรือ $-i$ ต้องเป็นบวก

กรณีที่ 1 i is positive (จาก P มีระบบปิดภายใต้ $\cdot$)

$i > 0$

$i \cdot i > 0 \cdot i$

$-1 > 0$ เกิดข้อขัดแย้ง

กรณีที่ 2 i is negative

$i < 0$

$-i > 0$

$-i \cdot (-i) > 0 \, (-i)$

$-1 > 0$ เกิดข้อขัดแย้ง

$\therefore$ Complex field ไม่สามารถเป็น ordered field ได้

4. สำหรับ $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ นิยาม $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ จงแสดงว่า $\|\cdot\|_1$ เป็น norm (ซึ่งเรียกว่า l_1-norm)

5. (Optional) การพิสูจน์ Cauchy-Schwarz inequality

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

โดยใช้ฟังก์ชันกำลังสองดังนี้ สำหรับ $x, y \in \mathbb{R}^k$ พิจารณาฟังก์ชัน $f(t) = \|x + ty\|^2$ ของจำนวนจริง t เขียน $f(t)$ ในรูปของ $at^2 + bt + c$ เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}$ และพิสูจน์บางอย่างเกี่ยวกับ $b^2 - 4ac$ หากทราบว่า $f(t)$ ไม่เป็นลบเสมอ