ऊष्मा समीकरण

व्युतपत्ति तथा एक विमीय हल

विषय पर

प्रयोगशालाभिकार्य प्रतिवेदन

निशान्त मिश्रा

भौतिक विज्ञान अधिस्नातक

अनुक्रमाङ्क २१४९२२

भौतिकी विभाग

द्वारा सिद्ध

श्रावण ६, १९४५

राष्ट्रीय काल्पनिक संस्थान, भारत

१ ऊष्मा समीकरण का व्युत्पत्ति

ऊष्मा प्रवाह की प्रकृति का प्रेक्षण करके ऊष्मा समीकरण को व्युतपन्न किया जा सकता है। ऊष्मा सर्वदा सततः वितरित होती है। ऊष्मा स्रोत तथा प्रेक्षण बिन्दु के मध्य ऐसा कोई स्थान नहीं होता जहाँ ऊष्मा न हो। अतएव, ऊष्मा को सातत्य समीकरण का पालन करना चाहिए। इसे फिक[1] द्वार विसरण का प्रथम नियम कहा जाता है, इसके अनुसार,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad (१.१)$$

जहाँ, $\mathbf{J}$ = ऊष्माभिवाह.
तथा, T = ऊष्मा वितरण फलन

एवम् ऊष्मा का प्रवाह उच्च सान्द्रता के स्थान से निम्न सान्द्रता के स्थान की ओर ही होता है। इसका तात्पर्य हुआ कि ऊष्माभिवाह ताप-प्रवणता के प्रत्यानुक्रमानुपाती है(ऋणात्मक रूप से)

$$\mathbf{J} \propto -\nabla T(x,t) \qquad (१.२)$$

ऋण चिह्न यह बताता है कि ऊष्मा उच्च सान्द्रता वाले स्थान से निम्न सान्द्रता वाले स्थान की ओर प्रवाहित होती है। ऊपर लिखित व्यञ्जक (१.२) के उनुसार,

$$\mathbf{J} = -D\,\nabla T(x,t) \qquad (१.३)$$

इस समीकरण को १.३ फिक द्वारा विसरण का दूसर नियम कहा जाता है।

अथ, समीकरण १.३ से $\mathbf{J}$ का मान प्रथम समीकरण में रखने पर,

$$\frac{\partial T(x,T)}{\partial t} - D\nabla^2 T(x,t) = 0 \qquad (१.४)$$

किंवा

$$\frac{\partial T(x,T)}{\partial t} = D\nabla^2 T(x,t) \qquad (१.५)$$

समीकरण १.५ को ही **ऊष्मा समीकरण** कहा जाता है।
समीकरण १.५ त्रिविमीय है, एक विमा के लिए इसे निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है,

$$\frac{\partial T(x,T)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \qquad (१.६)$$

[1] Fick

२ एक विमीय ऊष्मा समीकरण का हल

समीकरण (१.५) के उभय ओर फूरिये रूपान्तरण करने पर,

$$\mathcal{F}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \mathcal{F}D\nabla^2 T(x,t) \tag{२.१}$$

जहाँ, फूरिये रूपान्तरण निम्न प्रकार से परिभाषित है,

$$\mathcal{F}\big(u(x,t)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{ist}dx \tag{२.२}$$

तथा व्युत्क्रम रूपान्तर :-

$$\mathcal{F}^{-1}\big(\tilde{u}(s,t)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(s,t)e^{-isx}ds \tag{२.३}$$

अतः समीकरण २ का स्वरूप निम्न लिखित हो जाता है

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3} \tag{२.४}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\big(T(x,t)\big) = D\mathcal{F}\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,t) \tag{२.५}$$

$$\frac{\partial \tilde{T}(s,t)}{\partial t} = Di^2s^2\tilde{T}(s,t) \tag{२.६}$$

$$\frac{\partial \tilde{T}(s,t)}{\partial t} = -Ds^2\tilde{T}(s,t) \tag{२.७}$$

जहाँ, $\tilde{T}$ का तात्पर्य रूपान्तरित T है,

$$\frac{\partial \tilde{T}(s,t)}{\partial t} + Ds^2\tilde{T}(s,t) = 0 \tag{२.८}$$

क्योंकि अवकलन मात्र t के सापेक्ष किया जा रहा है, अतः $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{d}{dt}$

तर्हि,

$$\frac{d}{dt}\tilde{T}(s,t) + Ds^2\tilde{T}(s,t) = 0 \tag{२.९}$$

$$\implies \frac{d}{dt}\left[e^{Ds^2t}\tilde{T}(s,t)\right] = 0 \tag{२.१०}$$

't' के सापेक्ष समाकलन करने पर

$$\left[e^{Ds^2t}\tilde{T}(s,t)\right] = C \tag{२.११}$$

जहाँ C समाकलन का नियताङ्क है. यदि, C चर 's' का फलन होता तब भी वह t के सापेक्ष नियताङ्क होता। अतः, C(s) को हम 't' के सापेक्ष होनेवाले समाकलन के लिए नियताङ्क लिख सकते हैं,

$$\tilde{T}(s,t) = C(s)e^{-Ds^2t} \tag{२.१२}$$

अथ, काल t = 0 पर,

$$\tilde{T}(s,t) = C(s) \tag{२.१३}$$

जिसका अभिप्राय हुआ कि C(s) आरम्भिक ताप वितरण फलन $T(x,0)$ का फूरिये रूपान्तरण है

$$C(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} T(x,0)e^{-isx}ds \tag{२.१४}$$

अथ, ऊपर लिखित समीकरण २.१२ के दोनों ओर व्युत्क्रम फूरिये रूपान्तरण करने पर

$$\mathcal{F}^{-1}\tilde{T}(s,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} C(s)e^{-Ds^2t}e^{-isx}ds \tag{२.१५}$$

२.१४ समीकरण से C(s) का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$\mathcal{F}^{-1}\big[\tilde{T}(s,t)\big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} T(x,0)e^{-isx}dse^{-Ds^2t}\right]e^{-isx}ds \tag{२.१६}$$

$$T(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T(y,0)\left[\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-Ds^2t})e^{-isx+isy}ds\right]dy$$

$$T(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T(y,0)\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-Ds^2t})e^{-is(x-y)}ds\right]dy \tag{२.१७}$$

गुरु कोष्ठक के भीतर विद्यमान पद e^{-Ds^2t} के लिए फूरिये रूपान्तरण की परिभाषा है, गुरु कोष्ठ के भीतर वाले पद का समाकलन करने पर,

$$T(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T(y,0)\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{\frac{-(x-y)^2}{4Dt}}\right]dy \tag{२.१८}$$

क्योंकि, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2+\beta x}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$

अतएव,

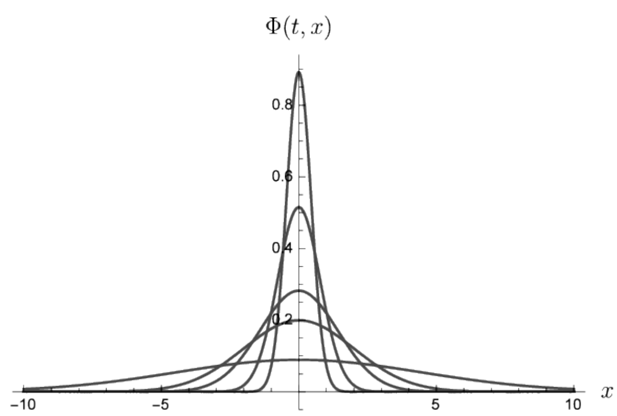
$$T(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T(y,0)\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{\frac{-(x-y)^2}{4Dt}}\right]dy \tag{२.१९}$$

ऊष्मा समीकरण का मौलिक हल है। जहाँ $T(y,0)$ प्रारम्भिक ऊष्मा वितरण है
राशि

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{\frac{-(x-y)^2}{4Dt}} \tag{२.२०}$$

को **ताप अष्टि** कहा जाता है।

y वह बिन्दु है जहाँ ऊष्मा स्रोत था। जिस बिन्दु को प्रथमतः तपाया गया वह y है। जिस अवसर प्रेक्षण प्रारम्भ किया वितरण किसी भी प्रकृति का हो सकता है, उदाहरण के लिए डिराक डेल्टा फलन, परन्तु समय के साथ अनततः वह गाउसीय वितरण बन जाता है। किसी स्वेच्छ समय t के पश्चात् वह गाउसीय हो जाता है। चित्र देखें।



चित्र १: भिन्न अवसरो पर ऊष्मा समीकरण का हल

३ सन्दर्भ ग्रन्थ

Mathematical Physics, V. Balakrishnan, Ane Books Private Limited, 4281 Pranava Bhawan, 24 Ansari Road, Dariaganj, New Delhi - 110002