求めるベクトルを $\mathbf{u}$ とすると

$$\mathbf{u} = \pm \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} //$$

3] $${}^tAB = \begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+5 & a^2 \\ 2 & 2a+5 \end{pmatrix}$$

$${}^tAB \text{ が正則} \iff |{}^tAB| \neq 0$$
$$\iff (a+5)(2a+5) - 2 \cdot a^2 \neq 0$$
$$\iff 15a + 25 \neq 0$$
$$\iff a \neq -\frac{5}{3} //$$

4] (1) A の固有方程式 $f_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = (\lambda-6)(\lambda+1)$

よって A の固有値は $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 6$

λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ とすると

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これより求める正則行列は $P = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ // → 石確かに $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ となる。

(2) A の固有方程式 $f_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2$

よって A の固有値は $\lambda = 3$

ベクトル $\mathbf{p}_1$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ととり、$\mathbf{p}_0 = (A - \lambda I)\mathbf{p}_1$ $(\neq \mathbf{0})$ ととる。

これより、求める行列は $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ // → 石確かに $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ となる。

5] 1) X の固有方程式 $f_X(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 2$

よって、X の固有値は $\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$ // $\left(\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{2},\ \lambda_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$

2) λ_1, λ_2 に対応する固有ベクトルを $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ とすると

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1+\sqrt{17} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1-\sqrt{17} \end{pmatrix}$$

これより $P = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1+\sqrt{17} & 1-\sqrt{17} \end{bmatrix}$ //