よって、$g'(\theta) = C_1$,　$g(\theta) = C_1\theta + C_2$　[C_1, C_2: 積分定数]

ところで、$g(\theta) = f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ [条件より] なので、

$$\begin{cases} g(0) = f(r,0) = C_2 & \cdots ① \\ g(2\pi) = f(r,0) = 2\pi C_1 + C_2 & \cdots ② \end{cases}$$

① = ② であるため、$C_1 = 0$ となる。よって、$g(\theta) = C_2$

$\therefore\ Z(r,\theta) = C$　[C: const]

4.
$$\begin{cases} f_x = 3x^2y - 2y^2 \\ f_y = x^3 - 4xy + 6y^2 \end{cases}\qquad \begin{cases} f = x^3y - 2xy^2 + C_1 & \cdots ① \\ f = x^3y - 2xy^2 + 2y^3 + C_2 & \cdots ② \end{cases}$$

$C_1 = 2y^3 + C_2$ を①に代入して

$f(x,y) = x^3y - 2xy^2 + 2y^3 + C$　[C: 積分定数]

5. $f(x,y) = \tan x + \tan y - \tan(x+y)$

(1)
$$\begin{cases} f_x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2(x+y)} = 0 & \cdots ① \\ f_y = \dfrac{1}{\cos^2 y} - \dfrac{1}{\cos^2(x+y)} = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

① − ② より

$\cos^2 x = \cos^2 y$

$(\cos x + \cos y)(\cos x - \cos y) = 0$　　$x = \pm y + 2k\pi$

条件より、$-\pi < x \pm y < \pi$ なので $2k\pi$ は考えなくてよい。

したがって、$x = \pm y$

i). $x = y$ のとき

$\cos^2 2x - \cos^2 x = 0$

$\cos^2 2x - \dfrac{1+\cos 2x}{2} = 0$　半角の公式より

$2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$　　$2x = \pm\frac{2}{3}\pi, 0$

$(2\cos 2x + 1)(\cos 2x - 1) = 0$　　$x = \pm\frac{1}{3}\pi$

$\cos 2x = -\frac{1}{2}, 1$　　$\therefore (x,y) = (\pm\frac{1}{3}\pi, \pm\frac{1}{3}\pi)$

ii) $x = -y$ のとき

$\cos^2 x - 1 = 0$

$\cos x = \pm 1$　　$x = 0, \pi$

よって条件を満たす解は存在しない

i), ii)より、$(x,y) = (0,0)$ 以外の停留点は

$(x,y) = (\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi), (-\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{3}\pi)$

(2)
$$\begin{cases} f_{xx} = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x} - \dfrac{2\sin(x+y)}{\cos^3(x+y)} \\ f_{yy} = \dfrac{2\sin y}{\cos^3 y} - \dfrac{2\sin(x+y)}{\cos^3(x+y)} \\ f_{xy} = -\dfrac{2\sin(x+y)}{\cos^3(x+y)} \end{cases}$$

$AC - B^2 > 0$, $A > 0$ 極小点

i) $(x,y) = (\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$ のとき

$f_{xx} = f_{yy} = 16\sqrt{3}$, $f_{xy} = 8\sqrt{3}$ より

$Hf(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi) = \begin{pmatrix} 16\sqrt{3} & 8\sqrt{3} \\ 8\sqrt{3} & 16\sqrt{3} \end{pmatrix} = 8\sqrt{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\Delta = (8\sqrt{3})^2(4-1) > 0$

$f_{xx} = 16\sqrt{3} > 0$　　$\therefore$ 極小点

ii) $(x,y) = (-\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{3}\pi)$ のとき

$f_{xx} = f_{yy} = -16\sqrt{3}$, $f_{xy} = -8\sqrt{3}$ より

$Hf(-\frac{1}{3}\pi, -\frac{1}{3}\pi) = \begin{pmatrix} -16\sqrt{3} & -8\sqrt{3} \\ -8\sqrt{3} & -16\sqrt{3} \end{pmatrix} = -8\sqrt{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\Delta = (-8\sqrt{3})^2(4-1) > 0$

$f_{xx} = -16\sqrt{3} < 0$　　$\therefore$ 極大点

(合っているかどうかわかりません)

$AC - B^2 > 0$
$A < 0$
極大点