

# ベイズフィルターの技術解説

## 1. ベイズフィルター入門

- ベイズフィルターの定義: 核となる概念と原則

ベイズフィルターは、時間とともに変化する動的システムの状態を推定するための確率的な手法群です。これらのフィルターは、一連のノイズを含む測定値と、システムの進化を記述する数学的モデルを用いて、システムの状態に関する確率分布（「信念」と呼ばれる）を逐次的に更新します<sup>1</sup>。ベイズフィルターの核心となる原則は、システムの状態を単一の決定論的な値としてではなく、確率分布を用いて表現することにより、不確実性を明示的に扱うことです<sup>2</sup>。この確率分布は、システムが特定の状態で存在する可能性を示し、ノイズや不完全なモデルが存在する現実世界のシナリオにおいて、より堅牢な推定を可能にします。ベイズフィルターの重要な特徴は、その再帰的な性質です。現在の状態に関する信念は、以前の状態に関する信念と最新の観測に基づいて更新されます。この逐次的な処理により、ベイズフィルターはリアルタイムアプリケーションに適しています<sup>1</sup>。確率分布を用いてシステムの状態を表現するという基本的な考え方は、決定論的な推定手法とは大きく異なります。現実世界のシステムは、完全に予測可能であることは稀であり、ベイズフィルターは、さまざまな可能な状態とそれらの可能性を表現することで、より情報に基づいた意思決定や推定を可能にします。特に不確実性が高い場合には、この確率的なアプローチが有効です。

- 推定問題におけるベイズフィルターの目的と目標

ベイズフィルターの主な目的は、一連のノイズを含む、あるいは部分的な観測データから、動的システムの隠れた状態、すなわち直接観測することが困難な状態を推測することです<sup>1</sup>。この目的を達成するために、ベイズフィルターは様々な具体的な目標を掲げています。例えば、ロボットの自己位置推定（ロボットが環境内でどこにいるかを推定すること）<sup>1</sup>、移動体の追跡（ノイズを含む測定値から時間とともに移動する物体の軌跡を追跡すること）<sup>5</sup>、信号処理（ノイズの多い信号から意味のある情報を抽出すること）<sup>5</sup>、そして一般的に、利用可能なデータに基づいて観測不可能な変数の値を推定すること<sup>1</sup>などが挙げられます。ベイズフィルターは、システムがどのように進化するかを記述する予測モデルと、新しい測定値から得られる情報とを組み合わせることで、各タイムステップにおけるシステムの「最良の推測」を提供することを目指しています<sup>5</sup>。ベイズフィルターの能力は、単にノイズの多いデータを除去するだけでなく、予測と測定を統合して、観測不可能なパラメータを含む、基礎となるシステムの状態のより正確で信頼性の高い推定を提供することにあります<sup>9</sup>。直接測定が困難なパラメータを推定できるという点が、ベイズフィルターの大きな利点です。システムの挙動に関するモデルと、ノイズを含むセンサーの読み取り値を組み合わせることで、フィルターはこれらの隠れた状態の最も可能性の高い値を推測できます。

- ベイズフィルターの簡単な歴史的概要と発展

ベイズフィルターの理論的基礎は、18世紀にトーマス・ベイズによって考案されたベイズの定理にあります。しかし、その実用的な応用は、現代のコンピューティング技術の進歩によって可能になりました<sup>10</sup>。ベイズフィルターの最初の広く成功した例は、1960年代にルドルフ・カルマンによって開発されたカルマンフィルターでした。その初期の応用は航空宇宙工学、特にアポロ計画における宇宙船の航行において重要な役割を果たしました<sup>5</sup>。非線形システムを扱う必要性から、拡張カルマンフィルター（EKF）やアンセンテッドカルマンフィルター（UKF）のような拡張が開発されました<sup>1</sup>。EKFは線形化を用いて非線形性を近似するのにに対し、UKFは

決定論的サンプリングアプローチを採用しています。さらに、高度に非線形かつ非ガウスの特性を持つシステムに対しては、パーティクルフィルター（逐次モンテカルロ法としても知られています）が強力な代替手段として登場しました<sup>1</sup>。これらのフィルターは、重み付けされたサンプルの集合を用いて確率分布を表現します。近年では、複雑なシナリオにおける適応性と性能を向上させるために、ベイズフィルターを機械学習技術と統合する傾向が強まっています<sup>12</sup>。ベイズフィルターの歴史は、初期の手法の限界を克服し、特に非線形性、非ガウスノイズ、計算複雑性への対処において、その適用範囲を継続的に拡大しようとする努力の歴史と言えます。

## 2. 基礎: フィルタリングにおけるベイズの定理

- ベイズの定理の再確認: 事前確率、尤度、事後確率

ベイズの定理は、新しい証拠に基づいて仮説（または事象）の確率を更新する方法を記述する、確率論における基本的な原理です。これは、データから学習するための数学的枠組みを提供します<sup>3</sup>。定理は次の式で表されます:  $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$  ここで、

- $P(A|B)$  は 事後確率 であり、事象 B が発生したという条件の下で事象 A が発生する確率です。これは、証拠を考慮した後の更新された信念です。
- $P(B|A)$  は 尤度 であり、事象 A が発生したという条件の下で事象 B が観測される確率です。これは、証拠が仮説をどの程度支持するかを定量化します。
- $P(A)$  は 事前確率 であり、証拠が観測される前に事象 A が発生する初期確率です。これは、事前の知識や信念を表します。
- $P(B)$  は 周辺尤度 または エビデンス であり、事象 B が観測される全体的な確率です。これは、事後確率が 1 になるようにするための正規化定数として機能します。
- 洞察: ベイズの定理は、新しい証拠の情報を組み込むことによって、事前の信念をより情報に基づいた事後の信念に移行させるための正式な方法を提供します。
  - 思考の連鎖: 例えば、病気を診断する場合を考えてみましょう。事前確率は、集団における病気の有病率かもしれません。特定の症状（証拠）を観察することで、その病気にかかっている場合にそれらの症状が現れる尤度を計算できます。ベイズの定理は、これらの情報を組み合わせて、患者がその症状を示している場合に実際にその病気にかかっている事後確率を求めます。

- フィルタリングの文脈におけるベイズの定理の適用の詳細な説明

ベイズフィルタリングの文脈では、ベイズの定理は、各タイムステップで動的システムの状態に関する信念を更新するために使用されます。定理における「事象 A」は、現在の時刻 (t) におけるシステムの状態 ( $x_t$ ) に対応し、「事象 B」は、センサーから取得された新しい測定値 ( $z_t$ ) に対応します<sup>1</sup>。

- 事前確率 ( $P(x_t)$ ) は、以前のタイムステップ (t-1) からの状態推定とシステムのダイナミクスモデルに基づいて、時刻 (t) におけるシステムの状態に関する信念を表します。これはしばしば、過去のすべての測定値が与えられた現在の状態の確率 ( $P(x_t|z_{1:t-1})$ ) として表されます。
- 尤度 ( $P(z_t|x_t)$ ) は、システムが状態 ( $x_t$ ) にある場合に現在の測定値 ( $z_t$ ) が得られる確率を記述するセンサーモデルによって与えられます。このモデルは、センサーの特性とノイズを考慮に入れます。
- 事後確率 ( $P(x_t|z_{1:t})$ ) は、新しい測定値 ( $z_t$ ) を組み込んだ後、時刻 (t) におけるシステムの状態に関する更新された信念です。これは、各タイムステップにおけるベイズ

フィルターの出力であり、次のステップの事前確率として機能します。

- 周辺尤度 ( $P(z_t)$ ) は、システムの状態に関係なく、現在の測定値が観測される確率です。これは直接計算することが困難な場合が多く、事後確率分布が 1 になるようにするための正規化定数として扱われることが一般的です。
- 洞察: ベイズフィルタリングは、ベイズの定理の再帰的な適用であり、あるタイムステップにおける事後信念が次のステップの事前信念となり、連続的かつ逐次的な状態推定を可能にします。

- 思考の連鎖: 各タイムステップにおいて、フィルターは内部モデルに基づいて状態を予測し(事前確率の形成)、新しい測定値が到着すると、その測定値が予測された状態である場合にどの程度尤もらしいかを評価します(尤度の計算)。その後、ベイズの定理は、予測と測定を組み合わせ、より正確な状態の推定(事後確率)を生成します。これは、予測または測定のいずれか単独よりも情報量が多い推定です。

- 逐次ベイズ推定と再帰的更新

ベイズフィルタリングは本質的に逐次的なプロセスであり、新しい測定値が取得されるにつれて、システムの状態の推定が時間とともに進化します<sup>1</sup>。これはしばしば、再帰的ベイズ推定と呼ばれます。このプロセスの核心には、各タイムステップで繰り返される 2 つの主要なステップが含まれます。

- 予測: 前のタイムステップからの状態推定(事後確率)とシステムのダイナミクスモデルに基づいて、現在のタイムステップにおけるシステムの状態に関する予測が行われます。この予測には、予測された状態に関連する不確実性の推定も含まれます。
- 更新: 新しい測定値が利用可能になると、それは予測を更新するために使用されます。ベイズの定理は、この更新のための数学的枠組みを提供し、予測された状態(事前確率)と測定値の尤度を組み合わせ、現在の状態の洗練された推定(事後確率)を生成します。状態推定に関連する不確実性も、測定値からの情報に基づいて更新されます。この予測と更新の再帰的なサイクルにより、ベイズフィルターは、より多くのデータが利用可能になるにつれて、システムの状態の推定を継続的に洗練させ、システムの挙動の変化に適応し、測定値のノイズの影響を軽減することができます<sup>3</sup>。
- 洞察: ベイズフィルタリングの再帰的な性質は、その効率性とリアルタイムシステムへの適用可能性にとって非常に重要です。新しい測定値が到着するたびにすべての履歴データを再処理する必要がなく、代わりに前の状態推定に含まれる情報に依存します。
  - 思考の連鎖: レーダーで移動する物体を追跡する場合を考えてみましょう。各スキャンにおいて、フィルターは前の位置と速度に基づいて物体の位置を予測します。新しいレーダー測定値が到着すると、フィルターはそれを予測と比較し、物体の位置と速度の推定を調整し、これらの推定に対する信頼性も更新します。このプロセスは新しいスキャンごとに繰り返され、物体の軌跡の継続的に洗練された追跡につながります。

### 3. 主要なベイズフィルターの種類: アルゴリズムと応用

- カルマンフィルター

- カルマンフィルターアルゴリズムの詳細な説明(予測ステップと更新ステップ)  
カルマンフィルターは、各タイムステップで 2 つの明確なフェーズで動作します。
  - 予測ステップ:
    - 状態予測: フィルターは、前の状態推定 ( $\hat{x}_{k-1}^+$ ) と状態遷移モデ

ル ( $F_k$ ) に基づいて、現在の状態推定 ( $\hat{x}_k^-$ ) を予測します<sup>5</sup>。数式では、 $\hat{x}_k^- = F_k \hat{x}_{k-1}^+ + B_k u_k$  と表されます。ここで、( $u_k$ ) は制御入力、( $B_k$ ) は制御入力モデルです。

- 共分散予測: フィルターは、前の推定共分散行列 ( $P_{k-1}^+$ )、状態遷移モデル ( $F_k$ )、およびプロセスノイズ共分散行列 ( $Q_k$ ) に基づいて、現在の推定共分散行列 ( $P_k^-$ ) を予測します<sup>5</sup>。数式では、 $P_k^- = F_k P_{k-1}^+ F_k^T + Q_k$  と表されます。

- 更新ステップ:

- カルマンゲインの計算: カルマンゲイン ( $K_k$ ) が計算されます。これは、予測に対して測定に与える重みを決定します<sup>5</sup>。数式では、 $K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1}$  と表されます。ここで、( $H_k$ ) は観測モデル、( $R_k$ ) は測定ノイズ共分散行列です。
- 状態更新: 測定値 ( $z_k$ ) とカルマンゲインを組み込むことで、状態推定が更新されます<sup>5</sup>。数式では、 $\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H_k \hat{x}_k^-)$  と表されます。
- 共分散更新: 推定共分散行列が更新されます<sup>5</sup>。数式では、 $P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^-$  と表されます。ここで、( $I$ ) は単位行列です。

- 数学的定式化と仮定 (線形性、ガウスノイズ)

カルマンフィルターは、線形システム専用設計されています。これは、状態遷移モデルと観測モデルが、状態変数の線形関数でなければならないことを意味します。数学的には、これは行列 ( $F_k$ ) と ( $H_k$ ) が定数であるか、時間とともに変化するものの、状態自体に非線形に依存しないことによって表されます<sup>1</sup>。標準的なカルマンフィルターの重要な仮定は、プロセスノイズ (システムの進化に影響を与えるランダムな擾乱) と測定ノイズ (センサーの読み取り誤差) の両方が、ゼロ平均と既知の共分散行列 ( $Q_k$ ) および ( $R_k$ ) を持つガウス分布 (正規分布) に従うことです<sup>1</sup>。

- 洞察: カルマンフィルターの最適性、すなわち推定の平均二乗誤差を最小化するという意味での最適性は、これらの線形性とガウスノイズの仮定が成り立つ場合にのみ保証されます。これらの仮定が現実世界のシナリオで破られた場合、カルマンフィルターの性能は低下する可能性があり、他の種類のベイズフィルターがより適切かもしれません<sup>12</sup>。

- 思考の連鎖: カルマンフィルターの数学的な扱いやすさと計算効率は、これらの仮定に由来します。線形性により、簡単な行列演算が可能になり、ガウスノイズの仮定により、予測ステップと更新ステップの閉形式の解が得られます。しかし、多くの現実世界のシステムは非線形の挙動を示したり、非ガウスノイズの影響を受けたりするため、より高度なフィルタリング技術の開発が必要とされます。

- 線形システムにおける応用 (例: 追跡、航行)

カルマンフィルターは、線形システムを含む多数のアプリケーションで広く使用されており、その例を以下に示します。

- 誘導、航行、制御: 航空機、宇宙船、船舶、および自律車両の航行システムにおいて基本的な要素であり、GPS、慣性計測ユニット (IMU)、レーダーなどのさまざまなセンサーからのデータを融合することにより、位置、速度、および姿勢の最適

な推定を提供します<sup>5</sup>。アポロ計画の航行コンピュータは、最初期の最も重要なアプリケーションの1つでした<sup>5</sup>。

- 時系列分析と計量経済学: 経済学、金融、信号処理における時系列データのモデリングと予測に使用され、基礎となる傾向の推定や信号とノイズの分離を可能にします<sup>5</sup>。
- ロボットの動作計画と制御: 線形動的システムにおけるロボットの状態を正確に推定し、その動作を計画する上で重要な役割を果たします<sup>5</sup>。
- GPS スムージング: GPS 受信機で使用され、ノイズの多い位置および速度測定値を平滑化し、ユーザーのより正確で安定した位置推定を提供します<sup>5</sup>。
- 洞察: カルマンフィルターの効率性と線形ガウス条件下での最適な推定を提供する能力により、多くの技術分野で不可欠なツールとなっています。
  - 思考の連鎖: その再帰的な性質によりリアルタイム処理が可能であり、不確実性の尺度(共分散行列)が含まれているため、推定の信頼性が重要なアプリケーションにとって特に価値があります。

- 拡張カルマンフィルター(EKF)

- 線形化による非線形システムの処理(ヤコビ行列)

拡張カルマンフィルター(EKF)は、非線形システムを扱うために設計されたカルマンフィルターの一般化です。これは、現在の状態推定の周りで非線形状態遷移関数と観測関数を一次テイラー展開を使用して線形化することによって実現されます<sup>17</sup>。この線形化には、非線形関数のヤコビ行列の計算が含まれます。状態  $(x_{k-1})$  に関する非線形状態遷移関数  $(f(x_{k-1}, u_k))$  のヤコビ行列は  $(F_k = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=\hat{x}_{k-1}})$  と表されます。同様に、状態  $(x_k)$  に関する非線形観測関数  $(h(x_k))$  のヤコビ行列は  $(H_k = \frac{\partial h}{\partial x}|_{x=\hat{x}_k})$  と表されます<sup>17</sup>。これらのヤコビ行列は、本質的に現在の動作点における非線形関数の局所的な線形近似を表しています。

- アルゴリズムと実装上の考慮事項

EKF は、標準的なカルマンフィルターと同様の予測と更新の構造に従いますが、予測には非線形関数を使用され、共分散を伝播しカルマンゲインを計算する更新ステップではヤコビ行列が使用されるという重要な違いがあります<sup>17</sup>。

- 予測ステップ:

- 状態予測:  $(\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}^+, u_k))$
- 共分散予測:  $(P_k^- = F_k P_{k-1}^+ + F_k^T + Q_k)$

- 更新ステップ:

- カルマンゲインの計算:  $(K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- + R_k)^{-1})$
- 状態更新:  $(\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - h(\hat{x}_k^-)))$
- 共分散更新:  $(P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^-)$  EKF の重要な実装上の課題は、ヤコビ行列を解析的に導出し実装する必要があることであり、これは複雑な非線形関数にとっては自明な作業ではなく、人的なコーディングエラーの可能性も導入します<sup>21</sup>。さらに、EKF の性能はシステムの非線形性の程度に大きく依存します。非線形性が強い場合、一次線形化は良好な近似とは言えず、不正確な推定やフィルターの発散につながる可能性が

あります<sup>12</sup>。初期状態推定も、EKF の収束と精度において重要な役割を果たします<sup>17</sup>。

- 非線形システムにおける応用(例: ロボット工学、航空宇宙工学)

その限界にもかかわらず、EKF は以下を含むさまざまな非線形推定問題に広く適用されてきました。

- ロボット工学: ロボットの動きやセンサーの測定値がその状態の非線形関数である場合の、ロボットの自己位置推定とマッピングに使用されます<sup>22</sup>。たとえば、ホイールエンコーダーとカメラを使用してロボットの位置と姿勢を推定するには、非線形モデルが必要です。
- 航空宇宙工学: 宇宙船の姿勢決定と追跡に使用されます。宇宙船の姿勢とセンサーの読み取り値(星追跡装置や磁力計など)の関係は、多くの場合非線形です<sup>23</sup>。
- 自動車: 自律走行車におけるセンサーフュージョンに使用されます。さまざまなセンサー(レーダー、ライダー、カメラなど)からのデータを組み合わせて、車両の状態とその周囲の環境を推定する必要があり、多くの場合、センサーの測定値と状態変数の間に非線形変換が含まれます<sup>22</sup>。
- 洞察: EKF はカルマンフィルターの適用範囲を非線形システムにまで拡張しますが、線形近似に依存しているため、高度に非線形なダイナミクスや測定値に対しては不正確になる可能性があります。
  - 思考の連鎖: EKF のトレードオフは、他の非線形フィルターと比較して比較的単純であることですが、これは線形化による潜在的な不正確さという代償を伴います。軽度の非線形性を持つシステムの場合、EKF は許容できる性能を提供できますが、強い非線形性を持つシステムの場合、UKF やパーティクルフィルターなどの代替手段がより適切かもしれません。

- アンセンテッドカルマンフィルター(UKF)

- 非線形システムのためのシグマ点生成とアンセンテッド変換

アンセンテッドカルマンフィルター(UKF)は、特に非線形性が著しい場合に、EKFよりも優れた性能を発揮することが多い、非線形システムを扱うための代替アプローチを提供します。UKFは、非線形関数を線形化する代わりに、アンセンテッド変換(UT)と呼ばれる決定論的サンプリング技術を使用して、非線形関数を介した平均と共分散の伝播を近似します<sup>10</sup>。UTには次のステップが含まれます。

- シグマ点の生成:  $(n)$  が状態ベクトルの次元である場合、 $(2n+1)$  個のシグマ点  $(\mathcal{X}_{k-1})$  の集合が、前の状態分布の平均  $(\hat{x}_{k-1}^+)$  の周りに生成されます<sup>19</sup>。これらのシグマ点は、それらの平均と共分散が状態分布の平均と共分散に一致するように選択されます。これらの点の広がり、共分散行列  $(P_{k-1}^+)$  とスケーリングパラメータによって決定されます。
- 非線形変換: 各シグマ点は、非線形状態遷移関数  $(f(x, u_k))$  を通じて変換され、予測された状態を表す変換されたシグマ点  $(\mathcal{X}_k^- = f(\mathcal{X}_{k-1}, u_k))$  の集合が得られ、非線形測定関数  $(h(x))$  を通じて変換され、予測された測定値を表す  $(\mathcal{Z}_k^- = h(\mathcal{X}_k^-))$  が得られます<sup>19</sup>。
- 平均と共分散の推定: 状態の予測された平均  $(\hat{x}_k^-)$  と共分散  $(P_k^-)$

は、変換された状態シグマ点 ( $\mathcal{X}_k^-$ ) の重み付き平均と重み付き共分散を取ることによって推定されます。同様に、予測された測定平均 ( $\hat{z}_k^-$ ) と共分散 ( $P_{zz,k}$ ) は、変換された測定シグマ点 ( $\mathcal{Z}_k^-$ ) から推定されます。状態と測定値の間の交差共分散 ( $P_{xz,k}$ ) も、これらのシグマ点から計算されます。

○ アルゴリズムとEKFに対する利点

UKF アルゴリズムは、標準的な予測ステップと更新ステップに従います。

- 予測: UT を使用して、次のタイムステップにおける状態の平均と共分散を予測します。
- 更新: カルマンゲイン ( $K_k = P_{xz,k} P_{zz,k}^{-1}$ ) を計算し、状態推定 ( $\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - \hat{z}_k^-)$ ) と共分散 ( $P_k^+ = P_k^- - K_k P_{zz,k} K_k^T$ ) を更新します<sup>19</sup>。UKF は EKF に対していくつかの利点があります。
- ヤコビアン計算の不要: ヤコビアン行列を解析的に計算する必要がないため、実装が簡素化されます<sup>28</sup>。
- より高い精度: シグマ点を非線形関数を通して伝播させることにより、UKF は非線形性をより正確に捉え、特に強く非線形なシステムに対して、平均と共分散のより良い推定につながるがよくあります<sup>28</sup>。EKF が一次の精度を達成するのに対し、UKF はあらゆる非線形性に対して二次の精度を達成します。

○ 高度に非線形なシステムにおける応用

UKF は、高度に非線形なシステムを含むさまざまな分野で成功裏に適用されています。

- ロボット工学: 複雑で雑然とした環境における、ロボットの自己位置推定とマッピングに使用されます。ここでは、運動モデルとセンサーモデルが高度に非線形である可能性があります<sup>2</sup>。
- 航空宇宙工学: 特に有意な非線形ダイナミクスまたはセンサーモデルを持つシステムにおいて、宇宙船の姿勢および軌道推定に使用されます<sup>24</sup>。
- 金融予測: 非線形な挙動を示すことが多い市場のダイナミクスをモデリングおよび予測するために使用されます<sup>33</sup>。
- 生物医学工学: 本質的に非線形である生物学的システムにおける生理学的信号の追跡とパラメータの推定に使用されます<sup>33</sup>。
- 洞察: UKF は、非線形状態推定において EKF よりも正確で、多くの場合実装が容易な代替手段を提供し、有意な非線形性を持つ多くのアプリケーションにとって好ましい選択肢となっています。ただし、複数のシグマ点を伝播する必要があるため、EKF よりもわずかに計算コストが高くなります<sup>33</sup>。
  - 思考の連鎖: UKF の強みは、一次線形近似に頼らずに非線形性を処理できることにあります。状態空間を特定のシグマ点で戦略的にサンプリングし、これらのサンプルを非線形関数を通して伝播させることにより、変換された確率分布のより良い表現を提供し、EKF の一次線形化と比較して、より正確な平均と共分散の推定につながります。

● パーティクルフィルター(逐次モンテカルロ法)

○ パーティクルによる確率分布の表現

パーティクルフィルター(PF)、別名逐次モンテカルロ法(SMC)は、高度に非線形かつ非ガウスのシステムを扱うための強力なベイズフィルタリング手法を提供します。カルマンベースのフィルターのようにパラメトリックな形式(ガウス分布など)で確率分布を表現する代わりに、PFは、それぞれに関連する重みを持つ(N)個の離散サンプル(パーティクルと呼ばれる)の集合を使用します<sup>1</sup>。各パーティクルは、システムの真の状態に関する仮説を表します。パーティクルとその重みの集合は、事後確率分布の近似を提供します。通常、使用するパーティクルの数が多いほど、近似は向上します<sup>37</sup>。パーティクルフィルターの主な利点は、カルマンベースのフィルターが効果的に処理できない、非ガウスの、多峰性(複数のピークを持つ)、または複雑な形状を持つ分布を含む、任意の確率分布を表現できることです<sup>37</sup>。

○ アルゴリズム: 予測、重み付け、リサンプリング

基本的なパーティクルフィルターアルゴリズムには、各タイムステップで次のステップが含まれます。

- 予測(サンプリング): 前のタイムステップからの各パーティクルについて、システムのダイナミクスモデル(状態遷移確率)からサンプリングすることにより、新しいパーティクルが生成されます<sup>37</sup>。このステップは、システムの進化からの不確実性を導入します。
- 重み付け: 現在の測定値が与えられた場合のパーティクルの状態の尤度を使用して、予測された各パーティクルの重みが更新されます<sup>37</sup>。状態が現在の測定値とより一致するパーティクルには、より高い重みが割り当てられます。
- リサンプリング: 重み付けステップの後、パーティクル縮退の問題に対処するために、リサンプリングステップがしばしば実行されます。これは、数回の反復の後、ほとんどのパーティクルの重みが無視できるようになり、ごく少数のパーティクルがほぼすべての重みを保持する状態です<sup>36</sup>。リサンプリングでは、現在のパーティクルの集合から、各パーティクルの重みに比例した確率で、置換ありでサンプリングすることにより、新しい(N)個のパーティクルの集合が作成されます。このステップにより、重みの低いパーティクルは効果的に破棄され、重みの高いパーティクルは複製され、計算努力が状態空間のより可能性の高い領域に集中します。リサンプリング後、通常、すべてのパーティクルに等しい重みが割り当てられます。

○ 非線形システムと非ガウスシステムの処理

パーティクルフィルターは、状態遷移モデルと測定モデルが高度に非線形である場合や、プロセスノイズと測定ノイズが非ガウス分布に従う場合に特に適しています。アルゴリズムは、これらの分布の形式に関する仮定に依存しません<sup>1</sup>。

○ 複雑で不確実な環境における応用

パーティクルフィルターは、さまざまな複雑で不確実な環境で応用されています。

- ロボット工学: 特に非線形なロボットの動きと、ライダー、カメラ、ソナーなどのさまざまなソースからのノイズの多いセンサーデータに対処する場合の、複雑な屋内および屋外環境におけるロボットの自己位置推定、マッピング、および SLAM に使用されます<sup>2</sup>。
- 物体追跡: コンピュータービジョンおよび信号処理において、特に物体の動きが非線形である場合や、センサーがノイズの多いまたは曖昧な測定値を提供する



場合に、物体の動きを追跡するために使用されます<sup>7</sup>。

- 金融モデリング: 非線形かつ非ガウスの挙動を示すことが多い、複雑な金融システムのモデリングと資産価格の予測に使用されます<sup>13</sup>。
- 環境モニタリング: 複雑なダイナミクスと非標準的なデータ分布を持つ環境現象の追跡と予測に使用されます<sup>13</sup>。
- 洞察: パーティクルフィルターは、カルマンベースの手法では不十分な、困難なシステムに対する強力な柔軟なベイズフィルタリングのアプローチを提供します。ただし、特に高次元の状態空間では、事後分布を正確に表現するために多数のパーティクルが必要となるため、計算コストが非常に高くなる可能性があります<sup>1</sup>。パーティクルフィルターの性能は、提案分布(新しいパーティクルのサンプリングに使用)の選択と、リサンプリング戦略の効果にも依存します。
  - 思考の連鎖: パーティクルフィルターの強みは、任意の確率分布を近似できることにあり、これにより、非常に幅広い複雑な問題に適しています。ただし、この柔軟性には、特に高次元の状態空間において、事後分布の良好な近似を達成するために多数のパーティクルが必要となる可能性があり、計算コストが高くなるという代償が伴います。

- グリッドベースのベイズフィルター(ヒストグラムフィルター)

- 状態空間の離散化と確率表現

グリッドベースのベイズフィルター(ヒストグラムフィルターとも呼ばれます)は、状態空間を離散的なセルのグリッドまたはビンに分割することによって、状態空間上の確率分布を表現します<sup>1</sup>。システムの信念は、このグリッド上のヒストグラムとして表現され、グリッド内の各セルには、システムがそのセルによって表される状態にある確率に対応する値が含まれます<sup>44</sup>。グリッドの解像度は表現の精度を決定します。より細かいグリッドは、基礎となる連続分布のより正確な近似を提供しますが、計算コストも増加させます。

- アルゴリズムと計算の側面

グリッドベースのフィルターのアルゴリズムには、他のベイズフィルターと同様の予測ステップと更新ステップの離散バージョンが含まれます。

- 予測: 制御入力 that 適用されると、確率分布は運動モデルに従ってグリッド全体にシフトおよび拡散されます。これには、運動の不確実性を表すカーネルとの畳み込み演算が含まれることがよくあります<sup>44</sup>。
- 更新: 新しい測定値を受信すると、センサーモデルに基づいて、システムの状態がそのセルに対応する場合にその測定値が得られる尤度を乗算することにより、各セルの確率が更新されます<sup>44</sup>。その後、分布は、すべてのセルの確率の合計が1になるように正規化されます。グリッドベースのフィルターの計算コストは、グリッド内のセルの数に直接関係します。(d) 次元の状態空間で、各次元が(n)個のビンに離散化されている場合、セルの総数は( $n^d$ )になります。状態空間の次元数に伴うセルの数のこの指数関数的な増加は、「次元の呪い」として知られており、グリッドベースのフィルターの大きな制限です<sup>1</sup>。

- ロボット工学と自己位置推定への応用

グリッドベースのフィルターは、特に屋内ナビゲーションのために、既知の環境でロボットの自己位置推定によく使用されます。ここでは、ロボットは比較的明確に定義された

低次元の状態空間(たとえば、2D 位置と向き)で動作します<sup>1</sup>。環境の地図を使用して、自己位置推定の精度を向上させることができます。高次元の問題にはあまり一般的ではありませんが、状態空間を効果的に離散化でき、計算コストが管理可能なシナリオでは適用できます。

- 洞察: グリッドベースのフィルターは、状態空間を離散化することにより、ベイズフィルタリングの直接的で決定論的な実装を提供します。複雑な確率分布を表現でき、特定の関数形式を仮定しません。ただし、状態変数の数が増えると計算コストが指数関数的に増加するため、そのスケーラビリティは低次元の問題に限定されます。

- 思考の連鎖: ロボットが 2D グリッドをナビゲートする場合を想像してください。グリッドベースのフィルターは、ロボットがグリッドの各セルに存在する確率値を維持します。ロボットが移動して環境を感知すると、これらの確率が更新され、ロボットは最も可能性の高い位置を特定できます。ただし、ロボットの速度やその他のパラメータも追跡したい場合、計算的に管理するにはグリッドセルの数がすぐに多すぎます。

#### 4. ベイズフィルターの利点と欠点

- 利点:

- 確率分布による不確実性の明示的な扱い: ベイズフィルターは、システムの状態に確率分布を使用することにより、不確実性を本質的に表現および管理し、点推定よりも完全な全体像を提供します<sup>2</sup>。

- 洞察: この確率的なアプローチにより、リスクを認識した意思決定が可能になり、推定の信頼性の尺度が得られます。

- オンラインおよび再帰的更新の能力: ベイズフィルターは、新しい測定値が利用可能になると、データを逐次的に処理し、推定値をリアルタイムで更新できるため、動的システムに適しています<sup>3</sup>。

- 洞察: このオンライン処理機能は、自律航行やリアルタイム制御などのアプリケーションにとって非常に重要です。

- さまざまなセンサーモデルとシステムダイナミクスを組み込む柔軟性: ベイズフィルターは、さまざまなノイズ特性を持つさまざまな種類のセンサーに対応でき、システムの動作の複雑なモデルを組み込むことができるため、幅広い問題に適用できます<sup>2</sup>。

- 洞察: この柔軟性により、異なる特性とノイズプロファイルを持つ複数のセンサーからのデータを融合させることができます。

- 事前知識と新しいデータを組み合わせるための原則的な方法: ベイズフィルターは、特にデータが不足している場合や不確実な場合に、システムの事前信念または情報を推定プロセスに組み込むための正式なフレームワークを提供します<sup>2</sup>。

- 洞察: 事前知識を活用することで、特にデータが限られている状況で、推定の精度と堅牢性を向上させることができます。

- 欠点:

- 特に複雑なフィルターと高次元の状態空間の場合、計算コストが非常に高くなる可能性: パーティクルフィルター(多数のサンプルが必要)や高解像度のグリッドベースフィルター(次元の呪いの影響を受ける)など、一部の種類のベイズフィルターは、計算量が非常に多くなる可能性があり、リソースが限られた環境や複雑なシステムを含むリアル

タイムアプリケーションでの使用が制限されます<sup>2</sup>。

- 洞察: 状態推定の精度と必要な計算リソースのトレードオフは、ベイズフィルタを選択する際に重要な考慮事項です。
- システムモデルとセンサーモデルの精度への性能依存性: ベイズフィルタによって生成される状態推定の品質は、システムのダイナミクスとセンサーの動作を記述するために使用されるモデルの精度に大きく依存します。これらのモデルが不正確であるか、現実世界のプロセスを適切に捉えていない場合、フィルタのパフォーマンスは大幅に低下し、偏った推定や発散につながる可能性があります<sup>5</sup>。
  - 洞察: ベイズフィルタリングを成功させるには、正確で代表的なシステムモデルとセンサーモデルを開発することが不可欠であり、モデルの誤指定は主要な課題です。
- 適切な事前分布の選択における課題: 情報量が多く適切な事前分布の選択は困難な場合があります、特にデータが限られている場合、事前分布の選択は事後推定に大きな影響を与える可能性があります。適切に選択されていない事前分布は、誤解を招く結果につながる可能性があります<sup>14</sup>。
  - 洞察: 事前分布の選択に伴う主観性は、ベイズ手法の批判の対象となることがあり、選択された事前分布が正当化され、結果に不当な影響を与えないように慎重な検討が必要です。
- パーティクルフィルタにおけるパーティクル縮退などの問題: パーティクルフィルタは、ほとんどのパーティクルの重みが無視できるようになり、ごく少数のパーティクルが事後分布を効果的に表現するという、パーティクル縮退の問題に悩まされる可能性があります。リサンプリング技術はこの問題を軽減するために使用されますが、サンプル貧困化などの他の問題を引き起こす可能性があります<sup>36</sup>。
  - 洞察: パーティクルフィルタの実装と使用においては、適切なリサンプリング戦略の選択やサンプル貧困化の回避など、パーティクル集合の効果的な管理が重要な課題です。

## 5. 実装上の課題と主要な考慮事項

- さまざまな種類のベイズフィルタの実装の実際的な側面:
  - カルマンフィルタとその変種を実装するには、状態ベクトル、遷移行列、観測行列、およびノイズ共分散行列を慎重に定義する必要があります<sup>5</sup>。状態推定とその共分散の初期化も重要です<sup>9</sup>。
  - 拡張カルマンフィルタ(EKF) および アンセンテッドカルマンフィルタ(UKF) を実装するには、非線形関数と、潜在的に複雑なヤコビアン<sup>37</sup>の計算またはシグマ点の生成を扱う必要があります<sup>19</sup>。数値的安定性も懸念事項となる可能性があります<sup>17</sup>。
  - パーティクルフィルタを実装するには、多数のパーティクルを管理し、プロセスモデルからサンプリングし、測定に基づいてパーティクルに重みを付け、縮退を避けるための効果的なリサンプリング戦略を実装する必要があります<sup>37</sup>。精度と計算コストのバランスを取るために、パーティクルの数を慎重に選択する必要があります<sup>39</sup>。
  - グリッドベースのフィルタを実装するには、状態空間をグリッドに離散化し、この離散表現で予測ステップと更新ステップを実行する必要があります<sup>44</sup>。グリッドの解像度は、精度と計算コストの両方に影響を与える重要なパラメータです<sup>1</sup>。
  - 洞察: ベイズフィルタの実装の複雑さは、選択するフィルタの種類と、モデル化する

システムの特長および利用可能な測定値によって大きく異なります。

- ノイズの多いセンサーデータとモデルの不正確さの処理:  
ベイズフィルタは、ノイズの統計モデル(カルマンベースのフィルタにおける測定ノイズ共分散行列 ( $R_k$ ) など)を組み込むことによって、ノイズの多いセンサーデータを処理するように設計されています 1。フィルタのゲイン(たとえば、カルマンゲイン)は、モデル予測に対してノイズの多い測定値に与えられる重みを決定します 5。ただし、システムモデル(たとえば、状態遷移モデル ( $F_k$ ) またはプロセスノイズ共分散 ( $Q_k$ ))の重大な不正確さは、推定誤差やフィルタの発散につながる可能性があります 5。フィルタのパラメータ(たとえば、ノイズ共分散)を観測データに基づいてオンラインで調整する適応型フィルタリングなどの手法は、これらの問題を軽減するのに役立ちます 12。高度に非線形または非ガウスのシステムには、より堅牢なフィルタタイプ(たとえば、パーティクルフィルタ)を使用することも、パフォーマンスを向上させるのに役立ちます 12。
  - 洞察: ベイズフィルタはある程度のノイズには堅牢ですが、信頼性の高い状態推定を実現するには、基礎となるモデルの精度が最も重要です。モデルの不正確さに対処するには、多くの場合、高度な手法やより柔軟なフィルタリングアプローチの使用が必要です。
- パラメータの調整と適切なノイズ共分散行列の選択:  
カルマンベースのフィルタの性能は、プロセスノイズ共分散行列 ( $Q_k$ ) と測定ノイズ共分散行列 ( $R_k$ ) の正しい仕様に大きく依存します 5。これらの行列は、システムのダイナミクスとセンサー測定の不確実性を表します。( $Q_k$ ) と ( $R_k$ ) に適切な値を選択することは、モデルと測定値に与える信頼のバランスを取るために不可欠です。( $Q_k$ ) が小さすぎると、フィルタが硬直的になりすぎて、システムの変更にうまく対応できない可能性があります。( $R_k$ ) が小さすぎると、フィルタがノイズの多い測定値に過剰に反応する可能性があります 5。これらのパラメータの調整には、システムのセンサーの理論的分析、実験的実験、共分散マッチングや適応推定などの手法の組み合わせが必要になることがよくあります 12。ノイズ共分散行列の調整が不適切な場合、収束の遅延、オーバーシュート、不安定性など、最適なフィルタリング性能が得られない可能性があります 12。
  - 洞察: ノイズ共分散行列の適切な調整は、カルマンベースのフィルタを実装する上で重要なステップであり、多くの場合、かなりの労力と専門知識が必要です。適応手法は、このプロセスを自動化するのに役立ちますが、実装に複雑さを加えます。
- リアルタイムアプリケーションのための計算リソース管理:  
ロボット工学、自律車両、制御システムなどの多くのアプリケーションでは、ベイズフィルタはリアルタイムで動作し、センサーデータを処理し、厳格な時間制約内で状態推定を更新する必要があります 3。さまざまなベイズフィルタの計算コストは大きく異なります。標準的なカルマンフィルタは一般的に最も計算効率が高いですが、パーティクルフィルタは、特に多数のパーティクルを使用する場合や高次元の状態空間では、非常に要求が厳しくなる可能性があります 39。グリッドベースのフィルタも、次元数の増加に伴いスケーラビリティの問題に直面します 1。計算リソースの管理には、精度要件と利用可能な処理能力および時間制約のバランスを取るフィルタタイプの選択がしばしば必要となります。パーティクルフィルタのパーティクル数を減らしたり、グリッドベースのフィルタで低解像度のグリッドを使用したりするなどの手法は、計算負荷を軽減するのに役立ちますが、精度が低下する可能性があります 45。並列コンピューティングや特殊なハードウェア(GPU や FPGA など)を活用して、より複雑なフィルタの計算を高速化することも重要です 39。

- 洞察: 正確で堅牢な状態推定の必要性和、リアルタイム処理と限られた計算リソースの現実的な制約とのバランスを取ることは、実際のアプリケーションにおける重要な課題です。選択したフィルターの計算複雑さと、潜在的な最適化手法を慎重に検討することが不可欠です。

## 6. ベイズフィルターの現実世界の応用

### ● 産業界の例:

- 航空宇宙およびナビゲーションシステム: カルマンフィルターは、アポロ計画の宇宙船ナビゲーション<sup>5</sup>で重要な役割を果たし、現代の航空宇宙システム、特にトマホークなどの巡航ミサイルの誘導システム<sup>5</sup>や、国際宇宙ステーションにドッキングする宇宙船の姿勢制御<sup>5</sup>、および一般的な航空機ナビゲーションシステム<sup>5</sup>で引き続き不可欠です。
  - 洞察: ノイズの多いセンサーデータから正確な状態推定を提供するカルマンフィルターの能力は、数多くの航空宇宙ミッションの成功に不可欠であり、現代のナビゲーション技術の基礎であり続けています。
- ロボット工学および自律システム: カルマンフィルター、拡張カルマンフィルター、アンセンテッドカルマンフィルター、パーティクルフィルターを含むベイズフィルターは、ロボットおよび自律システムの機能にとって不可欠です。これらは、ロボットの自己位置推定(ロボットの位置と向き)の推定<sup>1</sup>、マッピング(環境の表現の作成)、および同時ローカリゼーションとマッピング(SLAM)<sup>2</sup>に使用されます。また、倉庫や工場における無人搬送車(AGV)の制御システムにも使用されます<sup>70</sup>。
  - 洞察: ベイズフィルターにより、ロボットは環境を認識して理解し、自律的にナビゲート、経路計画、およびタスクの実行を行うことができます。
- 自動車産業: ベイズフィルター、特に拡張カルマンフィルターとアンセンテッドカルマンフィルターは、自動車産業で先進運転支援システム(ADAS)や完全自律走行車の開発にますます使用されています。これらは、GPS、IMU、レーダー、ライダーなどのさまざまなセンサーからのデータを組み合わせて、車両の状態とその周囲の環境の堅牢な推定を提供するセンサーフュージョンに採用されています<sup>5</sup>。
  - 洞察: ベイズフィルタリングは、車両の状態とその周囲の環境に関する正確かつタイムリーな情報を提供することにより、最新の車両の安全性と信頼性を高める上で重要な役割を果たしています。
- 信号処理および通信: カルマンフィルターは、レーダーやソナーなどの目標追跡システムで広く使用されており、ノイズの多い測定値から移動体の位置と速度を推定します<sup>5</sup>。また、信号のノイズ除去や通信システムにおける適応等化にも使用され、信号品質を向上させます<sup>5</sup>。
  - 洞察: ベイズフィルターは、さまざまな信号処理および通信アプリケーションにおいて、ノイズの多いデータから意味のある情報を抽出する上で重要な役割を果たします。
- 電子メールシステムにおけるスパムフィルタリング: ベイズフィルタリングは、多くの場合ナイーブベイズアルゴリズムを使用して実装され、特定の単語やフレーズがスパムメールに現れる確率に基づいて、受信メールをスパムまたは正規(「ハム」)として分類するために、電子メールクライアントやサーバーで広く使用されている成功した手法です<sup>3</sup>。
  - 洞察: ベイズ手法は、スパムメールとハムメールのパターンから学習することによ

り、不要なメールを効果的にフィルタリングするための適応的で効果的な方法を提供します。

- 金融予測とリスク評価: カルマンフィルターを含むベイズ手法は、投資ポートフォリオのリスクとリターンを評価し、過去の市場データと経済指標を分析することにより、株価やその他の金融時系列を予測するために金融で使用されます<sup>13</sup>。

- 洞察: ベイズアプローチは、金融モデリングにおける不確実性を定量化するための確率的フレームワークを提供します。

- 医療診断とヘルスケア: ベイズ手法は、症状、検査結果、患者の病歴などのさまざまなソースからのデータを統合して、さまざまな疾患の確率を推定することにより、医療診断の精度を向上させるために使用されます<sup>3</sup>。また、薬理学では、臨床試験における新薬の有効性を評価するために使用されます<sup>42</sup>。ウェアラブルヘルスマニターも、バイタルサインの正確な読み取りのためにカルマンフィルターを使用しています<sup>18</sup>。

- 洞察: ベイズ推論は、医療アプリケーションにおける不確実性の下での推論のための強力なフレームワークを提供し、より情報に基づいた診断および治療の決定につながります。

- 研究分野の例:

- 環境モニタリングと気象予測: カルマンフィルターやパーティクルフィルターを含むベイズフィルターは、さまざまなソースからのデータを取り込むことにより、気象予測の精度を向上させるために使用されます<sup>13</sup>。また、環境モニタリングにおいて、大気質、温度、汚染レベルを追跡するためにも使用されます<sup>13</sup>。

- 洞察: ベイズ手法により、多様でしばしばノイズの多い環境データを取り込み、より正確で信頼性の高い予測とモニタリングを行うことができます。

- 生物医学工学と生理学的信号分析: アンセンテッドカルマンフィルターやその他のベイズ手法は、生物医学工学において、心拍数などの生理学的信号を追跡し、本質的に非線形である生物学的システムにおけるパラメータを推定するために使用されます<sup>33</sup>。

- 洞察: ベイズフィルタリングは、ノイズの多い生物学的信号から意味のある情報を抽出し、複雑な生理学的プロセスをモデル化するのに役立ちます。

- 経済学と時系列分析: カルマンフィルターやその他のベイズ手法は、経済学および時系列分析において、経済変数をモデル化して予測したり、金融市場を分析したり、時間依存データの基礎となる傾向を理解したりするために使用されます<sup>5</sup>。

- 洞察: ベイズアプローチは、複雑な経済的および金融的現象を分析および予測するための柔軟なフレームワークを提供します。

- 工学における故障診断: ベイズフィルターは、工学における故障診断、すなわちセンサーデータを分析し、システムモデルに基づいて期待される動作と比較することにより、複雑なシステムの故障を検出および特定するために使用されます<sup>42</sup>。

- 洞察: ベイズ手法により、潜在的な故障を早期に検出し、システムの信頼性を向上させ、メンテナンスコストを削減できます。

## 7. 今後の発展と研究の方向性

- ベイズフィルタリング理論とアルゴリズムにおける新たなトレンド:

EKF および UKF の限界を超えた、より堅牢で効率的な非線形フィルタリング技術の開発が進行中です<sup>17</sup>。多くの現実世界の現象はガウス分布に従わないため、非ガウスのおよび多峰性の確率分布をより効果的に処理する方法の研究が進められています<sup>87</sup>。モデルの不確実

性や変化するシステム条件に対する堅牢性を向上させることを目的として、フィルターパラメータ(ノイズ共分散行列など)を観測データに基づいてオンラインで自動的に調整する、適応型ベイズフィルタリング技術の進歩も活発な研究分野です 12。ベイズフィルタリングと最適化技術の間のつながりが探求されており、新しい、より効率的なアルゴリズムの開発につながる可能性があります 88。システムの挙動に関する事前知識の組み込みを可能にする、制約や将来の制約を扱うことができる新しいフィルタリングフレームワークが開発されています 86。

- 洞察: 将来の理論的发展は、既存のベイズフィルターの限界に対処し、より広範な困難な推定問題への適用を拡大することを目指しています。
- 人工知能および機械学習技術とのベイズフィルターの統合:  
重要なトレンドは、ベイズフィルターと深層学習モデルの統合です。たとえば、深層学習を使用してベイズフィルターの状態遷移モデルまたは測定モデルを学習したり、ビジョンベースのロボットの自己位置推定など、深層学習ベースのシステムで状態推定にベイズフィルタリングを使用したりできます 12。ニューラルネットワークを使用してパーティクルフィルターのコンポーネントを構築し、勾配降下法を使用して最適化する、微分可能なパーティクルフィルターは、データ適応型フィルタリングを可能にする新しい分野です 12。ベイズ最適化技術は、ベイズフィルターのパラメータを効率的に調整したり、ベイズフィルタリングが状態推定に使用されるシステムの最適な制御ポリシーを設計したりするために使用されています 89。
  - 洞察: ベイズフィルタリングと AI および機械学習の融合は、より強力な適応性のある、データ駆動型の推定および制御システムを生み出すことが期待されています。
- 高次元問題に対するスケーラビリティと計算効率の向上:  
複雑な現実世界のシステムにベイズフィルターを適用する上での大きな課題は、特に高次元の状態空間における計算コストです。これらのフィルターのスケーラビリティと効率を向上させるための方法の研究が進行中です。これには、パーティクルフィルターに必要なパーティクルの数を減らすための手法 43、ベイズフィルタリング方程式に含まれる積分のより効率的な数値近似の開発 94、および並列コンピューティングアーキテクチャと特殊なハードウェアを活用して、より複雑なフィルターの実装を高速化すること 39 などが含まれます。
  - 洞察: ベイズフィルターの計算上のボトルネックを克服することは、大規模で複雑な現実世界の問題へのより広範な採用にとって非常に重要です。
- 新興技術および科学分野における新たな応用:  
ベイズフィルタリング技術は、自律システム、ロボット工学、モノのインターネット(IoT)、サイバーフィジカルシステム などの新興技術分野でますます応用されることが期待されています。ここでは、不確実性の下でのリアルタイム状態推定が不可欠です 13。また、環境モデリング、バイオインフォマティクス、社会科学 などのさまざまな科学分野でも、複雑なデータを分析し、不確実性の下で推論を行うためにますます使用されています 13。ウェアラブルセンサーを使用した健康モニタリング や個別化医療 におけるベイズフィルターの応用は、生理学的パラメータを追跡し、個々の患者データに基づいて治療を個別化するために使用できる、成長分野です 18。
  - 洞察: ベイズフィルタリングの汎用性と能力により、その関連性は保証され、成長を続ける技術分野および科学分野全体への応用が拡大しています。

## 8. 結論

- ベイズフィルターの主要な概念、利点、および課題の要約: このセクションでは、ベイズフィルターの基本的な原則を簡潔に要約し、不確実性の処理とオンライン推定の実行、およびマルチセンサーデータの融合における主な利点を強調します。また、計算コスト、モデルの精度へ

の依存性、パラメータ調整と事前分布の選択の難しさなど、その使用に関連する主要な課題を再確認します。

- ベイズフィルタリング技術の重要性と将来の可能性に関する結論: 結論として、ベイズフィルターは、科学と工学の幅広いアプリケーションにおける状態推定のための強力で汎用性の高いツールとしての重要性を強調します。また、進行中の研究と、人工知能や機械学習などの新興技術との統合を通じて、その将来の可能性を強調します。

レポートの主要な表:

1. 主要なベイズフィルターの種類の比較(セクション 3):

フィルターの種類	非線形性の処理	非ガウスノイズの処理	計算コスト(相対的)	主な応用分野	主な利点	主な欠点
カルマンフィルター	いいえ(線形のみ)	いいえ(ガウスのみ)	低	線形システム(航行、追跡)	線形ガウスシステムに最適	線形ガウスシステムに限定
拡張カルマンフィルター	はい(近似)	いいえ(ガウスのみ)	中	軽度の非線形システム(ロボット工学、航空宇宙工学)	カルマンフィルターを非線形システムに拡張	線形化誤差の可能性、発散の可能性
アンセンテッドカルマンフィルター	はい	いいえ(ガウスのみ)	中～高	高度な非線形システム(ロボット工学、金融)	非線形システムに対するEKFより高精度	EKFより高い計算コスト
パーティクルフィルター	はい	はい	高	高度な非線形、非ガウスシステム(ロボット工学、追跡、金融)	任意の分布を表現可能	計算コストが高い、パーティクル縮退の影響を受ける
グリッドベースフィルター	はい	はい	解像度に依存	低次元システム(ロボットの自己位置推定)	複雑な分布を表現可能	次元数の呪いの影響を受ける

2. ベイズフィルターの現実世界の応用の例(セクション 6):

応用分野	具体例	一般的に使用されるフィルターの種類	主な利点



航空宇宙および航行	アポロ計画の航行	カルマンフィルター	正確な軌道推定
ロボット工学	ロボットの自己位置推定とマッピング	EKF、UKF、パーティクルフィルター	複雑な環境における自律航行
自動車	自律走行車のセンサーフュージョン	EKF、UKF	周囲の環境の堅牢な認識
信号処理	レーダー目標追跡	カルマンフィルター	移動体の正確な追跡
電子メールシステム	スパムフィルタリング	ナイーブベイズ	不要なメールの効果的な分類
金融	株価予測	カルマンフィルター	金融モデルにおける不確実性の組み込み
ヘルスケア	医療診断	ベイジアンネットワーク	さまざまな証拠を組み合わせることによる診断精度の向上
環境モニタリング	気象予測	カルマンフィルター、パーティクルフィルター	多様な環境データの同化

## 引用文献

1. Recursive Bayesian estimation - Wikipedia, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Recursive\\_Bayesian\\_estimation](https://en.wikipedia.org/wiki/Recursive_Bayesian_estimation)
2. The Bayes Filter. In basic terms, the Bayes Filter is... | by Vikram Setty | Medium, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://medium.com/@vikramsetty169/the-bayes-filter-71f8b61afc1c>
3. ベイズフィルタによる状態推定の基礎 - AGIRobots Blog, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://developers.agirobots.com/jp/bayesian-filtering-algorithm/>
4. Introduction to Bayesian Filter - Lei Mao's Log Book, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://leimao.github.io/article/Introduction-to-Bayesian-Filter/>
5. Kalman filter - Wikipedia, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Kalman\\_filter](https://en.wikipedia.org/wiki/Kalman_filter)
6. Kalman Filter - MATLAB & Simulink - MathWorks, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.mathworks.com/discovery/kalman-filter.html>
7. Kalman Filter Applications - CS@Cornell, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.cs.cornell.edu/courses/cs4758/2012sp/materials/ML63slides.pdf>
8. en.wikipedia.org, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Kalman\\_filter#:~:text=Kalman%20filtering%20has%20numerous%20technological.as%20signal%20processing%20and%20econometrics.](https://en.wikipedia.org/wiki/Kalman_filter#:~:text=Kalman%20filtering%20has%20numerous%20technological.as%20signal%20processing%20and%20econometrics.)
9. Kalman Filter Explained Simply, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://thekalmanfilter.com/kalman-filter-explained-simply/>
10. What is Bayesian Filter? - Webopedia, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.webopedia.com/definitions/bayesian-filter/>
11. Discovery of the Kalman Filter as a Practical Tool for Aerospace and Industry, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19860003843/downloads/19860003843.pdf>
12. A review of Bayes filters with machine learning techniques and their applications -

- CERES, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://dspace.lib.cranfield.ac.uk/bitstreams/fc01c943-0d46-44a5-ac13-23a232d45b7a/download>
13. Innovative Applications of Bayesian Inference in Modern Machine Learning, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.numberanalytics.com/blog/machine-learning-bayesian-inference-applications>
  14. ベイズ統計とは？その仕組みやメリット、活用事例をわかりやすく解説 | AI総合研究所, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.ai-souken.com/article/bayesian-statistics-overview>
  15. 迷惑メールの判別 - 総務省統計局, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://www.stat.go.jp/naruhodo/15\\_episode/toukeigaku/meiwaku.html](https://www.stat.go.jp/naruhodo/15_episode/toukeigaku/meiwaku.html)
  16. Kalman Filter in Python - GeeksforGeeks, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.geeksforgeeks.org/kalman-filter-in-python/>
  17. Extended Kalman filter - Wikipedia, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Extended\\_Kalman\\_filter](https://en.wikipedia.org/wiki/Extended_Kalman_filter)
  18. Understanding Adaptive Kalman Filters in Digital Signal Processing - eInfochips, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.einfochips.com/blog/understanding-adaptive-kalman-filters-in-digital-signal-processing/>
  19. Extended and Unscented Kalman Filter Algorithms for Online State Estimation - MathWorks, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.mathworks.com/help/control/ug/extended-and-unscented-kalman-filter-algorithms-for-online-state-estimation.html>
  20. Extended Kalman Filters - MathWorks, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.mathworks.com/help/fusion/ug/extended-kalman-filters.html>
  21. A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems - UNC Computer Science, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/media/pdf/Julier1997\\_SPIE\\_KF.pdf](https://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/media/pdf/Julier1997_SPIE_KF.pdf)
  22. Real-Time Robotics: The Extended Kalman Filter - Intermodalics, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.intermodalics.ai/blog/real-time-robotics-the-extended-kalman-filter>
  23. A Study about Kalman Filters Applied to Embedded Sensors - PMC, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC5751614/>
  24. (PDF) Unscented Kalman Filtering for spacecraft attitude state and parameter estimation, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://www.researchgate.net/publication/228751083\\_Unscented\\_Kalman\\_Filtering\\_for\\_spacecraft\\_attitude\\_state\\_and\\_parameter\\_estimation](https://www.researchgate.net/publication/228751083_Unscented_Kalman_Filtering_for_spacecraft_attitude_state_and_parameter_estimation)
  25. Applications of an Extended Kalman Filter in nonlinear mechanics - PhysLab, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://physlab.org/wp-content/uploads/2019/06/Thesis-compressed.pdf>
  26. Extended Kalman Filter (EKF) — Copter documentation - ArduPilot, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://ardupilot.org/copter/docs/common-apm-navigation-extended-kalman-filter-overview.html>

27. The True Beauty of Extended Kalman Filters | by Sri Anumakonda | Analytics Vidhya, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://medium.com/analytics-vidhya/the-true-beauty-of-extended-kalman-filters-32e0c08d9258>
28. The Unscented Kalman Filter: Nonlinear State Estimation — book-duckiesky-legacy - daffy, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://docs.duckietown.com/daffy/course-intro-to-drones/ukf/theory/ukf-specifications.html>
29. The Unscented Kalman Filter for Nonlinear Estimation - Harvard University, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://groups.seas.harvard.edu/courses/cs281/papers/unscented.pdf>
30. Unscented Kalman Filter Tutorial - ResearchGate, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.researchgate.net/profile/Mohamed-Mourad-Lafifi/post/Unscented-Kalman-Filter/attachment/5a3401d34cde266d587b4efd/AS%3A571878130622464%401513357779148/download/Tutorial+UKF.pdf>
31. Unscented Filtering and Nonlinear Estimation - UBC Computer Science, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://www.cs.ubc.ca/~murphyk/Papers/Julier\\_Uhlmann\\_mar04.pdf](https://www.cs.ubc.ca/~murphyk/Papers/Julier_Uhlmann_mar04.pdf)
32. Learning the Unscented Kalman Filter - File Exchange - MATLAB Central - MathWorks, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/18217-learning-the-unscented-kalman-filter>
33. What is Unscented Kalman Filter (UKF) Localization - Activeloop, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.activeloop.ai/resources/glossary/unscented-kalman-filter-ukf-localization/>
34. Comparison of Kalman Filters for State Estimation Based on Computational Complexity of Li-Ion Cells - UPCommons, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/421574/energies-16-02710.pdf?sequence=1>
35. What is: Unscented Kalman Filter - A Detailed Overview, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://statisticseasily.com/glossario/what-is-unscented-kalman-filter-detailed-overview/>
36. Particle filter - Wikipedia, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Particle\\_filter](https://en.wikipedia.org/wiki/Particle_filter)
37. Particle Filters – Emma Benjaminson – Data Scientist, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://sassafra13.github.io/PF/>
38. (PDF) Particle Filters and Their Applications - ResearchGate, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://www.researchgate.net/publication/277258017\\_Particle\\_Filters\\_and\\_Their\\_Applications](https://www.researchgate.net/publication/277258017_Particle_Filters_and_Their_Applications)
39. Good, Bad, and Ugly of Particle Filters, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://www.cs.cmu.edu/~16831-f14/notes/F14/16831\\_lecture05\\_gsefayrth\\_zbatts.pdf](https://www.cs.cmu.edu/~16831-f14/notes/F14/16831_lecture05_gsefayrth_zbatts.pdf)
40. Particle Filters: A Hands-On Tutorial - PMC - PubMed Central, 3月 27, 2025にア

- セス、<https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC7826670/>
41. ベイズフィルタSLAMとグラフSLAM - newji, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://newji.ai/procurement-purchasing/bayesian-filter-slam-and-graph-slam-2/>
  42. Real Life Applications of Bayes' Theorem - GeeksforGeeks, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.geeksforgeeks.org/real-life-applications-of-bayes-theorem/>
  43. Obstacles to High-Dimensional Particle Filtering - American Meteorological Society, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://journals.ametsoc.org/view/journals/mwre/136/12/2008mwr2529.1.pdf>
  44. Lab 11: Localization (Simulation), 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://pages.github.coecis.cornell.edu/ccw94/Fast-Robots/LabHolders/Lab11.html>
  45. Filtering Theory - CMU School of Computer Science, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://www.cs.cmu.edu/~16831-f14/notes/F09/lec02/16831\\_lecture02.sachar.pdf](https://www.cs.cmu.edu/~16831-f14/notes/F09/lec02/16831_lecture02.sachar.pdf)
  46. Discrete Bayes Filter - Computational Bayes, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://rlabbe.github.io/blog/2016/02/16/discrete-bayes-filter/>
  47. Grid-based filters - Indora - Institute of Computer Science, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://ics.science.upjs.sk/indora/grid-based-filters/>
  48. Bayesian Filtering for Location Estimation, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://rse-lab.cs.washington.edu/papers/bayes-location-ubicomp-03.pdf>
  49. Grid-Based Bayesian Filtering Methods for Pedestrian Dead Reckoning Indoor Positioning Using Smartphones - PMC, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC7570561/>
  50. Bayesian Analysis: Advantages and Disadvantages - SAS Help Center, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://documentation.sas.com/doc/en/statug/latest/statug\\_introbayes\\_sect015.htm](https://documentation.sas.com/doc/en/statug/latest/statug_introbayes_sect015.htm)
  51. 第 3 章 確率・ガウス分布・ベイズの定理 - Python で学ぶベイズフィルタとカルマンフィルタ (翻訳), 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://inzkyk.xyz/kalman\\_filter/gaussians/](https://inzkyk.xyz/kalman_filter/gaussians/)
  52. Effectiveness of Bayesian Filters: An Information Fusion Perspective - ResearchGate, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://www.researchgate.net/publication/283704042\\_Effectiveness\\_of\\_Bayesian\\_Filters\\_An\\_Information\\_Fusion\\_Perspective](https://www.researchgate.net/publication/283704042_Effectiveness_of_Bayesian_Filters_An_Information_Fusion_Perspective)
  53. (PDF) The advantages and disadvantages of kalman filtering in iterative learning control, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://www.researchgate.net/publication/289723787\\_The\\_advantages\\_and\\_disadvantages\\_of\\_kalman\\_filtering\\_in\\_iterative\\_learning\\_control](https://www.researchgate.net/publication/289723787_The_advantages_and_disadvantages_of_kalman_filtering_in_iterative_learning_control)
  54. 【ベイズ推定】どんな方法？何がいいの？ - サイエンス備忘録, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://mizorandum.com/bayesian\\_inference\\_advantages/](https://mizorandum.com/bayesian_inference_advantages/)
  55. Limitations in generic Particle Filter | Download Scientific Diagram - ResearchGate, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://www.researchgate.net/figure/Limitations-in-generic-Particle-Filter\\_fig1\\_224453591](https://www.researchgate.net/figure/Limitations-in-generic-Particle-Filter_fig1_224453591)
  56. A Survey of Recent Advances in Particle Filters and Remaining Challenges for Multitarget Tracking - PubMed Central, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC5750742/>

57. Understanding and Applying Kalman Filtering, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://www.cs.cmu.edu/~motionplanning/papers/sbp\\_papers/kalman/kleeman\\_understanding\\_kalman.pdf](https://www.cs.cmu.edu/~motionplanning/papers/sbp_papers/kalman/kleeman_understanding_kalman.pdf)
58. Self Adaptive Particle Filter - IJCAI, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.ijcai.org/Proceedings/05/Papers/1360.pdf>
59. 第 2 章 離散ベイズフィルタ - Python で学ぶベイズフィルタとカルマンフィルタ (翻訳) - inzkyk.xyz, 3月 27, 2025にアクセス、[https://inzkyk.xyz/kalman\\_filter/dicrete\\_bayes/](https://inzkyk.xyz/kalman_filter/dicrete_bayes/)
60. Bayesian Filtering for Location Estimation, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://rse-lab.cs.washington.edu/papers/bayes-filter-pervasive-03.pdf>
61. Bayesian Filtering Research Articles - R Discovery, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://discovery.researcher.life/topic/bayesian-filters/4096469?page=1&topic\\_name=Bayesian%20Filters](https://discovery.researcher.life/topic/bayesian-filters/4096469?page=1&topic_name=Bayesian%20Filters)
62. Extended Kalman Filter with Reduced Computational Demands for Systems with Non-Linear Measurement Models - PubMed Central, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC7378802/>
63. Open Problems in Applications of the Kalman Filtering Algorithm - Atlantis Press, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.atlantis-press.com/proceedings/mbdasm-19/125921081>
64. Computationally Efficient Implementation of Kalman Filter, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://dsp.stackexchange.com/questions/94513/computationally-efficient-implementation-of-kalman-filter>
65. Practical Implementation of the Grid-based Filtering Algorithm - ResearchGate, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://www.researchgate.net/figure/Practical-Implementation-of-the-Grid-based-Filtering-Algorithm\\_fig4\\_271645141](https://www.researchgate.net/figure/Practical-Implementation-of-the-Grid-based-Filtering-Algorithm_fig4_271645141)
66. CMC | Free Full-Text | Improving the Position Accuracy and Computational Efficiency of UAV Terrain Aided Navigation Using a Two-Stage Hybrid Fuzzy Particle Filtering Method, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.techscience.com/cmc/v82n1/59207/html>
67. A Review of the Bayesian Occupancy Filter - MDPI, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.mdpi.com/1424-8220/17/2/344>
68. Industrial Applications of the Kalman Filter: A Review | Request PDF - ResearchGate, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://www.researchgate.net/publication/260398837\\_Industrial\\_Applications\\_of\\_the\\_Kalman\\_Filter\\_A\\_Review](https://www.researchgate.net/publication/260398837_Industrial_Applications_of_the_Kalman_Filter_A_Review)
69. Kalman Filter and Its Application in Data Assimilation - MDPI, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.mdpi.com/2073-4433/14/8/1319>
70. Bayes Filter - IACS Engineering, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://iacsengineering.com/bayes-filter-iacs-engineering/>
71. 5.1 ベイジアンフィルタとは, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://ric.co.jp/pdfs/contents/pdfs/959\\_chap5.pdf](https://ric.co.jp/pdfs/contents/pdfs/959_chap5.pdf)
72. ベイズ統計学とは？ 初心者にもわかりやすく解説 - AVILEN, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://avilen.co.jp/personal/knowledge-article/bayesian-statistics/>
73. Bayesian Filters – Basic Explanation, 3月 27, 2025にアクセス、



- <https://docs.icewarp.com/Content/IceWarp-Server/Administration-Nodes/Antispam/Bayesian/Bayesian%20Filters%20%E2%80%93%20Basic%20Explanation.htm>
74. ベイジアンフィルタリングとは？ 10分でわかりやすく解説 - ネットアテスト, 3月 27, 2025 にアクセス、[https://www.netattest.com/bayesian-filtering-2024\\_mkt\\_tst](https://www.netattest.com/bayesian-filtering-2024_mkt_tst)
  75. 3分ですぐ使えるようになる！ ベイズの定理の概要と計算方法まとめ | AIZINE (エーアイジン), 3月 27, 2025にアクセス、<https://otafuku-lab.co/aizine/bayes-theorem0925/>
  76. www.geeksforgeeks.org, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.geeksforgeeks.org/real-life-applications-of-bayes-theorem/#:~:text=Applications%20of%20Bayes%20Theorem%20in%20Spam%20Filtering.to%20incoming%20messages%20being%20spam.>
  77. Bayes' Theorem for Beginners - Danni Liu, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.dannidanliu.com/bayes-theorem/>
  78. An Intuitive (and Short) Explanation of Bayes' Theorem - BetterExplained, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://betterexplained.com/articles/an-intuitive-and-short-explanation-of-bayes-theorem/>
  79. Explained: Bayesian spam filtering - ThreatDown by Malwarebytes, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.threatdown.com/blog/explained-bayesian-spam-filtering/>
  80. 第3回 ベイジアンフィルタを実装してみよう - gihyo.jp, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://gihyo.jp/dev/serial/01/machine-learning/0003>
  81. Introduction to Bayesian Filtering Whitepaper - Process Software, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://www.process.com/products/pmas/whitepapers/intro\\_bayesian\\_filtering.html](https://www.process.com/products/pmas/whitepapers/intro_bayesian_filtering.html)
  82. ベイジアンフィルタとは - IT用語辞典 e-Words, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://e-words.jp/w/%E3%83%99%E3%82%A4%E3%82%B8%E3%82%A2%E3%83%B3%E3%83%95%E3%82%A3%E3%83%AB%E3%82%BF.html>
  83. ベイジアンフィルタ - Wikipedia, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%99%E3%82%A4%E3%82%B8%E3%82%A2%E3%83%B3%E3%83%95%E3%82%A3%E3%83%AB%E3%82%BF>
  84. Top 10 Real-world Bayesian Network Applications - Know the importance! - DataFlair, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://data-flair.training/blogs/bayesian-network-applications/>
  85. Adaptive and self-learning Bayesian filtering algorithm to statistically characterize and improve signal-to-noise ratio of heart-rate data in wearable devices - Journals, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsif.2024.0222>
  86. [2404.00481] Convolutional Bayesian Filtering - arXiv, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://arxiv.org/abs/2404.00481>
  87. Bayesian Filtering and Smoothing, 2nd ed. - Taylor & Francis Online, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/01621459.2023.2257260>
  88. ベイズ理論に基づく移動ロボットの 自己位置推定と地図生成に関する研究, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://tsukuba.repo.nii.ac.jp/record/35881/files/DA07298.pdf>
  89. データ駆動制御のこれまでの流れと最新の研究動向, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://www.sice.jp/wp-content/uploads/63\\_129.pdf](https://www.sice.jp/wp-content/uploads/63_129.pdf)

90. Particle filtering for dynamic systems with future constraints - NASA ADS, 3月 27, 2025にアクセス、<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2024DSP...14504314H/abstract>
91. An overview of differentiable particle filters for data-adaptive sequential Bayesian inference, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.aims sciences.org/article/doi/10.3934/fods.2023014>
92. ベイズ最適化の応用事例|pSeven - SCSK, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://www.scsk.jp/sp/eng-dx/product/pseven/column/tech\\_column-06.html](https://www.scsk.jp/sp/eng-dx/product/pseven/column/tech_column-06.html)
93. Improved Particle Filter in Machine Learning-Based BLE Fingerprinting Method to Reduce Indoor Location Estimation Errors - MDPI, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.mdpi.com/1999-5903/16/6/211>
94. Finite grid approximation to the Bayesian filtering problem - Cross Validated, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://stats.stackexchange.com/questions/431278/finite-grid-approximation-to-the-bayesian-filtering-problem>
95. The Kalman Filter: Limitations & Future Prospects - Nordic Inertial, 3月 27, 2025にアクセス、  
<https://www.nordicinertial.com/The+Kalman+Filter+Limitations++Future+Prospects>
96. ベイズモデリングと歩んだ30年 - 統計数理研究所, 3月 27, 2025にアクセス、  
[https://www.ism.ac.jp/events/2019/meeting1105/ISM\\_20191105.pdf](https://www.ism.ac.jp/events/2019/meeting1105/ISM_20191105.pdf)