Logic Lecture Notes: Lecture 6

Hidenori Kurokawa

今回からは，自然演繹（natural deduction）と呼ばれる証明体系について説明する．

前回までで説明したタブローの体系は，真理表と密接な関係を持つ証明体系であった．証明体系というのは伝統的に純粋に構文論的なものでなければならないとされている．タブローの体系も実はそうした純粋に構文論的なものであるという性質は満たしているのだが，真理表との関係が近いため，その点が分かりにくい面もある．

それに対し，自然演繹の体系というのは人間が行う推論，特に数学における証明などで使用する論理的推論に注目し，その形式を推論規則の形で取り出すということを目指して作られた体系である.（自然な推論の形式化，あるいは推論の自然な形式化であるがゆえに，自然演繹と呼ばれている.）

この体系についても，推論規則は基本的に命題結合子のそれぞれについて，ペアで与えられるというのが基本である．タブローの体系とは異なり，T, F rule という風にはなっておらず，導入規則（introduction rule），除去規則（elimination rule）という形で推論規則が与えられる.（導入規則，除去規則の間には，ほとんどの場合きれいな対称性が存在する．しかし，そのペアの持つ対称性は，否定記号については必ずしも成立せず，そのため否定記号を持つ式，あるいは本質的に否定記号を必要とする推論に関しては証明が難しくなる傾向がある.）

1　$\wedge$ の導入規則，除去規則

それではまず，比較的簡単な連言（$\wedge$）に関する，導入規則，除去規則から説明していく．$\wedge$ の導入規則，除去規則は次のような形をとる．

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\wedge\mathrm{I} \qquad\qquad \frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}\wedge\mathrm{E}$$

ここで，$\wedge$I, E はそれぞれ $\wedge$ 導入規則，$\wedge$ の除去規則という意味．$\wedge$I, $\wedge$E をこれらの規則の名前の省略として正式に採用する．

例えば，$A \wedge B$ が前提で，$B \wedge A$ が結論であるような推論がある場合，その前提から結論を導く導出（derivation）は次のようになる．

（A, B はメタ変項だが，定理も演繹もメタ変項で書いて一向に構わない（対象言語のいかなる式を代入しても，演繹である，定理であるという性質は保存される）ので，これからは自然演繹の証明図をメタ変項を使って書くことにする．）

$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A\wedge B}}{B}\,\wedge\mathrm{E}\qquad \dfrac{\overset{2}{A\wedge B}}{A}\,\wedge\mathrm{E}}{B\wedge A}\,\wedge\mathrm{I}$$

これは $A\wedge B$ を前提とし，$B\wedge A$ を結論とする推論の自然演繹体系における証明図になっている．

練習問題．前提 $(A\wedge B)\wedge C$ 結論 $A\wedge(B\wedge C)$.

2 $\to$ の除去規則

では次に，$\to$ の除去規則と導入規則を説明する．$\to$ の導入規則は若干複雑なため，$\to$ の除去規則から説明する．次の規則は $\to$ の除去規則である．（伝統的には Modus Ponens と呼ばれる．）

$$\dfrac{A\qquad A\to B}{B}\,\to\mathrm{E}$$

次の証明図は，A, B, $(A\wedge B)\to C$ という前提から，C という結論を導く推論の証明図である．

$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A}\qquad \overset{2}{B}}{A\wedge B}\,\wedge\mathrm{I}\qquad \overset{3}{(A\wedge B)\to C}}{C}\,\to\mathrm{E}$$

次の証明図は，$A\to(B\to C)$, $A\to B$, A という 3 つの前提から，C という結論を導く推論の証明図である．

$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{A}\qquad \overset{2}{A\to B}}{B}\,\to\mathrm{E}\qquad \dfrac{\overset{1}{A}\qquad \overset{3}{A\to(B\to C)}}{B\to C}\,\to\mathrm{E}}{C}\,\to\mathrm{E}$$

同じ前提を二度使っても構わないことに注意．

Exercise. 前提 $A\wedge B$, $A\to C$, $C\to D$ 結論 $B\wedge D$.

3　$\to$ の導入規則

次に，$\to$ の導入規則について説明する．$\to$ の導入規則は次のような形をしている．

$$\dfrac{\begin{array}{c} i \\ [A] \\ \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \to B}\; i, \to\mathrm{I}$$

この規則の意味は次の通り．A を仮定して B を導いた後，A という仮定を「落とし」（discharge）$A \to B$ ということを主張するということである．これはつまり，A を仮定して，B を主張するということは，A を仮定せずに $A \to B$ を主張することに他ならないということである．

ここで $[A]$ と書いてあるのは，$\to$ の導入規則を適用した後には，A という仮定はもう使えなくなっているということを示すためである．次のように書いてある教科書も存在する．

$$\dfrac{\begin{array}{c} i \\ \not{A} \\ \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \to B}\; i, \to\mathrm{I}$$

この証明図には，A を仮定して B を導くまでのプロセス（水平線の上まで）と，A という仮定を落として $A \to B$ という式を主張するというプロセスの 2 つが同じ図の中に書き込まれている.（いわば,「時間」が織り込まれているのである．はじめは $/$ なしで A という仮定を読み，A という仮定を落とした後には A という仮定に $/$ をつけ，これを忘れて，$A \to B$ のみを考えるのである．このため，初学者には理解が難しい面があるかもしれない．慣れてしまうと自然なステップなのだが.）

これを使って，$(A \wedge B) \to A$ という式を証明してみよう.（これは論理的真理なので，前提なしでも証明できる.）

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c} 1 \\ [A \wedge B] \end{array}}{A}\,\wedge\mathrm{E}}{(A \wedge B) \to B}\; 1, \to\mathrm{I}$$

なお，次の例のように「落とすべき」仮定が複数回現れる場合，同じ番号をつけて 1 回ですべての仮定を落としてよい．

前提 $(A \to (A \to B))$ から $(A \to B)$ を導く証明の証明図は次のようになる．

$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{[A]} \qquad \dfrac{\overset{1}{[A]} \qquad \overset{2}{A \to (A \to B)}}{A \to B}\,{\to}\mathrm{E}}{B}\,{\to}\mathrm{E}}{A \to B}\,1,\ {\to}\mathrm{I}$$

また，$A \to (B \to A)$ は次のように証明できるが，これについては以下の証明の後のコメントも参照せよ．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{[A]} \qquad \overset{2}{[B]}}{A \wedge B}\,\wedge\mathrm{I}}{A}\,\wedge\mathrm{E}}{B \to A}\,2,\ {\to}\mathrm{I}}{A \to (B \to A)}\,1,\ {\to}\mathrm{I}$$

この証明図においては，$\wedge$E を適用している箇所において，その上で導入した $A \wedge B$ という式の $\wedge$ をすぐに除去している．ということはこのステップはある意味，余計なステップであるとも言える．そのため，こうした例では一度も明示的に仮定がなされていない式についても $\to$I を B に（vacuous に）適用して，以下のような証明図を作ることを認めることとする.（この場合には，$\to$I の適用に落とすべき（discharge すべき）仮定の番号はつかないことに注意.）

$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{[A]}}{B \to A}\,{\to}\mathrm{I}}{A \to (B \to A)}\,1,\ {\to}\mathrm{I}$$

こうした形の $\to$I，つまり

$$\dfrac{A}{B \to A}\,{\to}\mathrm{I}$$

を使うことが許される理由は，以下のように（一応）正当化できる．

$$\dfrac{A \qquad A \to (B \to A)}{B \to A}\,{\to}\mathrm{E}$$

ここで $A \to (B \to A)$ は既に上で証明されているので，$\wedge$I, $\wedge$E という余計なステップを使った証明が正しいのであれば，この証明図により，A という前提だけから $B \to A$ を導く規則が我々の自然演繹の体系の中の原始的な（primitive）な規則を使って導かれたということになる．このような導出された規則はしばしば「導出規則」（derived rules）と呼ばれる．

ここまでに導入した規則を以下にまとめると，次のようになる．

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}\wedge\mathrm{I} \qquad \frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}\wedge\mathrm{E} \qquad \frac{A \quad A \to B}{B}\to\mathrm{E}$$

$$\frac{\begin{array}{c} i \\ [A] \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \to B}\, i, \to\mathrm{I}$$

これらを使って，以下の式が証明できる.（練習問題）

1. $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$

2. $A \to (B \to (A \wedge B))$

3. $((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to (B \wedge C))$

4. $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$

4. $(A \to (B \to C)) \to ((A \wedge B) \to C)$

5. $((A \wedge B) \to C) \to (A \to (B \to C))$

6. $(A \to B) \to ((C \wedge A) \to (C \wedge B))$

7. $((A \to B) \wedge (C \to D)) \to ((A \wedge C) \to (B \wedge D))$