問題 III 図 III のように、半径 a の球面状の極板 A と半径 b $(b > a)$ の球面状の極板 B が、中心を共通にして配置してある。球面の中心を位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の原点とする。AB 間は、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の位置における電気伝導率 $\sigma(\boldsymbol{r})$ が

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \sigma_0 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \quad \cdots \ a \le r \le b$$

となるように導体で満たされている。ここで、$r = |\boldsymbol{r}|$ は原点からの距離、σ_0、a、b は正の定数である。AB 間の電位差が一定に保たれ、A から B に一定電流 I が流れている場合を考える。

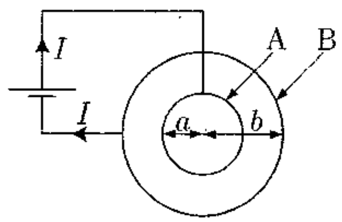

図 III

(1) AB 間の位置 $\boldsymbol{r}$ における電流密度 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$ と電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

(2) AB 間の電位差 V を求め、AB 間の全電気抵抗 R を求めなさい。

(3) AB 間の位置 $\boldsymbol{r}$ における電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

問題 IV 内半径 a、外半径 b $(b > a)$ の円筒状の無限に長い導体がある。円筒の中心軸を z 軸にとり、z 軸に垂直な平面内の位置を 2 次元極座標 (r, φ) で表した円柱座標系 (r, φ, z) を用いて考える。z 軸の正の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_z$ とする。位置 (r, φ, z) において、z 軸に垂直で z 軸から遠ざかる方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$、z 軸を中心に回転する方向 (右ねじが $\boldsymbol{e}_z$ 方向に進む方向) の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\varphi$ とする (図 IV-1 参照)。互いに直交するこれらの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ を用いて位置 (r, φ, z) におけるベクトル量を表す。この導体に定常電流が流れている。位置 (r, φ, z) における電流密度 $\boldsymbol{i}(r, \varphi, z)$ は

$$\boldsymbol{i}(r, \varphi, z) = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \cdots \ r < a \quad (\text{真空中}) \\ i_0 \exp\left[-\kappa \left(\dfrac{r}{a}\right)^2\right] \boldsymbol{e}_z & \cdots \ a \le r \le b \quad (\text{導体中}) \\ \boldsymbol{0} & \cdots \ b < r \quad (\text{真空中}) \end{cases}$$

であたえられる (図 IV-2 参照)。ここで、a、b、i_0、κ は正の定数である。

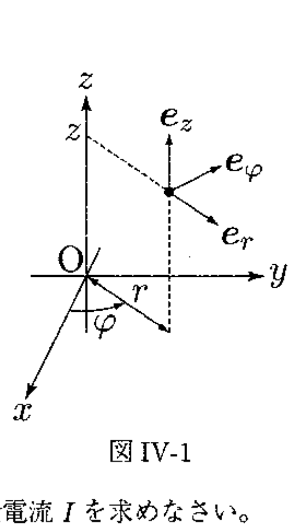

図 IV-1

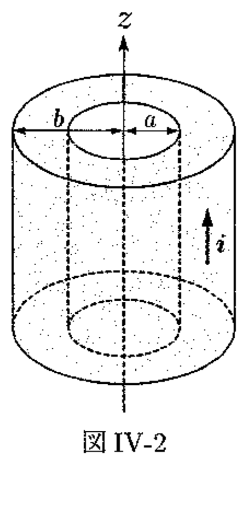

図 IV-2

(1) 導体を流れる全電流 I を求めなさい。

ヒント: 必要ならば不定積分の公式 $\displaystyle\int \exp[f(r)] \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r} \mathrm{d}r = \exp[f(r)]$ を用いて良い。

(2) 位置 (r, φ, z) における磁束密度 $\boldsymbol{B}(r, \varphi, z)$ は $\boldsymbol{B}(r, \varphi, z) = B(r)\boldsymbol{e}_\varphi$ と表される。磁束密度に $\boldsymbol{e}_r$ 方向成分、$\boldsymbol{e}_z$ 方向成分が無い理由を説明しなさい。また磁束密度の $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向成分が φ、z に依存しない理由を説明しなさい。

(3) 位置 (r, φ, z) における磁束密度 $\boldsymbol{B}(r, \varphi, z)$ を求めなさい。