Logic Lecture Notes: Lecture 7

Hidenori Kurokawa

今回は，$\vee$ に関する導入規則，除去規則，また $\neg$ に関する導入規則，除去規則について議論する．

1 $\vee$ の導入規則

まずは，比較的理解が容易な $\vee$ の導入規則について述べる．$\vee$ の導入規則は次のようになる．

$$\frac{A}{A \vee B}\ \vee\mathrm{I} \qquad \frac{B}{A \vee B}\ \vee\mathrm{I}$$

この規則の使い方は，例えば次のような簡単な例によって示される．

$$\cfrac{\cfrac{\overset{1}{[A]}}{A \vee B}\ \vee\mathrm{I}}{A \to (A \vee B)}\ 1, \to\mathrm{I}$$

$\wedge$ とは異なり，$\vee$ の除去規則は若干複雑なので，$\vee$ の導入規則と一緒に提示するということはせず以下で別立てに議論する.（そうすると，$\vee$ の導入規則のみを使う推論というのはあまり，ヴァリエーションがないので，例はこれのみにしておいて次に進む.）

2 $\vee$ の除去規則

$\vee$ の除去規則は次のようになる．

$$\frac{A \vee B \qquad \begin{matrix} \overset{1}{[A]} \\ \vdots \\ C \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \overset{1}{[B]} \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C}\ 1, \vee\mathrm{E}$$

この規則の意味は，初学者にはあまり明瞭でないであろう．

まず，規則の文字どおりの読み方から説明する．仮定 $[A]$, $[B]$ のところについては，$\to$I と同様の意味である．$\vee$ の除去規則には，いわゆる大前提（$A \vee B$）と小前提（$[A]$, $[B]$）があり，後者は各々仮定を構成している．つまり，各々が C を導く従属証明（suboordinate proof）を構成している．これらは $\vee$E が適用される際，同時に「落とされる」（discharge される）ため，式としては別物だが，同じ番号を振ってある．（違う番号をふる流儀もあるので，ここではこのやり方を強制はしない．つまり，同じ番号を振っても，1, 2 のように違う番号を振り，1, 2, $\vee$E のように落とした仮定と使った規則を書いてもよいこととする．）

C というのは，$[A]$ からも $[B]$ からも導かれる共通の式ならばなんでもよいという意味である．$[A]$, $[B]$ のそれぞれから共通の式が導かれた段階で $\vee$E を適用することができるということである．

なぜ $\vee$E の規則はこのような形を取るのか？　この規則の背後にあるアイデアは要するに「場合分け」である．$A \vee B$ から何らかの式を導きたい場合，$[A]$ からも $[B]$ からも C という式が導かれるならば，$A \vee B$ という式は A か B が成り立つと言っているのだから，$A \vee B$ から C が成り立っていると言ってもよい，というのがこの規則が言っていることである．（例えば，「$x^2 = 4$ ならば，$-3 < x < 3$」という言明が正しいことを言うのに，$x = -2$ のとき，$x = 2$ のときに場合分けし，どちらの場合でも $-3 < x < 3$ が成立することを確認すれば，この言明全体が成り立っていると主張するのに十分である．ここではそうした議論に使われる論法を規則の形で抽象的に取り出しているのである．）

またこの規則の持つ論理的な内容は，実のところ次のように定式化された規則とそれほど変わらない．

$$\frac{A \vee B \qquad A \to C \qquad B \to C}{C}$$

この規則の方が初学者には理解しやすいのではないかと思われる．それではなぜ，正式な規則は上のような形で定式化されているのだろうか？　一つの理由は，このように定式化した場合，この規則は $\vee$, $\to$ という二つの命題結合子を除去しているように見える．我々が自然演繹の体系を構成する際に採った指導原理は，各命題結合子につき，それぞれ導入規則，除去規則を定式化するというものであった．このような定式化では，この規則は $\vee$ と $\to$ の両方の規則に見えてしまい，純粋に $\vee$ に関する規則であるべきという指導原理に反することになってしまう．また，自然演繹の体系には或る定理（証明の周り道，つまり，導入規則を使ってある余計な式を導入した後それを除去すること，がある場合，そのような証明のいづれをも，そうした周り道を持たない証明に実効的な手段によって変形することができるという定理，標準化定理と呼ばれる）が存在しているのだが，その定理を証明するためには，導入規則と除去規則が各命題結合子について純粋な形で定式化されている方が都合がよいのである．

それではここで，この規則を使った最も単純な推論の一つを例にとって見てみよう．$A \vee B$ という前提から $B \vee A$ という結論を導く推論．

$$
\dfrac{A \vee B \qquad \dfrac{\overset{1}{[A]}}{B \vee A}\,\vee\mathrm{I} \qquad \dfrac{\overset{1}{[B]}}{B \vee A}\,\vee\mathrm{I}}{B \vee A}\,1,\vee\mathrm{E}
$$

練習問題：前提 $(A \vee B) \vee C$　　結論 $A \vee (B \vee C)$

次の式（論理的真理）は $\vee$ の導入規則，除去規則の意味に対応している．

$((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$

練習問題．
次の式（$\wedge, \vee$ に関する分配法則）を証明せよ．

1) $(A \wedge (B \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
2) $((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \to (A \wedge (B \vee C))$
3) $(A \vee (B \wedge C)) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
4) $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \to (A \vee (B \wedge C))$

練習問題．
$((A \to C) \wedge (B \to D)) \to ((A \vee B) \to (C \vee D))$

3　$\neg$ の導入規則，除去規則

否定に関する規則は次のようなものになる．まず，比較的容易な否定の除去規則の方を示す．

$$
\dfrac{A \qquad \neg A}{\bot}\,\neg\mathrm{E}
$$

$\neg$ の導入規則は次のようになる．

$$
\dfrac{\begin{matrix} i \\ [A] \\ \vdots \end{matrix} \\ \bot}{\neg A}\,i,\neg\mathrm{I}
$$

これはつまり，A ということを仮定して矛盾が導かれたならば，（元の仮定 A を落として）$\neg A$ を主張してよいという規則である．

これらを組み合わせて，例えば次のような証明図を作ることができる．

前提 A　　結論 $\neg\neg A$.

$$
\dfrac{\dfrac{A \qquad \overset{1}{[\neg A]}}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{\neg\neg A}\,1,\neg\mathrm{I}
$$

これらの規則については，実は見方を変えると，これまでに議論された規則うちのあるものと本質的に同じ規則であるに過ぎないということが分かる．というのも，次のことが言えるからである．

$\neg A$ は $A \to \bot$ によって定義可能である．

これは例えば，真理表を作ってみればこの 2 つが論理的に同値になることから分かる．（$\bot$ の真理表は，すべて F になる．）[1]

この定義可能性に訴えると，$\neg$ の導入規則，除去規則は実は $\to$ の導入規則，除去規則の特殊例になるに過ぎない．（練習問題．このことを確認せよ．）

$\neg$ 特有の意味は $\bot$ に由来するが，これまでのところまだその意味を特徴づける規則は出てきていない．この後それについては説明する．

これまでに説明した論理結合子に関する導入規則，除去規則に加え，$\neg$ の導入規則，除去規則を使って，次の式が証明できる．

1) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$
2) $A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$
3) $(A \to \neg A) \to \neg A$
4) $(\neg A \lor \neg B) \to \neg(A \land B)$
5) $(\neg A \land \neg B) \to \neg(A \lor B)$
6) $\neg(A \lor B) \to (\neg A \land \neg B)$
7) $(A \land B) \to \neg(\neg A \lor \neg B)$
8) $(A \lor B) \to \neg(\neg A \land \neg B)$
9) $\neg(A \land \neg A)$

4　2 つの付加的規則

これまでの規則だけでは，真理表の意味で論理的真理となる式のすべてを証明することは不可能である．すべての論理的真理を導出するために上で説明された推論規則を持つ体系に付加するのが必要十分であるような推論規則は以下の通りである．

$$\frac{\bot}{A}\ \bot\mathrm{E}$$ （矛盾規則，absurdity rule）

$$\frac{\neg\neg A}{A}\ \mathrm{DNE}$$（二重否定除去規則，double negation elimination rule）

[1] この定義可能性は，これまでに説明した意味での真理表によって意味論を与えることのできない論理体系にも当てはまるので，この言い方は単に古典論理（今扱っている論理のこと）に当てはまる，特殊例に過ぎない．しかし，同様の定義可能性は他の論理（例えば直観主義論理）の場合にも当てはまる．直観主義論理については，後ほど簡単に説明する予定．

これら 2 つの付加的規則をこれまでの規則に加えることにより，我々の自然演繹の体系は真理表の意味でのすべての論理的真理，及びすべての妥当な推論について，その証明を与えることができることになる.（このことは実は証明されなければならない．この定理については後ほど説明する.）

例えば，$A \vee \neg A$（この式はしばしば排中律と呼ばれる）は（真理表の意味で）論理的真理であるが，この式を証明するためには DNE が不可欠であるということが知られている．[2]

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\neg(A \vee \neg A)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\neg(A \vee \neg A)} \qquad \dfrac{\overset{2}{A}}{A \vee \neg A}\,\vee\mathrm{I}}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{\neg A}\,2,\neg\mathrm{I}}{A \vee \neg A}\,\vee}{\bot}}{\neg\neg(A \vee \neg A)}}{A \vee \neg A}\,\mathrm{DNE}$$

また，$\bot$E は次のような場合に使われる．これは $A \to (\neg A \to B)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{[A]} \qquad \overset{2}{[\neg A]}}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{B}\,\bot\mathrm{E}}{\neg A \to B}\,2,\to\mathrm{I}}{A \to (\neg A \to B)}\,1,\to\mathrm{I}$$

あるいはもう少し込み入った証明の例として，$(\neg A \wedge (A \vee B)) \to B$ の証明をあげておこう.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\neg A \wedge (A \vee B)}}{A \vee B}\,\wedge\mathrm{E} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{2}{[A]} \qquad \dfrac{\overset{1}{\neg A \wedge (A \vee B)}}{\neg A}\,\wedge\mathrm{E}}{\bot}\,\neg\mathrm{E}}{B}\,\bot\mathrm{E} \qquad \overset{2}{[B]}}{B}\,2,\vee\mathrm{E}}{(\neg A \wedge (A \vee B)) \to B}\,1,\to\mathrm{I}$$

[2]以下にこの式の証明を述べるが，DNE がこの式を証明するのに「不可欠である」という事実を証明するためには，ここで述べる証明とは別の証明が必要である．この式の証明には DNE（あるいはそれと同値な規則）を使うことが不可欠であるという事実には幾つか本質的に異なったものが存在するが，一般にある式がある条件のもとで「証明できない」ということを示すことは容易でない.

練習問題：
1) $\neg\neg A \to A$
2) $(\neg A \to A) \to A$
3) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$
4) $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$
5) $\neg(\neg A \wedge \neg B) \to (A \vee B)$
6) $\neg(\neg A \vee \neg B) \to (A \wedge B)$
6) $(\neg A \vee B) \to (A \to B)$
7) $(A \to B) \to (\neg A \vee B)$
8) $(A \to B) \vee (B \to A)$
9) $((A \to B) \to A) \to A$
10) $((A \to B) \wedge (\neg A \to B)) \to B$
11) $\neg(A \to B) \to A$
12) $\neg(A \to B) \to \neg A$

5　極小論理，直観主義論理，古典論理

各命題結合子について，導入規則と除去規則のペアを考えるという方法論的な原則でこれまで推論規則について考察してきたが，これら２つの付加的な規則はこの原則から外れることになる．はじめの $\perp$E については，実は $\neg$E を $\perp$I と見れば，導入規則，除去規則の対称性をひどく損なうということにはならないとも言える．しかしながら次の二重否定除去規則はこの指導原理を大きく逸脱する．[3]　この規則は我々の体系をすべての論理的真理を証明するのに十分なほど強くするのに必要でありながら，論理体系の持つある種の対称性を損なってしまう．

それだけではなく，いくつかの理由から[4]，これまで説明してきた推論規則のすべてを持つ自然演繹の論理体系（真理表の意味での論理的真理をすべて証明できる体系）の部分体系にあたる幾つかの論理体系が考察されてきた．それらについてここで少し整理しておく．

[3]そのため，この規則を持つ体系（古典論理と呼ばれる．以下でより詳しく述べる）は，論理学にとって或る意味で最も基本的かつ重要な体系であるにもかかわらず，自然演繹における基本的である証明の「標準化定理」という定理を証明するにあたり，かなりの困難を強いられることになる．

[4]これらのうちで最も重要なのは数学の基礎についての考察である．１９２０年代に当時の代表的な数学者の一人ヒルベルトと，直観主義数学を提唱したブラウワーが数学の基礎を巡って激しく論争した．その際，ラッセルのパラドックスをはじめとする幾つかの集合論におけるパラドックスの背景には，数学における論理の濫用が存在するということをブラウワーは指摘した．ブラウワーによれば本来数学とは数学者が心的に対象を構成することを基本として出来上がっていた学問であり，そのような考え方に立った場合，ある対象が構成できるかできないかであるということが論理によって定まっているわけではない．しかし現代の数学では論理（特に排中律）に信頼を置きすぎることによって，具体的に構成されていない数学的対象についても論理的に推論することが’できてしまっており，そのことが当時の数学の基礎の問題を引き起こしているとブラウワーは指摘した．ブラウワーは，論理は数学の中からこそ読み取れられると主張することでそうした論理の濫用に反論した．ただし，そうした数学の中から読み取られるべき論理によれば，ある性質を持った構成を構成できるかできないかは予め決まっていることではないため，そのような論理は排中律を拒否する形で定式化されるべきであると主張された．このような形でいわゆる古典論理（以下で定義される）から排中律を取り除いた論理体系を「直観主義論理」と呼んでいる．

1) 極小論理（minimal logic）[5]とは次の推論規則からなる論理体系である．この体系を NM と呼ぼう．

$\wedge$I, $\wedge$E + $\to$I, $\to$E + $\vee$I, $\vee$E + $\neg$I, $\neg$E

2) 直観主義論理（intutionistic logic）とは minimal logic に次の推論規則を付け足した論理体系である．この体系を NJ と呼ぼう．

$\bot$E

3) 古典論理（classical logic）とは直観主義論理に次の規則を付加した論理体系である．この体系を NK と呼ぼう．[6]

DNE

上で既に述べたように，古典論理の体系において初めて命題論理の言語におけるすべての（真理表の意味での）論理的真理を証明することができる．ここでは証明はしないがこの事実は数学的な手法によって厳密に証明することができる．体系 NK によって証明可能であるということを$\vdash_{NK}$，論理的真理であることを$\models$と書くことにすると，この定理は次のような形で述べることができる．

Theorem 1 (（弱）完全性定理) 命題論理の言語におけるどの式φについても，もし$\models \varphi$, ならば$\vdash_{NK} \varphi$.

ちなみにこの逆の定理は健全性定理と呼ばれ，次のようになる．

Theorem 2 (健全性定理) 命題論理の言語におけるどの式φについても，もし$\vdash_{NK} \varphi$ならば，$\models \varphi$.

古典論理は，現在行われている数学の研究のほとんどにおいて，暗黙の前提として使われている（命題論理の範囲での）推論を形式化している論理体系であると言える．また古典論理よりも弱い体系は，数学基礎論論争に関係した歴史的意義の他に，情報科学などへの応用が存在する．古典論理よりも弱い体系については，真理表の意味で論理的な真理となる式のクラスよりも，小さな式の集合によってその「論理的真理」が特徴づけられることになる．そのためには真理表よりも「弱い」意味論が必要になるが，例えば直観主義論理の自然演繹の体系に関して，健全かつ完全になる直観

[5]なぜか「最小論理」と訳されることが多いが，minimal なので「極小」の方が正しいはず．

[6]NJ, NK はこれらを作ったゲンツェンの使った名前に由来する．ここでの NJ はゲンツェンの体系の命題論理の部分そのものである．NK については，ゲンツェン本人の定式化とは異なっている（ゲンツェンは上で証明した式 $A \vee \neg A$（排中律, the law of excluded middle）を基本的な原理あるいは空な前提を持つ規則として体系に導入している）が，上の体系はゲンツェンの体系と同値である．NM は後に極小論理の体系についてしばしば使われるようになった名前である．ここではそれぞれの論理に対応する少なくとも一つの自然演繹の体系を導入するということが目的なので，歴史的な事情にはこだわらず，これらの名前を使うことにする．

主義的論理の意味での「論理的真理」（推論の場合と紛らわしいが，テクニカルにはこれを「妥当な式」と呼ぶ）を特徴づける意味としては「クリプキ意味論」というものが知られている.（この講義ではその詳細に立ち入る時間はない.）

練習問題：直観主義論理の体系 NK において，以下の式を証明せよ.

1) $\neg\neg\neg A \to \neg A$
2) $(A \to \neg A) \to \neg A$
3) $(A \wedge \neg B) \to \neg(A \to B)$
4) $(A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$
5) $\neg\neg(A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$
7) $(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg(A \to B)$
8) $\neg\neg(A \wedge B) \to (\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$
9) $(\neg\neg A \wedge \neg\neg B) \to \neg\neg(A \wedge B)$