1. 次のベクトルの組が 1 次独立か 1 次従属かを判定せよ．ただし，a は実定数とする．

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ a+1 \end{pmatrix}$$

解

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ a+1 \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2| = \begin{vmatrix} a & -2 \\ 0 & a+1 \end{vmatrix} = a(a+1)$$

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ が 1 次独立 $\Longleftrightarrow \det A = |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2| \neq 0$ であるから，
$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は，$a \neq 0, -1$ のとき 1 次独立，$a = 0, -1$ のとき 1 次従属である．□

2. 次の条件を満たす 2 次直交行列 T を求めよ．

$$\text{ベクトル}\, T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{は直線}\, x + y = 1 \,\text{と同じ傾きをもち，}\det T = -1 \,\text{である．}$$

解

T は 2 次直交行列であるから，$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ と表される．

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} &= \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha = \cos 0 = 1 \\ \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix} &= -\cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = -\cos 0 = -1 \end{aligned}$$

$\det T = -1$ であるから，$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ は直線 $x + y = 1$ と同じ傾き -1 をもつから $\tan\alpha = -1$
ゆえに

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} + n\pi (n \text{は整数})$$

よって

$$T = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \square$$

3. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

解

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

A の固有多項式は

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -6 \\ -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(1-\lambda) - (-6)(-5) = \lambda^2 - 4\lambda - 27 = \{\lambda - (2+\sqrt{31})\}\{\lambda - (2-\sqrt{31})\} \end{aligned}$$

よって，A の固有値は $\lambda_1 = 2 + \sqrt{31}, \lambda_2 = 2 - \sqrt{31}$
$A\boldsymbol{x}_j = \lambda_j \boldsymbol{x}_j (\boldsymbol{x}_j \neq \mathbf{0})$ であるから

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\boldsymbol{x}_1 &= \begin{pmatrix} 1-\sqrt{31} & -6 \\ -5 & -1-\sqrt{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{31})x - 6y \\ -5x + (-1-\sqrt{31})y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ (A - \lambda_2 I)\boldsymbol{x}_2 &= \begin{pmatrix} 1+\sqrt{31} & -6 \\ -5 & -1+\sqrt{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{31})x - 6y \\ -5x + (-1+\sqrt{31})y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

よって，A の固有値 λ_j に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_j$ は

$$\boldsymbol{x}_1 = k \begin{pmatrix} 6 \\ 1-\sqrt{31} \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = k \begin{pmatrix} 6 \\ 1+\sqrt{31} \end{pmatrix} (k \text{ は } 0 \text{ でない任意定数}) \square$$

4. 以下の行列を A とする．ここで適当な正則行列 P を見つけ，$P^{-1}AP$ を $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ あるいは $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ の形にせよ.

$$(1)\begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \qquad\qquad (2)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

解

(1)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$$

A の固有多項式は

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -10 \\ 5 & -7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (8-\lambda)(-7-\lambda) - (-10)\cdot 5 = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda+2)(\lambda-3) \end{aligned}$$

よって，A の固有値は $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3$
$A\boldsymbol{x}_j = \lambda_j \boldsymbol{x}_j (\boldsymbol{x}_j \neq \mathbf{0})$ であるから

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\boldsymbol{x}_1 &= \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x - 10y \\ -5x - 5y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ (A - \lambda_2 I)\boldsymbol{x}_2 &= \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x - 10y \\ 5x - 10y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

よって，A の固有値 λ_j に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_j$ は

$$\boldsymbol{x}_1 = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (k\text{ は }0\text{ でない任意定数})$$

$P = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
したがって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

A の固有多項式は

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(6-\lambda) - (-2)\cdot 2 = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 \end{aligned}$$

よって，A の固有値は $\lambda = 4$

ゆえに $A - \lambda I = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_0 = (A - \lambda I)\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ として，

$P = (\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

したがって

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \square$$

5. 直交行列を用いて，次の実対称行列を対角化せよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

A の固有多項式は

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-2-\lambda) - 2\cdot 2 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) \end{aligned}$$

よって，A の固有値は $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$
$A\boldsymbol{x}_j = \lambda_j \boldsymbol{x}_j (\boldsymbol{x}_j \neq \mathbf{0})$ であるから

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\boldsymbol{x}_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y \\ 2x-4y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \\ (A - \lambda_2 I)\boldsymbol{x}_2 &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+2y \\ 2x+y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

よって，A の固有値 λ_j に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_j$ は

$$\boldsymbol{x}_1 = k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}（k \text{ は } 0 \text{ でない任意定数}）$$

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を正規化すると

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{||\boldsymbol{x}_1||} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{x}_2}{||\boldsymbol{x}_2||} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$T = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ とおくと，T は直交行列であり，$T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
したがって

$$T^{-1}AT = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \square$$

6. $X = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & k \\ k & 7 \end{pmatrix}$ とする．ただし，k は実数である．
(1)X の固有値を求めよ．
(2)k に関して，すべての 2 次列ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\lim_{n\to\infty} X^n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となるための条件を求めよ．
解
(1)

$$X = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & k \\ k & 7 \end{pmatrix}$$

X の固有多項式は

$$\begin{aligned} f_X(\lambda) &= |X - \lambda I| = \begin{vmatrix} \frac{7}{10} - \lambda & \frac{k}{10} \\ \frac{k}{10} & \frac{7}{10} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{7}{10} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{k}{10}\right)^2 = \left(\lambda - \frac{7+k}{10}\right)\left(\lambda - \frac{7-k}{10}\right) \end{aligned}$$

よって，X の固有値は $\lambda_1 = \frac{7+k}{10}, \lambda_2 = \frac{7-k}{10}$
(2)$X\boldsymbol{p}_j = \lambda_j \boldsymbol{p}_j (\boldsymbol{p}_j \neq \boldsymbol{0})$ であるから

$$\begin{aligned} (X - \lambda_1 I)\boldsymbol{p}_1 &= \frac{k}{10}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \\ (X - \lambda_2 I)\boldsymbol{p}_2 &= \frac{k}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

よって，X の固有値 λ_j に対する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_j$ は

$$\boldsymbol{p}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{（t は 0 でない任意定数）}$$

$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと，　$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
したがって

$$P^{-1}XP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & k \\ k & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7+k & 0 \\ 0 & 7-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$X^n = P(P^{-1}XP)^n P^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$\lim_{n\to\infty} X^n \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} (\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2)$ となるための条件は

$$|\lambda_1| < 1 \text{ かつ } |\lambda_2| < 1 \iff \left|\frac{7+k}{10}\right| < 1 \text{ かつ } \left|\frac{7-k}{10}\right| < 1 \iff -3 < k < 3 \square$$

7. $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ とする．

(1) 同次線形微分方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$ の基本行列を求めよ．

(2) 非同次線形微分方程式 $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$ の解で，初期条件 $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を満たすものを求めよ．

解

(1)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}, A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

A の固有多項式は

$$\begin{aligned} f_A(\lambda) &= |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)(4-\lambda) - (-3)\cdot 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

よって，A の固有値は $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

$A\boldsymbol{p}_j = \lambda_j \boldsymbol{p}_j (\boldsymbol{p}_j \neq \boldsymbol{0})$ であるから

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\boldsymbol{x}_1 &= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 3y \\ 2x + 3y \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \\ (A - \lambda_2 I)\boldsymbol{x}_2 &= \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x - 3y \\ 2x + 2y \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

よって，A の固有値 λ_j に対する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_j$ は

$$\boldsymbol{p}_1 = k\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}（k \text{ は } 0 \text{ でない任意定数}）$$

$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

したがって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

変数変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ によって

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} \Longleftrightarrow \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = P^{-1}AP\boldsymbol{y} \Longleftrightarrow \frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$$

$\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{y}$ の基本行列は $\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

したがって，$\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x}$ の基本行列は

$$\Phi(t) = P\Psi(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^t & e^{2t} \\ -2e^t & -e^{2t} \end{pmatrix}$$

(2)

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t), A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$$

$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 3e^t & e^{2t} \\ -2e^t & -e^{2t} \end{pmatrix}$ であるから $\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-2t} \end{pmatrix}$

よって

$$\Phi^{-1}(t)\boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t \Phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)ds = \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix}$$

$\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ の一般解は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \Phi(t)\boldsymbol{c} + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(t)\boldsymbol{b}(t)dt \\ &= \begin{pmatrix} 3e^t & e^{2t} \\ -2e^t & -e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3e^t & e^{2t} \\ -2e^t & -e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (3c_1 - 1)e^t + (c_2 + 1)e^{2t} \\ -(2c_1 - 1)e^t - (c_2 + 1)e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

初期条件 $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を満たすとき

$$\boldsymbol{c} = \Phi^{-1}(0)\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} -e^t + 2e^{2t} \\ e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix} = (2e^{2t} - e^t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \square$$