シンプレクティック特異点と代数幾何

並河良典
京大数理研

はじめに

代数幾何では特異点が重要な働きをしますが, この講演では, シンプレクティック特異点とよばれる対象について紹介します. シンプレクティック特異点は, 代数幾何や幾何学的表現論の様々な場面で登場します. 例えば, 複素正方行列で何回か掛けると 0 になるようなもの全体を考えるとシンプレクティック特異点をもった代数多様体になります. また, トーリック超ケーラー多様体とよばれる代数多様体もこうした特異点を持ちます. 具体例をゆっくりと説明しながら, シンプレクティック特異点に関わるいくつかの話題にアプローチしていく予定です.

1. 代数多様体と特異点

$\mathbf{C}$ を複素数体とする. このとき, 複素数を係数とする n 変数多項式

$$f(x_1, ..., x_n) := \sum_{i_1 \geq 0, ..., i_n \geq 0} a_{i_1, i_2, ..., i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdot ... \cdot x_n^{i_n}$$

を考える. ここで, 和は有限和である. こうした n 変数多項式全体の集合を $\mathbf{C}[x_1, ..., x_n]$ であらわす. 多項式 f, g の間には, 和 $f+g$, 積 fg が定義され, $\mathbf{C}[x_1, ..., x_n]$ は環になる. 特に, $\mathbf{C}[x_1, ..., x_n]$ を n **変数多項式環** とよぶ.

アファイン空間

$$\mathbf{C}^n := \{\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n) \mid \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbf{C}\}$$

の部分集合 X で, 有限個の多項式 $f_1, ..., f_l$ の共通零点集合として表されるもの

$$X = \{\alpha \in \mathbf{C}^n \mid f_1(\alpha) = ... = f_l(\alpha) = 0\}$$

のことを, **代数的集合** とよぶ.

$\mathbf{C}[x_1, ..., x_n]$ の部分集合 I を次のように定義する.

$$I := \{h_1 f_1 + ... + h_l f_l \mid h_1, ..., h_l \in \mathbf{C}[x_1, ..., x_n]\}$$

I は, $\mathbf{C}[x_1, ..., x_n]$ の **イデアル**である. すなわち, $f, g \in I$ であれば, $f+g \in I$ であり, $f \in \mathbf{C}[x_1, ..., x_n]$, $g \in I$ であれば, $fg \in I$ である. このような I を $f_1, ..., f_l$ で生成されるイデアルとよび,

$$I = (f_1, ..., f_l)$$

と書く. I は次の性質をもつとき, **素イデアル**とよぶ:

$f, g \in \mathbf{C}[x_1, ..., x_n], fg \in I$ であれば, $f \in I$ または, $g \in I$.

環をそのイデアルで割ると, 再び環になる. I が素イデアルであることと, 環 $\mathbf{C}[x_1, ..., x_n]/I$ が**整域** であることは同値である. 環 R が整域とは, $f, g \in R$ に対して, $fg = 0$ なら, $f = 0$ または $g = 0$ が成り立つことをいう.

$$X = \{\alpha \in \mathbf{C}^n \mid f(\alpha) = 0, \forall f \in I\}$$

なので, X は, イデアル I で決まっている. I が**素イデアル** のとき, X を**代数多様体**とよぶ.

例. 2 変数の多項式環 $\mathbf{C}[x, y]$ を考える (これは, 変数の記号として, x_1, x_2 のかわりに, x, y を使っただけである). m, n を自然数として,

$$X_{m,n} := \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \; x^m - y^n = 0\}$$

と置いてみよう. $X_{m,n}$ は明らかに代数的集合である. $X_{m,n}$ に対して, $\mathbf{C}[x, y]$ のイデアル $I = (x^m - y^n)$ を考える. ここで, m と n が互いに素でないしよう. このとき, m と n の最大公約数を $k > 1$ とすると, $m = km'$, $n = kn'$ と書ける. ζ を 1 の原始 k-乗根とすると,

$$x^m - y^n = (x^{m'} - y^{n'})(x^{m'} - \zeta y^{n'}) \cdots (x^{m'} - \zeta^{k-1} y^{n'})$$

ここで各因子 $x^{m'} - \zeta^i y^{n'}$ $i = 0, ..., k-1$ はいずれも I には含まれない. しかし, それらの積 $x^m - y^n$ は I の元である. したがって, I は素イデアルではない. 一方, m と n が互いに素であれば, I は素イデアルになる. したがって, $X_{m,n}$ は, m と n が互いに素であるときに限って, 代数多様体になる. □

代数多様体には, **特異点**とよばれる点と, それ以外の**非特異点**とよばれる点がある. そのことについて説明しよう. 今, 代数多様体 X が $\mathbf{C}^n$ の中で, 多項式 $f_1(x_1, ..., x_n)$, ..., $f_l(x_1, ..., x_n)$ の共通零点として定義されているとする. X 上の点 α に対して, α における X の**接平面** $T_\alpha X$ を l 個の式

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\alpha)(x_1 - \alpha_1) + ... + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\alpha)(x_n - \alpha_n) = 0 \quad (i = 1, ..., l)$$

の共通零点として定義する. 一つ一つの式は, α を通る $\mathbf{C}^n$ の超平面を定めることに注意する. $T_\alpha X$ は $\mathbf{C}^n$ の原点 $(0, ..., 0)$ を通るとは限らないが, α を原点に送るような平行移動で移してやると, $\mathbf{C}^n$ の部分ベクトル空間になる. この部分ベクトル空間の次元のことを $T_\alpha X$ の次元とよび, $\dim T_\alpha X$ であらわす. 今, α が X 上を動く時, X のほとんど全ての点 α では, $\dim T_\alpha X$ は一定値をとり, それ以外の例外的な点 α では, この一定値より大きくなる. この

一定値のことを, X の**次元** とよび, $\dim X$ で表す. $\dim T_\alpha X = \dim X$ となる点のことを, X の**非特異点** とよび, $\dim T_\alpha X > \dim X$ となる点 α のことを, X の**特異点**とよぶ.

例.

$$X := \{(x,y,z) \in \mathbf{C}^3 |\, x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$$

の $\alpha := (x_0, y_0, z_0)$ における接空間 $T_\alpha X$ は,

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0$$

である. $\alpha \neq (0,0,0)$ であれば, $\dim T_\alpha X = 2$. いっぽう, $\alpha = (0,0,0)$ のときは, $\dim T_{(0,0,0)} X = 3$. したがって, $\dim X = 2$ で, 特異点は原点 $(0,0,0)$ のみである. □

$\mathbf{C}^n$ はユークリッド位相によって位相空間とみなせる. したがって, 代数多様体 $X \subset \mathbf{C}^n$ も部分位相によって自然に位相空間とみなせる. ほかにも X にはザリスキー位相とよばれる位相を入れることができるがここでは詳しく述べない. 非特異点のまわりでは, 代数多様体は, d 次元**複素多様体**になっている. ここで $d = \dim X$ である. ところで d 次元複素多様体というのは, ハウスドルフな位相空間 M で次の性質をもつもののことである.

(i) M の開被覆 $M = \cup_{i \in I} U_i$ と, 各 U_i から $\mathbf{C}^d$ への連続写像 $\phi_i : U_i \to \mathbf{C}^d$ が存在して, $\phi_i(U_i)$ は $\mathbf{C}^d$ の開集合で, $\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i)$ は同相写像である.

(ii) $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ のとき, 合成射

$$g_{ij} : \phi_j(U_i \cap U_j) \overset{(\phi_j|_{U_i \cap U_j})^{-1}}{\to} U_i \cap U_j \overset{\phi_i|_{U_i \cap U_j}}{\to} \phi_i(U_i \cap U_j)$$

は, 正則同型写像である. g_{ij} のことを変換写像とよぶ.

代数多様体 X の非特異点全体は, X の開集合になる. これを X_{reg} と書く. この時, **X_{reg} は d 次元複素多様体になる.** これを示すには, X の非特異点 p に対して, p の近傍 U と $\phi : U \to \mathbf{C}^d$ を次のように構成する. 接空間 $T_p X$ の次元は d 次元なので, $\mathbf{C}^n$ の中で余次元 $n - d$ である. $T_p X$ は, $\mathbf{C}^n$ の中で定義方程式 の個数個分の超平面の共通部分であった. 余次元が $n - d$ なので, f_1, ..., f_l の中からちょうど $n - d$ 個取ってきて、$T_p X$ は, それに対応する超平面の共通部分であるとしてよい. f_1, ..., f_{n-d} がその $n - d$ 個の定義方程式だとしてよい. 点 $p \in \mathbf{C}^n$ の近傍 V を小さくとると,

$$U = V \cap X = V \cap \{f_1 = ... = f_{n-d} = 0\}$$

が成り立つ. つまり V において X を定義するには, l 個すべての定義多項式が必要ではなく, $n - d$ 個の定義多項式　f_1, ..., f_{n-d} で事足りるというわ

けである. このとき, $z_1 := x_1 - x_1(p), ..., z_n := x_n - x_n(p)$ とおいて f_1, ..., f_{n-d} を z_1, ..., z_n の関数 g_1, ..., g_{n-d} とみなす. つまり,

$$g_i(z_1, ...z_n) := f_i(z_1 + x_1(p), ..., z_n + z_n(p)) \quad i = 1, ..., n-d$$

仮定から, ヤコビ行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1}(0, ...0) & ... & \frac{\partial g_1}{\partial z_n}(0, ..., 0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial z_1}(0, ..., 0) & ... & \frac{\partial g_2}{\partial z_n}(0, ..., 0) \\ & ... & \\ \frac{\partial g_{n-d}}{\partial z_1}(0, ..., 0) & ... & \frac{\partial g_{n-d}}{\partial z_n}(0, ..., 0) \end{pmatrix}$$

は階数が $n-d$ の $(n-d) \times n$-行列である. ここで, $(n-d) \times (n-d)$-小行列

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_{d+1}}(0, ..., 0) & ... & \frac{\partial g_1}{\partial z_n}(0, ..., 0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial z_{d+1}}(0, ..., 0) & ... & \frac{\partial g_2}{\partial z_n}(0, ..., 0) \\ & ... & \\ \frac{\partial g_{n-d}}{\partial z_{d+1}}(0, ..., 0) & ... & \frac{\partial g_{n-d}}{\partial z_n}(0, ..., 0) \end{pmatrix}$$

が正則行列と仮定しても一般性を失わない. X は V において,

$$g_1(z_1, ..., z_n) = ... = g_{n-d}(z_1, ..., z_n) = 0$$

によって定義されていることに注意する. このとき, この方程式を, $z_{d+1}, ..., z_n$ に関して解くことができる. これを**陰関数定理**とよぶ. つまり $z_{d+1}, ..., z_n$ を残りの変数 $z_1, ..., z_d$ の関数として表すことができる:

$$z_{d+1} = h_{d+1}(z_1, ..., z_d), \; ...., \; z_n = h_n(z_1, ..., z_d)$$

ここで, $z_1, ..., z_d$ を U 上の関数だと思って, 連続写像 $\phi : U \to \mathbf{C}^d$ を $\phi = (z_1, ..., z_d)$ として定義する.

複素多様体 M に対して**微分型式**と呼ばれる重要な概念がある. これについて簡単に復習する. k を $k \leq d$ を満たす自然数とする. M には開被覆 $M = \cup_{i \in I} U_i$, 連続写像 $\phi_i : U_i \to \mathbf{C}^d$, そして変換写像 $g_{ij} : \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ が与えられていた. 今, $\phi_i(U_i)$ は $\mathbf{C}^d$ の開集合なので, k-次微分型式

$$\omega_i = \sum_{1 \leq l_1 < l_2 ... < l_k \leq d} f^{(i)}_{l_1, ..., l_k}(z^{(i)}_1, ..., z^{(i)}_d) dz^{(i)}_{l_1} \wedge \cdot \cdot \wedge dz^{(i)}_{l_k}$$

を考えることができる. ここで $z^{(i)}_1, ..., z^{(i)}_d$ は $\mathbf{C}^d$ の座標である. M 上の k-次微分型式 ω (より簡単に k-型式 ω) とは, ω_i の集まり $\{\omega_i\}_{i \in I}$ であって, 各 $i, j \in I$ に対して

$$\omega_i = g^*_{ij} \omega_j$$

が成り立っているもののことである.

例. 代数多様体

$$X := \{(x,y,z) \in \mathbf{C}^3 |\, x^2+y^2+z^2=0\}$$

の非特異部分 X_{reg} の上に 2-型式を作ってみよう. ここでは, **留数**というアイデアを用いる. $X \subset \mathbf{C}^3$ なので, まず入れ物の空間である $\mathbf{C}^3$ 上に 3-型式

$$\omega := \frac{dx \wedge dy \wedge dz}{f(x,y,z)}$$

を用意する. ただし, $f(x,y,z) := x^2+y^2+z^2$ である. ω は X 上で極を持っているので, 正確には, $\mathbf{C}^3 - X$ 上の 3-型式である.

$$U_x := \{(x,y,z) \in X | x \neq 0\}, U_y := \{(x,y,z) \in U_y | y \neq 0\}, U_z := \{(x,y,z) \in X | z \neq 0\}$$

と置くと, $X_{reg} = U_x \cup U_y \cup U_z$ である. いま,

$$\phi_x : U_x \to \mathbf{C}^2,\ (x,y,z) \to (y,z)$$

$$\phi_y : U_y \to \mathbf{C}^2,\ (x,y,z) \to (x,z)$$

$$\phi_z : U_z \to \mathbf{C}^2,\ (x,y,z) \to (x,y)$$

と定義することで, X_{reg} は複素多様体になる. ここで U_x, U_y および U_z 上の 2-型式を以下のように定義する:

$$\frac{dy \wedge dz}{\frac{\partial f}{\partial x}} \text{ on } U_x$$

$$-\frac{dx \wedge dz}{\frac{\partial f}{\partial y}} \text{ on } U_y$$

$$\frac{dx \wedge dy}{\frac{\partial f}{\partial z}} \text{ on } U_z$$

そうすると, これらはうまく貼り合わさり, X_{reg} 上の 2-型式を定義する. これを, **ω の X にそった留数**とよび,

$$\mathrm{Res}_X \omega$$

であらわす.

2. シンプレクティック型式と商特異点

複素多様体 M 上の 2-型式 ω が与えられたとしよう. M の点 p を固定して, p のまわりでの局所座標系を $z_1, ..., z_d$ とする. ω は $p \in M$ の近傍で次の形で与えられる:

$$\omega = \sum_{i<j} a_{ij}(z_1, ..., z_d) dz_i \wedge dz_j$$

ここで ω に付随した d-次反対称行列

$$A(z_1, ...z_d) := \begin{pmatrix} 0 & a_{12}(z_1, ..., z_d) & ... & a_{1d}(z_1, ..., z_d) \\ -a_{12}(z_1, ..., z_d) & 0 & ... & a_{2d}(z_1, ..., z_d) \\ & ... & .... & .... \\ -a_{2d}(z_1, ..., z_d) & ... & 0 & a_{d-1,d}(z_1, ..., z_d) \\ -a_{1d}(z_1, ..., z_d) & ... & -a_{d-1,d}(z_1, ..., z_d) & 0 \end{pmatrix}$$

を考える. この行列の各成分は $(z_1, ..., z_d)$ の正則関数である. $(z_1, ..., z_d)$ に点 p の座標 $(z_1(p), ..., z_d(p))$ を代入すると, $A(z_1(p), ..., z_d(p))$ は複素数を成分にもつ d-次反対称行列である. $A(z_1(p), ..., z_d(p))$ の行列式 $\det(A(z_1(p), ..., z_d(p)))$ が 0 でないとき, ω は p で**非退化**とよぶ. 一方, $\det(A(z_1(p), ..., z_d(p))) = 0$ の場合, ω は p で**退化**しているという. ω が M のすべての点で非退化なとき, ω は M 上の非退化 2-型式とよぶ.

次に ω の外微分 $d\omega$ を考えよう. ω の各項 $a_{ij}dz_i \wedge dz_j$ の外微分は

$$d(a_{ij}dz_i \wedge dz_j) = \sum_{1 \le k \le d} \frac{\partial a_{ij}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_i \wedge dz_j$$

なので, これを使えば $d\omega$ を具体的に表示できる. $d\omega$ は局所座標の取り方によらず定まって, M 上の 3-型式を定義する. $d\omega = 0$ になるとき, ω のことを **d-閉** とよぶ. M 上の非退化 2-型式 ω で d-閉なものを**シンプレクティック型式**とよぶ.

すでに述べたように代数多様体 X の非特異点全体 X_{reg} は複素多様体になる. この講演で扱うのは, X_{reg} 上にシンプレクティック型式 ω がのっているような代数多様体 X である. このような代数多様体を商特異点として構成してみよう. まず $2n$-次元のアファイン空間 $\mathbf{C}^{2n}$ を考え, $(z_1, ..., z_n, w_1, ..., w_n)$ をその座標とする. $\mathbf{C}^{2n}$ 上には標準的なシンプレクティック型式

$$\omega := dz_1 \wedge dw_1 + ... + dz_n \wedge dw_n$$

が存在する. $A := (a_{ij})$ を $2n$ 次複素正方行列で $\det(A) \neq 0$ となるものとする. このとき A は

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \\ w_1 \\ ... \\ w_n \end{pmatrix} \to A \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \\ w_1 \\ ... \\ w_n \end{pmatrix}$$

によって $\mathbf{C}^{2n}$ に作用する．この作用で ω がいつ保たれるかを調べると,

$$A^t \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

を満たすことが必要十分条件であることがわかる．ここで A^t は A の転置行列, I_n は n-次単位行列を表す．そこで

$$Sp(2n, \mathbf{C}) := \{A : 2n \text{ 次複素正則行列} \mid A \text{ は } (*) \text{ を満たす}\}$$

と定義する．$Sp(2n, \mathbf{C})$ は行列の積に関して閉じていて, A が $Sp(2n, \mathbf{C})$ に含まれれば, A^{-1} も $Sp(2n, \mathbf{C})$ に含まれるので**群**になる．$Sp(2n, \mathbf{C})$ を $2n$ **次複素シンプレクティック群**とよぶ． 今, G を $Sp(2n, \mathbf{C})$ の有限部分群とすると, $\mathbf{C}^{2n}$ の G による商空間 $\mathbf{C}^{2n}/G$ を考えることができる．商空間というのは, G の元で移りあう点は同じものとしてあつかった空間のことである．キチンと述べると, $\mathbf{C}^{2n}$ の元 x と y に対して、ある $g \in G$ が存在して, $x = gy$ となる時, x は y と**同値**であるとよぶ. $y = g^{-1}x$ なので, x が y と同値であれば, y は x と同値である． $[x]$ を x と同値な元全体, すなわち $[x] := \{y \in \mathbf{C}^{2n} \mid y = gx \ \exists g \in G\}$ とする．このとき, $[x]$ を x の同値類とよぶ．二つの同値類 $[x]$, $[x']$ は完全に一致するか, 互いに交わらないかのいずれかである．このとき同値類全体の集合のことを $\mathbf{C}^{2n}/G$ と書き, $\mathbf{C}^{2n}$ **の** G **による商空間**と呼ぶ． 自然な全射

$$\pi : \mathbf{C}^{2n} \to \mathbf{C}^{2n}/G \quad (x \to [x])$$

が存在することに注意する．このとき, $\mathbf{C}^{2n}/G$ の部分集合 U に対して, $\pi^{-1}(U)$ が $\mathbf{C}^{2n}$ の開集合であるとき, U は開集合であると定める． これによって, $\mathbf{C}^{2n}/G$ は位相空間となる．

$\mathbf{C}^{2n}$ の点 x に対して, $g \in G$ で $g \neq 1$ であれば, $gx \neq x$ が成り立つとする．このとき G は x に対して自由に作用すると言う．

$$(\mathbf{C}^{2n})^0 := \{x \in \mathbf{C}^{2n} \mid G \text{ は } x \text{ に対して自由に作用する}\}$$

と置くと, $(\mathbf{C}^{2n})^0/G$ は複素多様体になる．$\omega^0 := \omega|_{(\mathbf{C}^{2n})^0}$ は $(\mathbf{C}^{2n})^0$ 上のシンプレクティック型式であるが, $G \subset Sp(2n, \mathbf{C})$ なので, ω^0 は G の作用で不変である．**したがって,** $(\mathbf{C}^{2n})^0/G$ **上にあるシンンプレクティック型式** $\bar{\omega}^0$ **が存在して,** ω^0 **は** $\bar{\omega}^0$ **を商写像** $(\mathbf{C}^{2n})^0 \to (\mathbf{C}^{2n})^0/G$ **で引き戻したものになる.**

$\mathbf{C}^{2n}/G$ 自身は複素多様体にはならないが, 代数多様体とみなすことができる．このことを例を使って簡単に説明しよう．

例.

ζ を 1 の原始 n-乗根として

$$G = \{\begin{pmatrix} \zeta^i & 0 \\ 0 & \zeta^{-i} \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, ..., n-1\}$$

と置く．G は $\mathbf{C}^2$ に自然に作用する．つまり $\mathbf{C}^2$ の座標を z, w とすると，$g_i := \begin{pmatrix} \zeta^i & 0 \\ 0 & \zeta^{-i} \end{pmatrix}$ は

$$(z, w) \to (\zeta^i z, \zeta^{-i} w)$$

によって作用する．容易に確かめられるように，G の作用で，シンプレクティック型式

$$\omega = dz \wedge dw$$

は不変である．ここで z と w で生成される 2 変数多項式環を $\mathbf{C}[z, w]$ とする．今，多項式 $f(z, w) \in \mathbf{C}[z, w]$ に対して，

$$f^{g_i}(z, w) := f(\zeta^i z, \zeta^{-i} w)$$

と置くと，g_i は多項式環 $\mathbf{C}[z, w]$ の環同型射

$$g_i^* : \mathbf{C}[z, w] \to \mathbf{C}[z, w] \quad f(z, w) \to f^{g_i}(z, w)$$

を引き起こす．これによって群 G は多項式環 $\mathbf{C}[z, w]$ にも作用する．ここで $\mathbf{C}[z, w]$ の中で G-不変な多項式全体からなる部分集合

$$\mathbf{C}[z, w]^G := \{f(z, w) \in \mathbf{C}[z, w] \mid f^{g_i}(z, w) = f(z, w) \ \forall i\}$$

を考える．この集合は積と和に関して閉じているので $\mathbf{C}[z, w]$ の **G-不変式環**とよばれる．z^n, w^n, zw は $\mathbf{C}[z, w]^G$ の元であるが，$\mathbf{C}[z, w]^G$ の任意の元は，これら 3 つの元のスカラー倍，和，積の組み合わせで表される．実際 $f(z, w)$ を G-不変式とする．このとき

$$f(z, w) \quad = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} z^j w^j$$

の形で書くと，$f^{g_1}(z, w) := \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} \zeta^{i-j} z^i w^j$ である．f が G-不変であることと $f^{g_1} = f$ であることは同値である．したがって $a_{ij} \neq 0$ となる各々の i, j に対して，ある整数 l が存在して $i = j + nl$ と書ける．つまり $i \geq j$ のときは $z^i w^j = (zw)^j (z^n)^l$ と書け，$i \leq j$ のときは，$z^i w^j = (zw)^i (w^n)^{-l}$ と書ける．これが示したかったことだった．環の言葉で言い直すと，

$$\mathbf{C}[z, w]^G = \mathbf{C}[z^n, w^n, zw]$$

が成りたつということになる．z^n, w^n, zw は $\mathbf{C}^2$ 上の関数であるが，これらは G-不変な関数なので，$\mathbf{C}^2/G$ 上の関数とみなすことができる．そこで写像

$$\phi : \mathbf{C}^2/G \to \mathbf{C}^3$$

を $p \in \mathbf{C}^2/G$ に対して，$\phi(p) = (z^n(p), w^n(p), zw(p)$ と置くことにより定義する．$\mathbf{C}^3$ の座標を (s,t,u) とする．ここで z^n, w^n, zw の間には，$(z^n)(w^n) = (zw)^n$ という関係があることに注意する．そこで

$$X := \{(s,t,u) \in \mathbf{C}^3 \mid st = u^n\}$$

と定義すると，ϕ の像 $\mathrm{Im}(\phi)$ は X に含まれることがわかる．実は，ϕ は，$\mathbf{C}^2/G$ から X への同相写像であることが証明できる．つまり ϕ によって $\mathbf{C}^2/G$ を代数多様体 X とみなすことができるのである．□

一般の $\mathbf{C}^{2n}/G$ の場合にも同様に，G-不変式環 $\mathbf{C}[z_1,...,z_n,w_1,...,w_n]^G$ を考える． この環は，$\mathbf{C}$ 上有限生成であることがわかる． その生成元を $u_1,...,u_N$ としよう．先の例では，z^n, w^n, zw が生成元である．N 変数多項式環 $\mathbf{C}[x_1,...,x_n]$ から $\mathbf{C}[z_1,...,z_n,w_1,...,w_n]^G$ への全射準同型写像 $\varphi : \mathbf{C}[x_1,...,x_n] \to \mathbf{C}[z_1,...,z_n,w_1,...,w_n]^G$ を $\varphi(x_i) = u_i$ $i = 1,...,N$ によって定義する． このとき $I := \mathrm{Ker}(\varphi)$ と置くと，I は $\mathbf{C}^N$ の中の代数多様体 X を決める． さて，$u_1,...,u_N$ は $\mathbf{C}^{2n}$ 上の関数とみなすことができるが，G-不変なので，$\mathbf{C}^{2n}/G$ 上の関数である． そこで $\phi : \mathbf{C}^{2n}/G \to \mathbf{C}^N$ を $\phi(p) := (u_1(p),...,u_N(p))$ によって定義する．このとき ϕ は同相写像

$$\mathbf{C}^{2n}/G \to X \subset \mathbf{C}^N$$

を誘導する．これによって，$\mathbf{C}^{2n}/G$ は代数多様体 X と同一視される．先ほど，$(\mathbf{C}^{2n})^0/G$ が複素多様体であると述べた．実は $(\mathbf{C}^{2n})^0/G$ は $\mathbf{C}^{2n}/G$ と X の間の同一視のもとで，X_{reg} に他ならないことが示される．もう一度整理すると，**$\mathbf{C}^{2n}/G$ には自然に代数多様体の構造が入り，その非特異部分には，シンプレクティック型式がのっている．**

2 次元のシンプレクティック商特異点 $\mathbf{C}^2/G$ は**クライン特異点**ともよばれ，完全に分類されている．まず $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2,\mathbf{C})$ であるためには

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

でなければならない．これは $ad - bc = 1$ と同値である．したがって $Sp(2,\mathbf{C})$ は行列式が 1 であるような複素 2 次正方行列全体 $SL(2,\mathbf{C})$ に等しい．$SL(2,\mathbf{C})$

の (非自明な) 有限部分群 G は, 位数 n の巡回群 C_n $(n > 1)$, 2 項正 2 面体群 $\tilde{D}_n$ $(n > 1)$, 2 項正 4 面体群 $\tilde{T}$, 2 項正 8 面体群 $\tilde{O}$, 2 項正 20 面体群 $\tilde{I}$ のいずれかに同型であり, 同型な部分群は互いに共役であることが知られている. 2 項正多面群の定義はここでは述べないが, 位数は $|\tilde{D}_n| = 4n$, $|\tilde{T}| = 24$, $|\tilde{O}| = 48$, $|\tilde{I}| = 120$ である. 不変式環 $\mathbf{C}[z, w]^G$ を具体的に計算することができて, $\mathbf{C}^2/G$ は 次の形の超曲面 $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$ と同型である.

$$G = C_n\ (n > 1): \quad f(x, y, z) = xy - z^n$$

$$G = \tilde{D}_n\ (n > 1): \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 z + z^{n+1}$$

$$G = \tilde{T}: \quad f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$$

$$G = \tilde{O}: \quad f(x, y, z) = x^2 + y^3 + yz^3$$

$$G = \tilde{I}: \quad f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^5$$

3. べき零軌道

$$SL(n, \mathbf{C}) := \{A : n \text{ 次複素正方行列} \mid \ \det(A) = 1\}$$

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) := \{X : n \text{ 次複素正方行列} \mid \ \mathrm{trace}(X) = 0\}$$

とおく. 定義から容易にわかるように, $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ は $\mathbf{C}^{n^2-1}$ と同一視できる ($\mathrm{trace}(X) = 0$ の条件を使って変数を一つ減らす). n 次正方行列 X に対して $\exp(X)$ を

$$\exp(X) := I_n + X + 1/2! \cdot X^2 + 1/3! \cdot X^3 + ...$$

で定義する. exp は指数写像

$$\exp : \mathfrak{sl}(\mathfrak{n}, \mathbf{C}) \to SL(n, \mathbf{C})$$

を定める. $\exp(0) = I_n$ であり, $0 \in \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ の近傍 U を十分小さくとると, $\exp|_U : U \to \exp(U)$ は同相写像になる. $V := \exp(U)$ とおくと, V は $I_n \in SL(n, \mathbf{C})$ の近傍である. $A \in SL(n, \mathbf{C})$ は左からの掛け算によって $SL(n, \mathbf{C})$ の自己同型射をあたえる. これを $L_A : SL(n, \mathbf{C}) \to SL(n, \mathbf{C})$ と書く. つまり $L_A(B) := AB$, $B \in SL(n, \mathbf{C})$ である. このとき, $V_A := (L_A)(V)$ は $A \in SL(n, \mathbf{C})$ の近傍であり, $\phi_A := (\exp|_U)^{-1} \circ (L_A)^{-1}$ は V_A から $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) = \mathbf{C}^{n^2-1}$ への写像になる. $\{(V_A, \phi_A)\}$ を座標近傍とすることによって $SL(n, \mathbf{C})$ は $n^2 - 1$ 次元複素多様体になる. つまり $SL(n, \mathbf{C})$ は**複素リー群**である. 実は, $SL(n, \mathbf{C})$ は代数多様体でもある. 実際 $A = (a_{ij})$ に対して

$\det(A)$ は $\{a_{ij}\}$ に関して次数 n の多項式である．この多項式を det であらわす．このとき

$$SL(n,\mathbf{C}) = \{(t_{11}, t_{12}, ..., t_{nn}) \in \mathbf{C}^{n^2} |\ \det(t_{11}, ..., t_{nn}) - 1 = 0\}$$

である．このように代数多様体であって群構造をもつもののことを**代数群**とよぶ．したがって $SL(n,\mathbf{C})$ は代数群である．

複素多様体 M に対して**ベクトル場**と呼ばれる重要な概念がある．これについて簡単に復習する．M には開被覆 $M = \cup_{i\in I} U_i$, 連続写像 $\phi_i : U_i \to \mathbf{C}^d$, そして変換写像 $g_{ij} : \phi_j(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$ が与えられていた．今, $\phi_i(U_i)$ は $\mathbf{C}^d$ の開集合なので, 微分作用素

$$v_i = \sum f_l(z_1^{(i)}, ..., z_d^{(i)}) \frac{\partial}{\partial z_l^{(i)}}$$

を考えることができる．すなわち, v_i は 関数 g に

$$v_i(g) = \sum f_l(z_1^{(i)}, ..., z_d^{(i)}) \frac{\partial g}{\partial z_l^{(i)}}$$

よって作用する．M 上のベクトル場 v とは, v_i の集まり $\{v_i\}$ で, $(g_{ij})_* v_i = v_j$ を満たすようなもののことである．

今度は M の点 p を固定して, p を含むような座標近傍 U_i を取る．このとき点 p における微分作用素

$$(v_i)_p = \sum a_l (\frac{\partial}{\partial z_l^{(i)}})_p$$

を考えることにする．ここで a_l は定数である．p の近傍で定義された関数 g に対して $(v_i)_p$ は

$$(v_i)_p(g) = \sum a_l \frac{\partial g}{\partial z_l^{(i)}}(p)$$

で作用する．こうした $(v_i)_p$ を点 p における**接ベクトル**とよぶ．ただし点 p を含む別の U_j に対して $(v_j)_p$ を取ったとき, g_{ij} によって, $(v_i)_p$ と $(v_j)_p$ が同一視されたとする．このとき両者は同じものと理解する．点 p の接ベクトル全体の集合を T_pM と書く．T_pM は自然に $\mathbf{C}$-ベクトル空間になるので, T_pM のことを M の点 p における**接空間**とよぶ．

複素多様体 M と N の間に正則写像 $\varphi : M \to N$ が存在して, $p \in M$, $q = \varphi(p)$ とすると, 自然な射 $\varphi_* : T_pM \to T_qN$ が存在する．

もとの設定にもどると, exp は接空間の間の射

$$\exp_* : T_0\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C}) \to T_{I_n} SL(n,\mathbf{C})$$

を誘導するが, exp によって $SL(n,\mathbf{C})$ の座標近傍を与えていたので, この射は同型である. $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ はアファイン空間なので, 接空間 $T_0\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ は $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ に自然に同一視される. したがって, $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ **は** $SL(n,\mathbf{C})$ **の単位元における接空間とみなすことができる**. さらに $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ は**複素リー環**とよばれるものになる. つまり $X,Y \in \mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ に対して $[X,Y] := XY - YX$ によってブラケット積を定義すると, $[aX,Y] = a[X,Y]$, $[X,aY] = a[X,Y]$ $(a \in \mathbf{C})$, $[X,Y] = -[Y,X]$,

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

を満たす. 最後の等式をヤコビ恒等式とよぶ. 実は $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ は $SL(n,\mathbf{C})$ 上の左不変ベクトル場全体の空間ともみなせ, 上で定義したブラケット積は, ベクトル場の間のブラケット積に一致する.

$SL(n,\mathbf{C})$ は $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ に $X \to AXA^{-1}$ によって左から作用する. これを**随伴作用** (adjoint action) とよぶ. $X \in \mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ を固定して,

$$O_X := \{Y \in \mathfrak{sl}(n,\mathbf{C}) \mid Y = AXA^{-1},\ A \in SL(n,\mathbf{C})\}$$

のことを, X の**随伴軌道** (adjoint orbit) とよぶ. 定義から $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ は (一般に無限個の) 互いに交わらない随伴軌道の合併集合である. 線形代数でおなじみのように, 随伴軌道 O_X は, X のジョルダン標準型によって決定される. 複素数 α と自然数 m にたいして, m 次正方行列 $J(\alpha,m)$ を

$$J(\alpha,m) := \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & ... & ... \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & ... \\ & & ... & & \\ 0 & ... & ... & \alpha & 1 \\ 0 & ... & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

で定義する. X の相異なる固有値を $\alpha_1, ..., \alpha_r$ とすると, 適当な $A \in SL(n,\mathbf{C})$ を用いて,

$$AXA^{-1}$$

$$= \oplus_{1\le j\le k_1} J(\alpha_1, m_{1,j}) \oplus ... \oplus_{1\le j\le k_2} J(\alpha_2, m_{2,j}) \oplus ... \oplus_{1\le j\le m_{r,k_r}} J(\alpha_r, m_{r,j})$$

と表示できる. 右辺は $J(\alpha_1, m_{1,1})$, ..., $J(\alpha_r, m_{r,k_r})$ を対角線に沿って並べてできるサイズが $m_{1,1} + ... + m_{r,k_r}$ の正方行列で, X の**ジョルダン標準型**とよばれる. 左辺は n 次正方行列なので, $n = m_{1,1} + ... + m_{r,k_r}$ である. 固有値と $\{m_{i,j}\}$ の組は X から一意的に決まる.

以下では, 随伴軌道 O_X の $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ における閉包 $\bar{O}_X$ が代数多様体になることを示し, O_X 上に自然なシンプレクティック型式を構成する. O_X の

点 X_0 を固定する．$A \in SL(n, \mathbf{C})$ に対して，$AX_0A^{-1} \in \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ を対応させることにより，写像 $Ad_{X_0} : SL(n, \mathbf{C}) \to \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ が定義される．Ad_{X_0} の像 $\mathrm{Im}(Ad_{X_0})$ は O_X に一致する．Ad_{X_0} は代数多様体の正則写像なので，$\mathrm{Im}(Ad_{X_0})$ の閉包は，代数多様体である．すなわち，$\bar{O}_X$ は代数多様体である．さらに，O_X には $SL(n, \mathbf{C})$ が推移的に作用するので，O_X の各点での接空間は一定次元であり，O_X の点は $\bar{O}_X$ の非特異点である．特に，O_X は複素多様体である．$Ad_{X_0}(I_n) = X_0$ なので，接空間の間に射

$$(Ad_{X_0})_* : \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) \to T_{X_0}(O_X)$$

が存在する．ここで，$T_{I_n}SL(n, \mathbf{C}) = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ であることを用いた．O_X 上に 2-型式をつくるためには，各 X_0 に対して，反対称型式

$$\omega_{X_0} : T_{X_0}O_X \times T_{X_0}O_X \to \mathbf{C}$$

を構成すればよい．まず $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ 上には対称型式

$$\kappa : \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) \times \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) \to \mathbf{C} \;\; (Y, Z) \to \mathrm{trace}(YZ)$$

が存在することに注意する．κ は非退化であり，恒等式

$$\kappa([Y, Z], W) + \kappa(Y, [Z, W]) = 0$$

を満たす．さて，簡単のため，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ とおき，

$$\mathfrak{g}^{X_0} := \{Y \in \mathfrak{g} \mid [X_0, Y] = 0\}$$

と定義する．このとき，$\mathrm{Ker}(Ad_{X_0}) = \mathfrak{g}^{X_0}$ となるので，$T_X(O_X) = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{X_0}$ である．今，反対称型式

$$\tilde{\omega}_{X_0} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbf{C}$$

を $\omega_{X_0}(Y, Z) := \kappa(X_0, [Y, Z]))$ で定義する．もし，$Y \in \mathfrak{g}^{X_0}$ とすると，$\kappa(X_0, [Y, Z])) = -\kappa([X_0, Y], Z) = 0$ となる．同様に $Z \in \mathfrak{g}^{X_0}$ であっても，$\kappa(X_0, [Y, Z])) = -\kappa(X_0, [Z, Y]) = \kappa([X_0, Z], Y) = 0$ である．また、すべての $Z \in \mathfrak{g}$ に対して，$\kappa(X_0, [Y, Z]) = 0$ であれば，$\kappa([X_0, Y], Z) = 0$ である．このとき，κ の非退化性から，$Y \in \mathfrak{g}^{X_0}$ である．同様に，すべての $Y \in \mathfrak{g}$ に対して，$\kappa(X_0, [Y, Z]) = 0$ であれば，$Z \in \mathfrak{g}^{X_0}$ である．したがって，$\tilde{\omega}_{X_0}$ は非退化な反対称型式

$$\omega_{X_0} : \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{X_0} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{X_0} \to \mathbf{C}$$

を誘導する．X_0 を O_X の中で動かすことによって，$\omega := \{\omega_{X_0}\}$ は O_X 上の非退化 2-型式になる．実は，こうして作った ω は d-閉であることがわかる．

したがって, ω は O_X 上のシンプレクティック型式である. この ω のことを改めて ω_{KK} と書いて, O_X の**キリロフ-コスタント**型式と呼ぶ.

随伴軌道が $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ の中でどういう配置になっているかを理解するには, 随伴商写像とよばれる写像を観察するのが良い. $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ の元 X の固有多項式を $\phi_X(t) := \det(tI_n - X)$ とする. $\phi_X(t)$ は, t に関して n 次式になる:

$$\phi_X(t) = t^n + c_1(X)t^{n-1} + c_2(X)t^{n-2} + ... + c_{n-1}(X)t + c_n(X).$$

ここで $X = (x_{ij})$ とすると, $c_l(X)$ は $\{x_{ij}\}$ に関して l 次の斉次多項式である. $c_1(X) = -\mathrm{trace}(X) = 0$ に注意する. このとき, 随伴商写像

$$\chi : \mathfrak{sl}(n,\mathbf{C}) \to \mathbf{C}^{n-1}$$

を $\chi(X) := (c_2(X), ..., c_n(X))$ によって定義する. χ のファイバーが何になるかを見てみよう. $a := (a_2, ..., a_n)$ 上のファイバー $\chi^{-1}(a)$ は固有多項式が $t^n + a_2 t^{n-2} + ... + a_n$ になるような行列 X からなる. この式の根が X の固有値にほかならないので, $\chi^{-1}(a)$ に含まれる行列の固有値は皆同じである. 固有値を固定すると, ジョルダン標準型のタイプは有限個しかない. したがって, χ の各ファイバーは（たがいに交わらない) 有限個の随伴軌道の合併集合である. 原点 $0 \in \mathbf{C}^{n-1}$ 上のファイバー $\chi^{-1}(0)$ は**べき零錐**とよばれ, $\mathcal{N}$ で表す. べき零錐は, すべてのべき零行列全体からなる代数多様体である. $\mathcal{N}$ に含まれる随伴軌道のことを**べき零軌道**とよぶ.

べき零行列 X のジョルダン標準型は $J(0,d'_1) \oplus ... \oplus J(0,d'_r)$ の形であり, $d'_1 + ... + d'_r = n$ である. 言い換えると, $[d'_1, ..., d'_r]$ は n の分割を与える. $d'_1, ..., d'_r$ のうち相異なるものを d_1, ..., d_k とする. これを大きい順に並び替え, $d_1 > ... > d_k$ と仮定する. また各 d_j は $[d'_1, ..., d'_r]$ の中にちょうど i_j 回現れるとする. このとき, もとの分割を $\mathbf{d} := [d_1^{i_1}, ...d_k^{i_k}]$ で表す. そこで, べき零行列 X に対しては, O_X のかわりに $O_{\mathbf{d}}$ と書くことにする. べき零軌道の間にはある種のヒエラルキーがある. $O_{\mathbf{d}}$, $O_{\mathbf{d}'}$ を $\mathfrak{sl}(n,\mathbf{C})$ のべき零軌道としたとき,

$$O_{\mathbf{d}} \geq O_{\mathbf{d}'} \Leftrightarrow O_{\mathbf{d}'} \subset \bar{O}_{\mathbf{d}}$$

によってべき零軌道の間に順序をつける. いっぽう分割 $\mathbf{d}$ の間に次のように順序を入れる. つまり, 2 つの分割 $\mathbf{d}$, $\mathbf{d}'$ に対して, $d_1 + .. + d_i \geq d'_1 + ... + d'_i$ $(\forall i)$ であるとき, $\mathbf{d} \geq \mathbf{d}'$ と定義する. 実は,

$$O_{\mathbf{d}} \geq O_{\mathbf{d}'} \Leftrightarrow \mathbf{d} \geq \mathbf{d}'$$

であることがわかる. この意味で $O_{[n]}$ は最大のべき零軌道であり, **正則べき零軌道**とよばれる. また $O_{[n-1,1]}$ は 2 番目に大きなべき零軌道であり, **副正則**

べき零軌道という名前がついている. いっぽう $O_{[1^n]} = \{0\}$ であり, $O_{[2,1^{n-2}]}$ は原点を除くと最小のべき零軌道なので, **極小べき零軌道**とよばれる.

たとえば $\mathfrak{sl}(6,\mathbf{C})$ のべき零軌道のヒエラルキーは, 次のようになる (上にいくほど大きな軌道であり, 同じ段に書かれてある軌道どうしは, 大小関係がつかない):

$$O_{[6]}$$

$$O_{[5,1]}$$

$$O_{[4,2]}$$

$$O_{[4,1^2]} \quad O_{[3^2]}$$

$$O_{[3,2,1]}$$

$$O_{[3,1^3]} \quad O_{[2^3]}$$

$$O_{[2^2,1^2]}$$

$$O_{[2,1^4]}$$

$$O_{[1^6]}$$

例.

$\mathfrak{sl}(6,\mathbf{C})$ のべき零錐 $\mathcal{N}$ を考える. $\mathcal{N} = \bar{O}_{[6]}$ であり, $\mathcal{N}_{reg} = O_{[6]}$ であることに注意する. $\mathcal{N}$ の特異点を解消してみよう. つまり, ある複素多様体 Z と固有正則写像 $\pi : Z \to \mathcal{N}$ で次の 2 つの条件を満たすものを構成する: (1) π は全射, (2) $\pi|_{\pi^{-1}(O_{[6]})} : \pi^{-1}(O_{[6]}) \to O_{[6]}$ は同型である. ここで写像が固有的というのは, コンパクト部分集合の逆像がつねにコンパクトであることを言う. まず旗多様体とよばれる複素多様体から出発する. ここで旗というのは, $\mathbf{C}^6$ の部分空間の列

$$V_\cdot : \quad \{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_5 \subset \mathbf{C}^6$$

で $\dim V_i = i$ となるようなものをさす. 旗全体の集合 F は複素多様体の構造をもつ. このことを見るには, F に $SL(6,\mathbf{C})$ が推移的に作用していることに注意する. つまり $A \in SL(6,\mathbf{C})$ を $\mathbf{C}^6$ の線型変換だとみなすと, A は $V_\cdot$ を

$$A(V_\cdot) : \quad \{0\} \subset A(V_1) \subset A(V_2) \subset ... \subset A(V_5) \subset \mathbf{C}^6$$

に移す. 推移的というのは, 任意の 2 つの旗が, $SL(6,\mathbf{C})$ の元で移りあうことを言う. 今, $\mathbf{C}^6$ の標準基底 e_1, ..., e_6 に対して, 旗 $V_\cdot^0$ を

$$V_\cdot^0 : \quad \{0\} \subset \langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset ... \subset \langle e_1, ..., e_5 \rangle \subset \mathbf{C}^6$$

で定義する．$SL(6,\mathbf{C})$ の元 A で $A(V_\cdot^0)=V_\cdot^0$ となるようなもの全体 Q は $SL(6,\mathbf{C})$ の部分群になる．Q のことを $V_\cdot^0$ の固定化部分群とよぶ．

$$Q=\{\begin{pmatrix} * & * & * & *. & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}\}$$

写像 $SL(6,\mathbf{C})\to F$ を $A\to A(V_\cdot^0)$ で定義すると, この写像は全射であり, 全単射 $SL(6,\mathbf{C})/Q\cong F$ を誘導する．左辺は複素リー群を放物閉部分群でわった等質空間なのでコンパクト複素多様体になる．

$$\dim SL(6,\mathbf{C})/Q=5+4+3+2+1=15$$

であるから, $\dim F=15$ である．ここで

$$Z:=\{(V.,x)\in F\times\mathfrak{sl}(6,\mathbf{C})\mid x(V_i)\subset V_{i-1}\ \forall i\}$$

とおく．Z から F へ x を忘れるという自然な全射 $p:Z\to F$ がある．すなわち $p(V.,x)=V.$ である．p のファイバーが何になるか見てみよう．$V.\in F$ に対して, $\mathbf{C}^6$ の基底 $w_1,...,w_6$ を $V_i=\langle w_1,...,w_i\rangle$ となるようにとる．$\mathbf{C}^6$ の元をこの基底を使って縦ベクトル表示する．このとき $x(V_i)\subset V_{i-1}$, $\forall i$ となるような x は次の形をしている．

$$x=\begin{pmatrix} 0 & * & * & *. & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって $p^{-1}(V.)$ は 15 次元の $\mathbf{C}$-ベクトル空間である．つまり Z は F 上の階数 15 のベクトル束である．このことから Z は複素多様体であり, $\dim Z=\dim F+15=30$ である．一方, $\pi:Z\to\mathfrak{sl}(6,\mathbf{C})$ を $p(V.,x)=x$ によって定義する．上の x の表示でわかるように, x はべき零行列である．したがって π は Z から $\mathcal{N}$ への写像である．また π は合成射

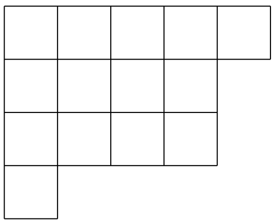
$$Z\xrightarrow{\iota}F\times\mathfrak{sl}(6,\mathbf{C})\xrightarrow{p_2}sl(6,\mathbf{C})$$

として表され, ι は閉埋め込みなので固有写像, p_2 は F がコンパクトであることから固有写像である．したがって, π も固有写像である．最後に, $x \in O_{[6]}$ の逆像 $\pi^{-1}(x)$ が 1 点からなることを示そう．まず x がジョルダン標準型

$$x_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の場合を考えよう．このとき, $x_0(V_i) \subset V_{i-1},\ \forall i$ となる旗 $V.$ は $V.^0$ ただ一つなので, $\pi^{-1}(x_0) = \{V.^0\}$ である．いっぽう $O_{[6]}$ の任意の元 x は $A \in SL(6, \mathbf{C})$ の元 A を用いて, $x = Ax_0A^{-1}$ と書ける．したがって $\pi^{-1}(x) = \{A(V.^0)\}$ である．以上より $x \in O_{[6]}$ の逆像 $\pi^{-1}(x)$ はただ 1 点だけである．□

一般のべき零軌道 $O_{\mathbf{d}} \subset \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ の閉包 $\bar{O}_{\mathbf{d}}$ に対しても, 例と同様にして特異点解消 $\pi : Z \to \bar{O}_{\mathbf{d}}$ を作ることができる．n の分割 $\mathbf{d}$ にヤング図形を対応させる．たとえば, $\mathbf{d} = [5, 4^2, 1]$ に対しては



を対応させる．ここで, 行と列の役割を逆転させたヤング図形を考え, 対応する n の分割を $\mathbf{d}^t$ と書き, $\mathbf{d}$ の双対分割とよぶ．上の例では, $\mathbf{d}^t = [4, 3^3, 1]$ である．さて, $\mathbf{d}$ の双対分割 $\mathbf{d}^t := [s_1, ..., s_{d_1}]$ を取り, 旗タイプが, $(s_{d_1}, ..., s_1)$ の旗

$$V. : \quad 0 \subset V_1 \subset ... \subset V_{d_1 - 1} \subset V_{d_1} := \mathbf{C}^n$$

を考える．ここで, V_i は $\mathbf{C}^n$ の部分空間であり, $\dim V_i / V_{i-1} = s_{d_1+1-i}$ を満たすものである．このような旗全体の集合 F は $\frac{1}{2}(n^2 - \sum s_i^2)$ 次元のコンパクト複素多様体になる．ここで,

$$Z := \{(V., x) \in F \times \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) \mid x(V_i) \subset V_{i-1},\ \forall i\}$$

と置く．第 1 成分への射影 $p : Z \to F$ の $V. \in F$ 上のファイバーは $\frac{1}{2}(n^2 - \sum s_i^2)$ 次元のベクトル空間であり, p によって, Z は F 上のベクトル束にな

る. したがって, Z は $n^2 - \sum s_i^2$ 次元の複素多様体である. 第 2 成分への射影 $\pi : Z \to \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ を考えると, $\mathrm{Im}(\pi) = \bar{O}_{\mathbf{d}}$ となり π は $\bar{O}_{\mathbf{d}}$ の特異点解消になる. 実は, Z は F の余接束 T^*F に等しいので, **べき零軌道の閉包は, ある種の旗多様体 F の余接束 T^*F を特異点解消にもつ**ことがわかる.

この講演では, $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ のときだけを扱ったが, 一般の複素半単純リー環 $\mathfrak{g}$ の随伴軌道の上にもキリロフ-コスタント型式とよばれるシンプレクティック型式が存在する. また r を $\mathfrak{g}$ の階数とすると, 随伴商写像 $\chi : \mathfrak{g} \to \mathbf{C}^r$ が構成され, χ の各ファイバーは有限個の随伴軌道の合併集合である. しかし, $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ の場合と異なり, 全てのべき零軌道の閉包が旗多様体の余接束によって特異点解消されるわけではない.

4. トーリック超ケーラー多様体

まずハミルトン作用とモーメント写像について簡単に復習しよう. M を複素多様体として, ω を M 上のシンプレクティック型式とする. 複素リー群 G が左から M に作用して ω を保つとする. G の無限小作用を考えることにより, $\mathfrak{g}$ の元 a から M 上のベクトル場 ζ_a が決まる. G のリー環を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*$ をその双対空間とする. $g \in G$ の $\mathfrak{g}$ への随伴作用を Ad_g であらわす. このとき $g \in G$ は余随伴作用 $Ad^*_{g^{-1}}$ によって $\mathfrak{g}^*$ に左から作用する. G-同変な正則写像 $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ が, $x \in M$, $v \in T_xM$, $a \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\omega_x(v, \zeta_a) = \langle (\mu_x)_* v, a \rangle \ \ (*)$$

を満たすとき, G-作用に対する**モーメント写像**とよぶ. ここで $(\mu_x)_* : T_xM \to \mathfrak{g}^*$ は μ が誘導する接空間の間の射である. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathfrak{g}^*$ と $\mathfrak{g}$ の間の自然なペアリングである. ω は非退化なので M 上の関数 f に対して, $\omega(\cdot, H_f) = df$ を満たすようなベクトル場 H_f が一意的に決まる. これを f に対する**ハミルトンベクトル場**とよぶ. $(*)$ の右辺は

$$\langle (\mu_x)_* v, a \rangle = da((\mu_x)_* v) = (\mu^* da)_x(v) = d(\mu^* a)_x(v) = \omega_x(v, H_{\mu^* a})$$

と書き換えることができる. したがって $(*)$ は $\zeta_a = H_{\mu^* a}$ を意味する. ここで $\Theta(M)$ を M 上のベクトル場全体のなすベクトル空間, $\mathcal{O}(M)$ を M 上の正則関数全体のなす環とする. 対応 $a \to \zeta_a$ は射 $\mathfrak{g} \to \Theta(M)$ を定義するが, $(*)$ が成り立つということは, この射が

$$\mathfrak{g} \overset{\mu^*}{\to} \mathcal{O}(M) \overset{H}{\to} \Theta(M)$$

と分解することに他ならない. ここで H は $f \in \mathcal{O}(M)$ を $H_f \in \Theta(M)$ に送る射のことである. モーメント写像が存在するような G-作用を**ハミルトン作用**とよぶ. 次に**シンプレクティック還元** (symplectic reduction) について説明

しよう. $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ をモーメント写像として $\xi \in \mathfrak{g}^*$ を $Ad_g^*(\xi) = \xi,\ \forall g \in G$ を満たす元とする. このとき, $\mu^{-1}(\xi)$ には G が作用する. $\mu^{-1}(\xi)$ の点 x に対して G の部分群 G_x を

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$$

によって定義する. 次の条件が満たされているとする.

条件 1: すべての点 $x \in \mu^{-1}(\xi)$ に対して $G_x = 1$ である.

まず

$$\mathrm{Ker}((\mu_x)_*) = T_x(G \cdot x)^{\perp_\omega}$$

が成り立っていることに注意する（この事実は上の仮定とは無関係に成り立つ). ここで

$$T_x(G \cdot x)^{\perp_\omega} := \{v \in T_xM \mid \omega(v, w) = 0,\ \forall w \in T_x(G \cdot x)\}$$

である. 実際, $T_xG \cdot x$ は ζ_a $(a \in \mathfrak{g})$ の形の元で張られているので, $\omega_x(v, T_xG \cdot x) = 0$ であることと, 任意の $a \in \mathfrak{g}$ に対して $\omega_x(v, \zeta_a) = 0$ であることは同値である. モーメント写像の性質から, これは $\langle (\mu_x)_* v, a\rangle = 0, \forall a$ と同じ. すなわち $(\mu_x)_* v = 0$ を意味する. 上の仮定から $\dim G \cdot x = \dim G$ である. したがって $\dim \mathrm{Ker}((\mu_x)_*) = \dim M - \dim T_x(G \cdot x) = \dim M - \dim G$ である.

$$\dim M = \dim T_xM = \dim \mathrm{Ker}((\mu_x)_*) + \mathrm{Im}((\mu_x)_*)$$

なので, このことから $\dim \mathrm{Im}((\mu_x)_*) = \dim G$ がわかる. したがって $(\mu_x)_*$ は全射になり, ξ は $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ の正則値である. このことから $\mu^{-1}(\xi)$ は複素多様体である. ここで次の条件を仮定する:

条件 2: $\mu^{-1}(\xi)/G$ は複素多様体であり, $\mu^{-1}(\xi)/G$ の任意の点は商写像 $\pi : \mu^{-1}(\xi) \to \mu^{-1}(\xi)/G$ の正則値である.

このとき $\mu^{-1}(\xi)/G$ 上に自然なシンプレクティック型式が存在することを示そう. $\iota : \mu^{-1}(\xi) \to M$ を自然な埋め込み射とする. $\iota^*\omega$ は $\mu^{-1}(\xi)$ 上の 2-型式であるが, $\iota^*\omega$ は $\mu^{-1}(\xi)/G$ 上の 2-型式 $\bar{\omega}$ の引き戻しになっていて, $\bar{\omega}$ がシンプレクティック型式になることを示す. $\iota^*\omega$ が $\mu^{-1}(\xi)/G$ の 2-型式の引き戻しであることを見るには, $x \in \mu^{-1}(\xi)$ において, $\forall v \in T_x\mu^{-1}(\xi)$, ζ_a, $\forall a$ に対して, $\omega_x(v, \zeta_a) = 0$ を示せばよい. $(\mu_x)_* v = 0$ に注意すると, モーメント写像の定義から

$$\omega_x(v, \zeta_a) = \langle (\mu_x)_*(v), a\rangle = 0$$

である．さて $\iota^*\omega = \pi^*\bar{\omega}$ とする．$\bar{v_0} \in T_{\pi(x)}\mu^{-1}(\xi)/G$ を取ってきたとき, すべての $\bar{w} \in T_{\pi(x)}\mu^{-1}(\xi)/G$ に対して

$$\bar{\omega}_{\pi(x)}(\bar{v}, \bar{w}) = 0$$

であったとしよう．$(\pi_x)_* : T_x\mu^{-1}(\xi) \to T_{\pi(x)}\mu^{-1}(\xi)/G$ は全射なので, $\bar{v_0} = (\pi_x)_* v_0$ となるような v_0 をとる．同様に $\bar{w}$ のリフト w をとると, これは

$$\omega_x(v_0, w) = 0, \ \forall w \in T_x\mu^{-1}(\xi)$$

を意味する．いま

$$\dim T_x\mu^{-1}(\xi) = \dim \mathrm{Ker}((\mu_x)_*)$$

であり,

$$\mathrm{Ker}((\mu_x)_*) = T_x(G \cdot x)^{\perp_\omega}$$

であったから

$$(T_x\mu^{-1}(\xi))^{\perp\omega} = T_x(G \cdot x)$$

である．つまり $v_0 \in T_x(G \cdot x)$ である．このとき $(\pi_x)_*(v_0) = 0$ なので $\bar{v_0} = 0$ である．したがって $\bar{\omega}$ は非退化である．最後に

$$0 = d\omega = d(\pi^*\bar{\omega}) = \pi^*(d\bar{\omega})$$

であり, π は全射なので $d\bar{\omega} = 0$ がわかる．以上より $\bar{\omega}$ はシンプレクティック型式である．

一般論はこれくらいにして トーリック超ケーラー多様体の一例を紹介しよう．トーリック超ケーラー多様体はシンプレクティック還元を用いて構成される．自然数 $n \geq 2$ に対して $2n$ 次元アファイン空間 $\mathbf{C}^{2n}$ を考え, その座標を $z_1, ..., z_n, w_1, ..., w_n$ とする．$\mathbf{C}^{2n}$ 上のシンプレクティック型式 ω を

$$\omega := \sum_{1 \leq i \leq n} dw_i \wedge dz_i$$

によって定義する．$\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$ を自然数の組で, 相異なるすべての i, j に対して $\mathrm{GCD}(a_i, a_j) = 1$ を満たすものとする．さらに $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ とする．1 次元代数トーラス $\mathbf{C}^*$ は $\mathbf{C}^{2n}$ に

$$(z_1, ..., z_n, w_1, ..., w_n) \to (t^{a_1} z_1, ..., t^{a_n} z_n, t^{-a_1} w_1, ..., t^{-a_n} w_n), \quad t \in \mathbf{C}^*$$

で作用して ω を保つ．この作用のモーメント写像を求めてみよう．$\mathbf{x} := (z_1, ..., z_n, w_1, ..., w_n) \in \mathbf{C}^{2n}$ に対して写像 $\phi_{\mathbf{x}} : \mathbf{C}^* \to \mathbf{C}^{2n}$ を $\phi_{\mathbf{x}}(t) = t \cdot \mathbf{x}$ によって定義する．より具体的には t に対して

$$\phi_{\mathbf{x}}(t) = (t^{a_1} \cdot z_1, ..., t^{a_n} \cdot z_n, t^{-a_1} \cdot w_1, ..., t^{-a_n} \cdot w_n)$$

である．このとき接写像 $(\phi_{\mathbf{x}})_*: T_1(\mathbf{C}^*) \to T_{\mathbf{x}}(\mathbf{C}^{2n})$ は

$$(\phi_{\mathbf{x}})_*(\frac{\partial}{\partial t}) = a_1 z_1 \cdot \frac{\partial}{\partial z_1} + ... + a_n z_n \cdot \frac{\partial}{\partial z_n} - a_1 w_1 \cdot \frac{\partial}{\partial w_1} - ... - a_n w_n \cdot \frac{\partial}{\partial w_n}$$

で与えられる．これが $\zeta_{\frac{\partial}{\partial t}}$ である．直接計算で

$$\omega(\cdot, \zeta_{\frac{\partial}{\partial t}}) = d(\sum a_i z_i w_i)$$

が確かめられるので，

$$\zeta_{\frac{\partial}{\partial t}} = H_{\sum a_i z_i w_i}$$

が成り立つ．今，$\mathbf{C}^*$ のリー環を $\mathbf{C}\frac{\partial}{\partial t}$ とみなすと，リー環の双対空間は $\mathbf{C}dt$ である．このとき

$$\mu : \mathbf{C}^{2n} \to \mathbf{C} \quad (z_1, ..., z_n, w_1, ..., w_n) \to \sum a_i z_i w_i$$

と定義すると μ は上で定めた $\mathbf{C}^*$-作用のモーメント写像になる．$\mathbf{C}^*$ は μ の各ファイバーに作用する．特に $\mu^{-1}(0)$ にも作用する．代数多様体 $\mu^{-1}(0)$ の関数環は $\mathbf{C}[z_1, ..., z_n, w_1, ...w_n]/(\sum a_i z_i w_i)$ であり，$\mathbf{C}^*$ はこの環に作用する．このとき不変式環

$$[\mathbf{C}[z_1, ..., z_n, w_1, ...w_n]/(\sum a_i z_i w_i)]^{\mathbf{C}^*}$$

は $\mathbf{C}$ 上有限生成な整域になり代数多様体 $\mu^{-1}(0)//\mathbf{C}^*$ を定義する．．商特異点を作ったときも不変式環から代数多様体を作り，それを $\mathbf{C}^{2n}/G$ と書いた．G が有限群のときはこの代数多様体はまさに $\mathbf{C}^{2n}$ の G による商空間であった．しかし，今回の $\mu^{-1}(0)//\mathbf{C}^*$ は商空間 $\mu^{-1}(0)/\mathbf{C}^*$ とは異なったものになる．実際，商空間 $\mu^{-1}(0)/\mathbf{C}^*$ はハウスドルフ空間にもならないので，これに代数多様体の構造を入れることはできない．したがって，$\mu^{-1}(0)//\mathbf{C}^*$ は商空間の代替物であり，**GIT 商**とよばれる．この GIT 商のことを $Y(\mathbf{a})$ と書いて，$\mathbf{a}$ から決まるトーリック超ケーラー多様体とよぶ．環の準同型

$$[\mathbf{C}[z_1, ..., z_n, w_1, ...w_n]/(\sum a_i z_i w_i)]^{\mathbf{C}^*} \to \mathbf{C}[z_1, ..., z_n, w_1, ...w_n]/(\sum a_i z_i w_i)$$

により，代数多様体の射 $\pi : \mu^{-1}(0) \to Y(\mathbf{a})$ がきまる．π のファイバーの様子を調べるために，$p \in \mu^{-1}(0)$ の $\mathbf{C}^*$-軌道 O_p を観察する．

$$F := \{z_1 = z_2 = ... = z_n = 0\}, \quad G := \{w_1 = w_2 = ... = w_n = 0\}$$

とおくと，F と G は各々 $\mu^{-1}(0)$ に含まれる n 次元アファイン空間である．$p \in \mu^{-1}(0)$ に対して次のことがいえる:

$$p \in F \cup G \Leftrightarrow \mathbf{0} \in \bar{O}_p$$

(証明): $p \in F$ としよう．このとき $p = (0, ..., 0, w_1(p), ..., w_n(p))$ であり，$t \in \mathbf{C}^*$ にたいして $t \cdot p = (0, ..., 0, t^{-a_1}w_1(p), ..., t^{-a_n}w_n(p))$ である．このとき

$$\lim_{t\to\infty} t \cdot p = (0, ..., 0, 0, ...0)$$

となり, $\mathbf{0} \in \bar{O}_p$ がわかる．$p \in G$ のときも同様にして $\bar{0} \in \bar{O}_p$ であることがわかる．いっぽう $p \notin F \cup G$ とすると

$$p = (..., z_i(p), ..., w_j(p), ...) \quad z_i(p) \neq 0,\ w_j(p) \neq 0$$

と書ける． $t \cdot p = (..., t^{a_i}z_i(p), ..., t^{-a_j}w_j(p), ...)$ なので $t \to 0$ とすると $t^{a_i}z_i(p) \to 0$, $t^{-a_j}w_j(p) \to \infty$. $t \to \infty$ とすると $t^{a_i}z_i(p) \to \infty$, $t^{-a_j}w_j(p) \to 0$ である．したがって $\mathbf{0} \notin \bar{O}_p$ である．□

さらに次もわかる:

$$p \notin F \cup G \Rightarrow \mathbf{C}_p^* = 1$$

ここで $\mathbf{C}_p^*$ は p の固定化群である．

(証明): もし相異なる i, j に対して $z_i(p) \neq 0$, $w_j(p) \neq 0$ であれば,

$$t \in \mathbf{C}_p^* \Leftrightarrow t^{a_i} = t^{-a_j} = 1$$

となるが, $\mathrm{GCD}(a_i, a_j) = 1$ であることから, 右辺の条件を満たす t は 1 以外にない．もし $z_i(p) \neq 0$, $w_i(p) \neq 0$ であり i 以外の j に対して $z_j(p) = w_j(p) = 0$ であったとしよう． このとき $\sum a_l z_l(p) w_l(p) = a_i z_i(p) w_i(p) \neq 0$ となり $p \in \mu^{-1}(0)$ に矛盾する □

以上から $p \notin F \cup G$ であれば O_p は $\mu^{-1}(0)$ の中で閉集合であり, $p \in F \cup G$ のときは $p = \mathbf{0}$ のときに限って O_p は閉集合であり, それ以外の O_p は閉集合ではないことがわかった．ここで $\bar{0} = \pi(\mathbf{0})$ とおき, $\bar{0}$ を $Y(\mathbf{a})$ の原点とよぶ．このとき

$$\pi^{-1}(\bar{0}) = F \cup G, \quad \pi^{-1}(Y(\mathbf{a}) - \bar{0}) = \mathbf{C}^{2n} - F - G$$

である．$F \cup G$ は無限個の $\mathbf{C}^*$-軌道を含み, そのうち閉軌道は原点 $\mathbf{0}$ のみである．したがって $Y(\mathbf{a})$ は商空間 $\mu^{-1}(0)/\mathbf{C}^*$ ではない．しかし

$$\pi|_{\mathbf{C}^{2n}-F-G} : \mathbf{C}^{2n} - F - G \to Y(\mathbf{a}) - \bar{0}$$

のファイバーは各々1 個の閉軌道からなり,

$$Y(\mathbf{a}) - \bar{0} = (\mu^{-1}(0) - F - G)/\mathbf{C}^*$$

である．今, $\mathbf{C}_0^{2n} := \mathbf{C}^{2n} - F - G$ とおくと, $\mathbf{C}^*$ は $\mathbf{C}_0^{2n}$ に作用して, $\omega_0 := \omega|_{\mathbf{C}_0^{2n}}$ を保つ．$\mu_0 := \mu|_{\mathbf{C}_0^{2n}}$ と置くと, $\mu_0 : \mathbf{C}_0^{2n} \to \mathbf{C}$ はこの作用に関するモーメン

ト写像である. $\mu_0^{-1}(0) = \mu^{-1}(0) - F - G$ なので, 任意の $p \in \mu_0^{-1}(0)$ に対して, $\mathbf{C}_p^* = 1$ である. この状況でシンプレクティック還元のところで仮定した条件 1 と条件 2 が満たされるので $\mu_0^{-1}(0)/\mathbf{C}^*$ は自然なシンプレクティック型式 $\bar{\omega_0}$ を持つ. したがって $Y(\mathbf{a}) - \bar{0}$ 上にはシンプレクティック型式がのっている. わかったことを整理すると, $Y(\mathbf{a})$ **は原点** $\bar{0}$ **でのみ特異点をもつ代数多様体で,** $Y(\mathbf{a}) - \bar{0}$ **上にはシンプレクティック型式がのっている**.

5. シンプレクティック特異点

ここでシンプレクティック特異点の定義をしておこう.

定義: X を正規代数多様体とする. X は次の条件をみたすとき**シンプレクティック特異点**であるという.

(i) X_{reg} 上にシンプレクティック型式 ω が存在する.

(ii) X の特異点解消 $f : Y \to X$ に対して, $f^{-1}(X_{reg})$ 上の 2-型式 $f^{\cdot}\omega$ は Y 上の 2-型式に延長される.

2 章から 4 章にわたって様々な例を見てきたが, これらは全て (i) を満たしている. 説明はしないが, これらの例はすべて (ii) も満たしているのでシンプレクティック特異点である. (i) を満たしているが (ii) は満たさない特異点もたくさんある. たとえば

$$X := \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid x^n + y^n + z^n = 0\}$$

とすると, X_{reg} は留数を使うとシンプレクティック型式

$$\omega := \mathrm{Res}_X(\frac{dx \wedge dy \wedge dz}{x^n + y^n + z^n})$$

をもつことがわかる (1 章の例を参照). X を原点 0 でブローアップすることにより特異点解消 $f : Y \to X$ を作ることができる. $n \geq 3$ の場合 $f^*\omega$ は f の例外集合 $E := f^{-1}(0)$ に沿って極を持つので, Y 上の 2-型式には延びない. (ii) の条件をいれることにより, X は有理特異点とよばれる良い性質をもった特異点になる.

2 章から 4 章で作った例は, シンプレクティック特異点というだけでなく, ”良い” $\mathbf{C}^*$-作用をもっている. いま X に $\mathbf{C}^*$ が作用していて, $0 \in X$ がその固定点であるとする. この $\mathbf{C}^*$-作用が良い作用であるというのは, すべての点 $x \in X$ に対して $\lim_{t \to 0} t \cdot x = 0$ が成り立つことである. X の座標環を R としたとき $\mathbf{C}^*$ は R に作用する. $t \in \mathbf{C}^*$ を $f \in R$ に作用させて得られる元を t^*f と書くことにする. f が $\mathbf{C}^*$-固有関数であるというのは, ある整数 w にたいして $t^*f = t^w \cdot f$ が成り立つことを言い, w を f のウエイトよぶ. ウエイトが w であるような固有関数全体は $\mathbf{C}$-ベクトル空間になり, それを R_w

書く．このときウエイト分解

$$R = \oplus_{w \in \mathbf{Z}} R_w$$

が存在して，R は次数つき環になる．すなわち $R_w \cdot R_{w'} \subset R_{w+w'}$ が成りたつ．X が良い $\mathbf{C}^*$-作用をもつことは，R をウエイト分解したとき $w < 0$ に対して $R_w = 0$, $R_0 = \mathbf{C}$ であることと同じである．

定義: (X, ω) をシンプレクティック特異点とする．次の条件を満たすとき (X, ω) は**錐的**シンプレクティック特異点とよぶ．

(i) X は良い $\mathbf{C}^*$-作用をもつ．

(ii) ω はこの $\mathbf{C}^*$-作用に関して斉次的である．つまり，ある整数 l が存在して，$t^*\omega = t^l \cdot \omega$ が成り立つ．この l のことを ω のウエイトとよぶ．

$\mathbf{C}^{2n}$ にはスケール変換

$$(z_1, ..., z_n, w_1, ..., w_n) \to (tz_1, ..., tz_n, tw_1, ..., tw_n)$$

によって $\mathbf{C}^*$ が作用する．商特異点 $\mathbf{C}^{2n}/G$ の場合 G の作用と $\mathbf{C}^*$ の作用は可換なので，$\mathbf{C}^*$-作用は $\mathbf{C}^{2n}/G$ 上の作用におちる．この作用は良い作用である．$(\mathbf{C}^{2n}/G)_{reg}$ 上のシンプレクティック型式 $\bar{\omega}_0$ は斉次的でウエイトは 2 である．したがって商特異点な錐的シンプレクティック特異点である．べき零軌道の場合，リー環 $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ には $X \to tX$ によって $\mathbf{C}^*$ が作用する．この作用はべき零軌道 O を保つので，$\mathbf{C}^*$ は $\bar{O}$ に作用する．この作用は良い作用である．さらにキリロフ-コスタント型式 ω_{KK} のウエイトは 1 である．したがって $(\bar{O}, \omega_{KK})$ は錐的シンプレクティック多様体である．最後に，トーリック超ケーラー多様体 $Y(\mathbf{a})$ の場合も，$\mathbf{C}^{2n}$ 上のスケール変換によって，$\mathbf{C}^*$ が $\mu^{-1}(0)$ に作用する．その作用は GIT 商である $Y(\mathbf{a})$ 上におちてくる．$Y(\mathbf{a}) - \bar{0}$ 上のシンプレクティック型式のウエイトは 2 である．したがって $Y(\mathbf{a})$ もまた錐的シンプレクティック多様体である．

錐的シンプレクティック特異点の分類や特徴付けをおこなうことは面白い問題である．ここではいくつかの結果を紹介する．(X, ω) を錐的シンプレクティック特異点として R を X の関数環とする．上で説明したように，R は次数付き環 $R = \oplus_{w \geq 0} R_w$ になり，$R_0 = \mathbf{C}$ である．R の $\mathbf{C}$-代数としての極小生成系を斉次元でとる: $x_1, ..., x_m$．これらの元のウエイト $w(x_1)$, ..., $w(x_m)$ を考え，$N := \max\{w(x_1), ..., w(x_m)\}$ とする．N のことを X の**極大ウエイト**とよぶ．N は極小生成系の取り方によらない．このとき次の有限性定理が成り立つ．

定理: 自然数 d と N を固定する．このとき次元が $2d$ で極大ウエイトが N

であるような錐的シンプレクティック特異点は有限個しか存在しない．ここで 2 つの錐的シンプレクティック多様体 (X, ω) と (X', ω') の間に $\mathbf{C}^*$-同変な同型射 $\phi: X \to X'$ が存在して $\omega = \phi^* \omega'$ を満たすとき両者は同じものとみなす．

複素半単純リー環のべき零軌道の閉包そしてべき零錐は, 錐的シンプレクティック特異点の中で次の特徴付けをもつ．

定理: (X, ω) を極大ウエイトが 1 であるような錐的シンプレクティック特異点とする．このとき (X, ω) は次のいずれかに同型:

(i) $(\bar{O}, \omega_{KK})$. ただし O は複素半単純リー環 $\mathfrak{g}$ のべき零軌道で $\bar{O}$ が正規多様体であるもの, さらに ω_{KK} はキリロフ-コスタント型式．

(ii) $(\mathbf{C}^{2n}, \omega_{st})$. ただし $\omega_{st} = \sum_{1 \le i \le n} dz_i \wedge dw_i$.

逆に (i), (ii) の錐的シンプレクティック特異点の極大ウエイトは 1 である．

階数 r の複素半単純リー環 $\mathfrak{g}$ に対して随伴商写像 $\chi: \mathfrak{g} \to \mathbf{C}^r$ を考える．このとき $\mathfrak{g}$ のべき零錐 $\mathcal{N}$ は $\chi^{-1}(0)$ に一致する．すなわち, $\mathcal{N}$ はアファイン空間 $\mathfrak{g}$ の中で r 個の斉次多項式の完全交叉として記述される．逆にこの性質がべき零錐を特徴付ける:

定理: (X, ω) を (非特異でない) 錐的シンプレクティック多様体で次の性質をもつものとする:

(i) X は $\mathbf{C}^{2n+r}$ の中で r 個の斉次多項式による完全交叉型多様体：

$$f_1(z_1, ..., z_{2n+r}) = ... = f_r(z_1, ..., z_{2n+r}) = 0$$

である．

(ii) X の $\mathbf{C}^*$-作用は $\mathbf{C}^{2n+r}$ のスケール変換

$$(z_1, ..., z_{2n+r}) \to (tz_1, ..., tz_{2n+r})$$

で与えられている．

このとき (X, ω) は複素半単純リー環 $\mathfrak{g}$ のべき零錐 $\mathcal{N}$ とキリロフ-コスタント型式 ω_{KK} の組 $(\mathcal{N}, \omega_{KK})$ と同型である．