T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
BİLGİSAYAR BİLİMLERİ

NEWTON-RAPHSON YÖNTEMİ

HAYRUNNİSA ULUÇAY

Doç. Dr. Beyza Billur İskender Eroğlu

BALIKESİR, 04-2025

NEWTON-RAPHSON YÖNTEMİ

Tüm kök bulma formülleri arasında en yaygın kullanılanı Newton-Raphson denklemidir. Eğer kök için başlangıç tahmini x_i ise $[x_i, f(x_i)]$ noktasından bir teğet çizilir. Bu teğetin x eksenini kestiği nokta, genellikle kök için daha iyi bir tahmin olur.

Newton-Raphson yöntemi, bu geometrik yorumlamaya dayanarak türetilebilir. Aşağıdaki formülde olduğu gibi, x noktasındaki birinci türev, eğime eşittir.

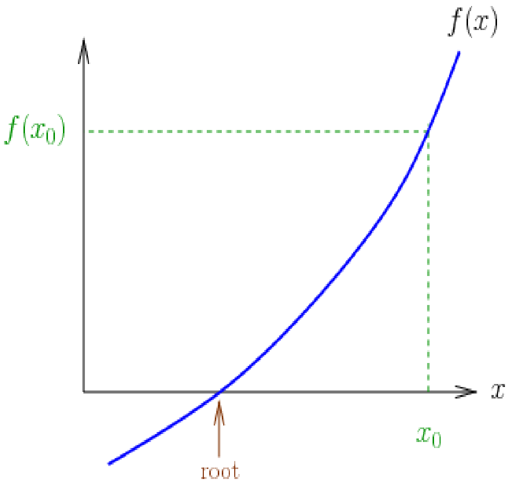
$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

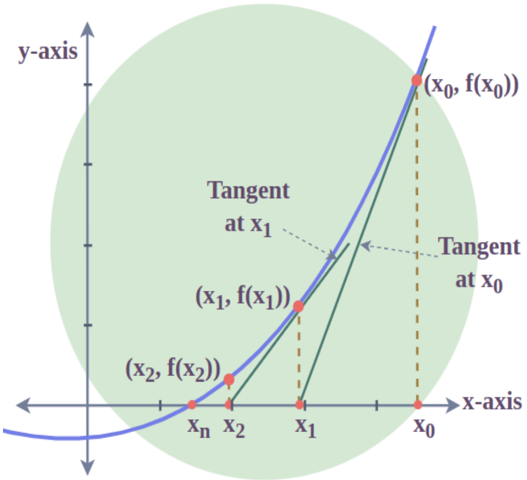
Bu ifade yeniden düzenlenerek şu sonuca ulaşılabilir.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Bu da Newton-Raphson Yöntemi olarak adlandırılır. (1)

NEWTON-RAPHSON YÖNTEMİ HESAPLAMASI





(2) **(3)**

Adım1: f(x)'e x_0 noktasında bir teğet çizilir. Bu başlangıç değeridir. (3.1)

Adım 2: Eğer f(x)'in birinci türevi sıfır değilse, yani f'(x_0) ≠ 0 ise, bu teğet X eksenini sabit bir noktada **(x_1,** 0) kesecektir. Ve x_1= x_0- f(x_0)- f'(x_0) formülü elde edilir. (3.2)

Adım 3: Bu işlemler ardışık olarak tekrarlanır.

Bu kaynaktan ve araştırmalarımdan çıkardığım sonuca göre Newton-Raphson Yöntemi kök bulma, doğrusal olmayan denklemleri çözme, optimizasyon problemleri, makine öğrenmesi ve bazı mühendislik alanlarında kullanılır. Diğer ikiye bölme ve kesme yönteine göre çok daha hızlı ve yakınsama oranı yüksek olduğu için çok yaygın kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntem genellikle bir denklemin veya karmaşık bir sistemde kökün yaklaşık değerini ya da gerçeğe en yakın değerini bulmak için kullanılır. Öncelikle yöntemde problemede verilen başlangıç tahmini(x_0) ile başlanılıp bu tahmine göre sonraki yineleme ile kökleri yaklaşık olarak hesaplar.

Değiştirilmiş Newton-Raphson Yöntemi

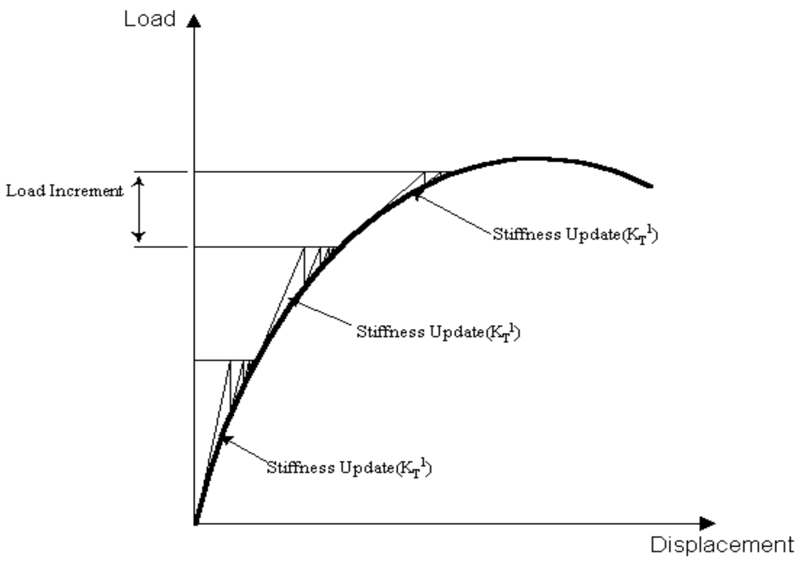
Newton-Raphson yöntemi, başlangıç tahmini doğruya yakınsa çok hızlı çalışır ve kısa sürede sonuca ulaşır. Ancak bu yöntemin bir dezavantajı vardır: Her adımda sistemin eğimini gösteren matris yeniden hesaplanıp ters çevrilir. Bu işlem hem zaman alır hem de bilgisayarı zorlar.
Ayrıca yapı çok karmaşıksa veya malzemenin davranışı doğrusal değilse (nonlineer davranıyorsa), yöntem bazen çözüm bulamayabilir.
Bu gibi durumlarda **değiştirilmiş Newton-Raphson yöntemleri** tercih edilir.
Değiştirilmiş yöntemlerde, her adımda sistemin eğimi tekrar hesaplanmaz. Bunun yerine, başlangıçta bir kez hesaplanır ve birkaç adım boyunca aynı değer kullanılır. Böylece işlemler daha hızlı yapılır.

Değiştirilmiş Newton-Raphson yönteminin üç çeşidi vardır:

- **KT0 yöntemi:** Sadece en başta sistem eğimi hesaplanır ve tüm adımlarda bu kullanılır.
- **KT1 yöntemi:** Her adımın ilk tekrarlamasında sistem eğimi güncellenir.
- **KT2 yöntemi:** Her adımın ilk ve ikinci tekrarlamasında sistem eğimi güncellenir.

Eğer bu yöntemler **ark uzunluğu yöntemi** ile birlikte kullanılacaksa, her adımın başında sistem eğimi mutlaka yeniden hesaplanmalıdır.

Aşağıdaki şekilde KT1 yönteminin adımları gösterilmiştir.



Değiştirilmiş Newton yinelemelerinde yakınsama hızı kuadratik (çok hızlı) değildir ve yöntem bazen çözümden uzaklaşarak başarısız olabilir. Ancak bir "adım arama" (line search) yöntemiyle birlikte kullanıldığında, özellikle çok fazla malzeme doğrusal olmayanlık (nonlineerlik) gösteren yapılar için uygun bir çözüm algoritması oluşur. Geometrik doğrusal olmayan problemler için ise, klasik Newton-Raphson yöntemi, değiştirilmiş Newton yöntemine göre daha etkilidir.

Özellik	**Newton-Raphson**	**Değiştirilmiş Newton-Raphson**
Sistem eğimi (sertlik matrisi) güncellemesi	Her adımda güncellenir	Daha seyrek güncellenir
Yakınsama hızı	Hızlı yakınsar (kuadratik)	Daha yavaş yakınsar (lineer)
Yineleme sayısı	Genellikle az yineleme ile sonuca ulaşır	Genellikle daha fazla yineleme gerektirir
Hesaplama maliyeti	Her adımda maliyet yüksektir	Her adımda daha hafiftir
Malzeme doğrusal olmayanlıklarında davranışı	Başarısız olabilir (örnek: kırılgan çatlama)	Bu tür durumlar için uygundur
Ek destek yöntemleri	-	"İteratif hızlandırma" teknikleriyle desteklenebilir

Genel olarak Newton-Raphson yöntemi daha hızlı ve daha az yineleme ile sonuca ulaşır. Ancak malzeme davranışının çok karmaşık olduğu durumlarda (aşırı doğrusal olmayanlıkta) Değiştirilmiş Newton-Raphson yöntemi daha güvenli bir seçenek olabilir. Hızlı çözüm gereken durumlarda Newton-Raphson, dayanıklılık gereken durumlarda Değiştirilmiş Newton-Raphson tercih edilir. (4)

Değiştirilmiş Newton-Raphson Yöntemi Formülü:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)f'(x_i)}{(f'(x_i))^2 - f(x_i)f''(x_i)} \qquad x_{i+1} = x_i - m\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Newton-Raphson, türev bilgisini doğrudan kullanırken, Modifiye Newton-Raphson türev yerine önceki iki iterasyon bilgisini kullanır. Bu, türev hesaplamasının zor olduğu durumlarda daha uygun olabilir.

Değiştirilmiş Newton-Raphson yönteminde kullanılan m terimi, kökün çokluğunu ifade eder.
Çokluk, bir kökün aynı değerde kaç kez tekrarlandığını gösterir. Örneğin, eğer bir kök denklemi birden fazla kez sağlıyorsa (örneğin çift katlı veya üç katlı kökler varsa), bu kökün çokluğu 2, 3 gibi değerler alır.
Bu bilgi, yöntemin daha hızlı ve doğru şekilde yakınsamasını sağlamak için formülde kullanılır.
Basit kökler için m=1, çift katlı kökler için m=2, üç katlı kökler için m=3 alınır.

NEWTON-RAPHSON YÖNTEMİNDE HATA ANALİZİ

r, f(x) denkleminin gerçek bir kökü olsun bu çözümde n. adımdaki hata:

$$E_n = x_n - r$$

(n+1). adımdaki hata:

$E_{n+1} = x_{n+1} - r$ ‘dir.

Hata Analizi formülü:

$C=1/2(f''(r)/f'(r)$ ‘dir.

C<1 ise bu yöntem yakınsaktır.

Diğer bir yaklaşımla yakınsama formülü ise: $| f(x).f''(x) | < | f'(x) |^2$ ‘dir. Bu koşula uyuyorsa denklem yakınsaktır.

ÖRNEK: $f(x)=x^3+x^2-8x-12=0$ denkleminin katlı köklerini başlangıç noktasını $x_0=0$ alarak 5 adımda hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

$f(0) = -12$ $\qquad$ $x_{n+1}= x_n- f(x_n)/ f'(x_n)$ n=0,1,2,3,4

$f'(x) = 3x^2+2x-8 \Rightarrow f'(x_0) = -8$

1. İterasyon:

$x_1=x_0- f(x_0)/ f'(x_0) \Rightarrow -1.5$

$E_1=|x_1-x_0|= |-1.5-0|=1.5$

$f(x_1) = -1.125$ $\qquad$ $f'(x_1) = - 4.25$

2. İterasyon:

$x_2= x_1 - f(x_1)/f'(x_1) = - 1.764705882362$

$E_1=|x_2-x_1|= |- 1.7647- (-1.5)| = 0.2647$

$f(x_2) = -0.2638$ $\qquad$ $f'(x_2) = -2.19$

3. İterasyon:

$x_3= x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = -1.8850$

$E_1=|x_3-x_2|= |-1.8850 -(-1.7647)| =0.1203$

$f(x_3) = -0.0646$ $\qquad$ $f'(x_3) = -1.1103$

4. İterasyon:

$x_4= x_3 - f(x_3)/f'(x_3) = -1.9432$

$E_1=|x_4-x_3|= 0.0582$

$f(x_4) = -0.0159$ $\qquad$ $f'(x_4) = -0.5583$

5. İterasyon:

$x_5= x_4 - f(x_4)/f'(x_4) = -1.9717$

$E_1=|x_5-x_4|= 0.0285$

MATLAB KODU

```
%Klasik Newton-Raphson Yöntemi

% f(x)=x^3+x^2 -8x-12=0

%Başlangıç noktası x0=0

clc;

clear;

close all;

f=@(x)x^3+x^2-8*x-12;

df=@(x) 3*x^2+2*x-8;

x0=0;

n=5;

fprintf(‘Adım\t x\t\t f(x)\n’);

for i=1:n

x1=x0-f(x0)/df(x0);

fprintf('%d\t  %.6f\t %.6f\n', i, x1,f(x1 ));

x0=x1;

end
```

KAYNAKÇA

(1) Steven C. Chapre, Raymond P. Canale, Numerical Methods for Engineers [PDF file], https://gdcboysang.ac.in/About/Droid/uploads/Numerical%20Methods.pdf (151)

(2) Yasin ÇAPAR," Newton-Raphson Metodu", erişim:26 Nisan 2025, https://yasincapar.com/tr/newton-raphson-metodu/

(3) (3.1) (3.2) GeeksforGeeks," Newton Raphson Method", erişim: 26 Nisan 2025, https://www.geeksforgeeks.org/newton-raphson-method/

(4) Lusas,"Modified Newton Raphson", erişim:27 Nisan 2025, https://www.lusas.com/user_area/theory/Nonlinear_Modified_Newton.html