数学Ａ２ 春学期期末試験問題

（担当：小山, 亀谷, 石井, 仲田, 神保, 前田 ） 2001 年 7 月 21日(土) 3時限

試験時間 90 分　持ち込み不可　答案用紙２枚　計算用紙１枚（回収不要）

[1] 以下のように与えられた３つのベクトルが１次独立か１次従属かをそれぞれ判定せよ。

$$(\mathrm{i})\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{ii})\quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[2] 行列 A が以下で与えられたとする。このとき任意の２次ベクトル $\mathbf{x}$ に対して、$A\mathbf{x}$ が $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と直交するような実数 α と β を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1-\beta \\ \alpha & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

[3] 以下の行列 A に対して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{あるいは} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

となるような正則行列 P を求めよ。

$$(1)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

[4] $B = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma & 1 \\ \gamma & 2 & -\gamma \end{pmatrix}$ とする。このとき、任意の実数 γ に対して $B\,{}^tB$ は重複度２の固有値を持たないことを示せ。

[5] $C = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1-\eta \\ 1-\eta & 3 \end{pmatrix}$ とする。このとき，すべての２次ベクトル $\mathbf{x}$ に対して、$\lim_{m\to\infty} C^m\mathbf{x} = \mathbf{0}$ が成り立つような実数 η の範囲を決定せよ。

[6] $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ とする。このとき

(1) 同次線形微分方程式 $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}$ の基本行列を求めよ。

(2) 非同次線形微分方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

の解で、初期条件 $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たすものを求めよ。