

以下の設問 1 から 5 に答えよ .

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^3 + bx^5 + \sin(x - x^3) - x \cos x}{x^7}$ が有限の極限值をもつように定数 a, b を定め , そのときの極限值を求めよ .

2. $e^{-2x-3y} \log(1 + x^2 + 2y^2)$ の $(0, 0)$ におけるテイラー展開において , x^2y^2 の項 および y^4 の項 を決定せよ .

3. (1) $f(x, y) = ye^{-x} + xe^{y^2} - 1 = 0$ により定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ で $x = 0$ のとき $y = 1$ を満たすものがただ一つ存在することを示し , $\frac{d\varphi}{dx}(0)$ を求めよ .

(2) さらに , $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(0)$ を求めよ .

4. 2変数関数 $g(x, y) = (x + y)(x^2 + 2y^2 - 54)$ を考える .

(1) $g(x, y)$ の停留点をすべて求めよ .

(2) (1) で求めた停留点の各々について , 極大点 , 極小点 , 鞍点 , あるいはそれらのいずれでもないか , を判定せよ .

5. $\varphi(x, y) = x^4 + 4xy + y^4 - 4 = 0$ を満たしながら (x, y) が動くとき , $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ の最大値 , 最小値とそれらを与える (x, y) を ラグランジュの乗数法 を用いて すべて求めよ .

略解

1. $a = \frac{2}{3}, b = -\frac{7}{15}$ のとき 極限值 $-\frac{227}{420}$. 2. $\frac{13}{2}x^2y^2, 7y^4$. 3. (1) $\frac{d\varphi}{dx}(0) = 1 - e$. (2) $\frac{d^2\varphi}{dx^2}(0) = 1 - 6e + 4e^2$. 4. (1) $(x, y) = (2\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-2\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}), (-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$. (2) $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ は極小点 , $(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ は極大点 , $(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$ は鞍点 , $(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ は鞍点 . 5. $(x, y) = \left(\sqrt{-1+\sqrt{3}}, \sqrt{-1+\sqrt{3}}\right), \left(-\sqrt{-1+\sqrt{3}}, -\sqrt{-1+\sqrt{3}}\right)$ のとき 最大値 $e^{2-2\sqrt{3}}$, $(x, y) = \left(\sqrt{1+\sqrt{3}}, -\sqrt{1+\sqrt{3}}\right), \left(-\sqrt{1+\sqrt{3}}, \sqrt{1+\sqrt{3}}\right)$ のとき 最小値 $e^{-2-2\sqrt{3}}$.