

ANALYSIS

NAOKI YANO

CONTENTS

Part 1. 実数と連続	1
1. 実数の公理	1
Part 2. 微分法	2
Part 3. 積分法	2
2. 逆三角関数	2
3. 有理関数	2
4. 多変数関数の積分	3
5. 累次積分	3
6. 広義積分	3
7. 変数変換	3
8. 体積	3
9. 質量と重心	3
10. 慣性モーメント	3
11. 曲面積	3
12. ベクトル解析	3
Part 4. 線積分・面積分	4
Part 5. 積分定理	5
13. グリーン [Green] の定理	5
14. ガウス [Gauss] の定理	5
15. ストークス [Stokes] の定理	5
References	5

Part 1. 実数と連続

1. 実数の公理

Def. 1.1. 加群

(1) 交換律

$$a + b = b + a.$$

(2) 結合律

(1.1)

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

(3) 零元の存在

(1.2)

$$\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = a.$$

Date: January 21, 2018.

(4) 逆元の存在

$$(1.3) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \exists -a \in \mathbb{R}, a + (-a) = 0$$

Part 2. 微分法

Part 3. 積分法

2. 逆三角関数

Def. 2.1. 逆三角関数

$$(2.1) \quad x = \sin y, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

には逆関数が存在して, これを

$$(2.2) \quad y = \text{Sin}^{-1}x, -1 \leq x \leq 1$$

と書く. また

$$(2.3) \quad x = \cos y, 0 \leq y \leq \pi$$

にも逆関数が存在して,

$$(2.4) \quad y = \text{Cos}^{-1}x, -1 \leq x \leq 1$$

と書く.

Prop. 2.1. 逆三角関数の表示

$$(2.5) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Sin}^{-1}x + \text{const.}$$

$$(2.6) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\text{Cos}^{-1}x + \text{const.}$$

Def. 2.2.

$$(2.7) \quad x = \tan y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

$$(2.8) \quad y = \text{Tan}^{-1}x, -\infty < x < \infty$$

Prop. 2.2.

$$(2.9) \quad \int \frac{1}{1+x^2} = \text{Tan}^{-1}x + \text{const.}$$

3. 有理関数

Def. 3.1.

$$(3.1) \quad R()$$

4. 多変数関数の積分

5. 累次積分

6. 広義積分

7. 変数変換

Def. 7.1. ヤコビ行列式

$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ と変数変換したときのヤコビ行列式は

$$(7.1) \quad J(u, v) = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Def. 7.2. 変数変換

$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ と変数変換したとき

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) J(u, v) du dv$$

8. 体積

9. 質量と重心

10. 慣性モーメント

11. 曲面積

Thm. 11.1. 曲面積

$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ から \mathbb{R} への写像を

$$(11.1) \quad f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$$

として

$$(11.2) \quad \mathcal{A} = \{(x, y, z) | (x, y) \in \mathcal{D}, z = f(x, y)\}$$

で表される曲面の面積は

$$(11.3) \quad S = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

で表される.

Prf. 1.

Prop. 11.1. 曲面の法線ベクトル

曲面

$$\mathcal{D} : f(x, y, z) = \text{const.}$$

上の点 (x, y, z) における法線ベクトルは

$$(11.4) \quad \nabla f(x, y, z)$$

である.

12. ベクトル解析

Def. 12.1. スカラー場

ベクトルからスカラーへの写像を

$$(12.1) \quad f : V \rightarrow K$$

としたとき, 組み合わせ

$$(12.2) \quad (\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))$$

をスカラー場という.

Def. 12.2. ベクトル場ベクトルからベクトルへの写像を

$$(12.3) \quad f : V \rightarrow V$$

としたとき, 組み合わせ

$$(12.4) \quad (\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))$$

をベクトル場という.

Def. 12.3. 微分演算子ベクトル (ナブラ)

$$(12.5) \quad \nabla := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Def. 12.4. 勾配 [gradient]

$$(12.6) \quad \nabla f$$

Def. 12.5. 発散

$$(12.7) \quad \nabla \cdot f$$

Def. 12.6. 回転

$$(12.8) \quad \nabla \times f$$

Part 4. 線積分・面積分

Def. 12.7. 曲線

$$\Gamma := \{x(t) \mid a \leq t \leq b\}$$

を曲線という.

Def. 12.8. 線積分

$$(12.9) \quad \int_{\Gamma} f ds := \int f(\boldsymbol{x}(s)) \sqrt{\left(\frac{dx_1(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_3(s)}{ds}\right)^2} ds$$

を線積分という.

Def. 12.9. ベクトル場の線積分

ベクトル場の線積分は

$$(12.10) \quad \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \int \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \sqrt{\left(\frac{dx_1(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2(s)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_3(s)}{ds}\right)^2} ds$$

Def. 12.10. 面積分

$z = \varphi(x, y)$ で表される曲面における f の面積分は

$$(12.11) \quad \iint_{\mathcal{D}} f dS = \iint_{\mathcal{D}} f \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2} dx dy$$

Def. 12.11. ベクトル場の面積分

$z = \varphi(x, y)$ で表される曲面における \mathbf{f} の面積分は

$$(12.12) \quad \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{f} d\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \sqrt{1 + \varphi_x^2 + \varphi_y^2} dx dy$$

Part 5. 積分定理

13. グリーン [GREEN] の定理

$$(13.1) \quad \oint_{\Gamma} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = \iint_D \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)$$

14. ガウス [GAUSS] の定理

$$(14.1) \quad \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} dv = \iint_A \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$$

15. ストークス [STOKES] の定理

$$(15.1) \quad \iint_A \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial A} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

REFERENCES

- [1] 杉浦光夫. 解析入門 I. 初版, 東京大学出版会, 1980, 428p.