問題 III 図 III-1 のように、半径 b で単位長さあたり n 巻きのソレノイドの中に、内径が a、外径が b の円筒状の無限に長い磁性体が、中心軸を共通にして入っている $(0 < a < b)$。ソレノイドと磁性体の共通の中心軸を z 軸にとる。z 軸に垂直な平面内の位置を 2 次元極座標 (r, φ) で表した円柱座標系 (r, φ, z) を用いて考える。z 軸の正の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_z$ とする。位置 (r, φ, z) において、z 軸に垂直で z 軸から遠ざかる方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$、z 軸を中心に回転する方向 (右ねじが $\boldsymbol{e}_z$ 方向に進む方向) の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\varphi$ とする (図 III-2 参照)。磁性体は $a < r < b$ の領域にある。磁性体の透磁率は r の関数として $\mu(r) = \bar{\mu}\mu_0 \left(\dfrac{r}{a}\right)^2$ で与えられている。ここで、$\bar{\mu}$ は $\bar{\mu} > 1$ を満たす定数である。$r < a$, $b < r$ の領域は真空である。ソレノイドに $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向に大きさ I の電流を流す。位置 (r, φ, z) におけるベクトル量は、互いに直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ を用いて表しなさい。

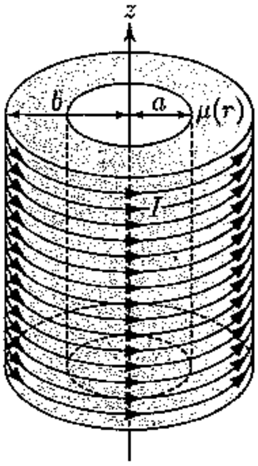

図 III-1

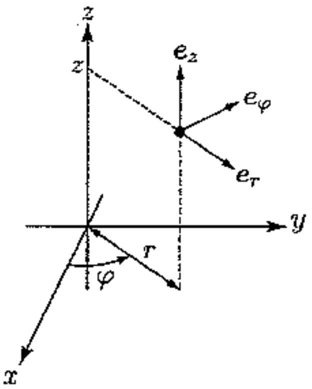

図 III-2

(1) 位置 (r, φ, z) における磁束密度 $\boldsymbol{B}(r, \varphi, z)$、磁界 $\boldsymbol{H}(r, \varphi, z)$、磁化 $\boldsymbol{J}(r, \varphi, z)$ を求めなさい。

(2) 磁性体の内側の表面上の位置 $(r = a, \varphi, z)$ における面磁化電流密度ベクトル $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(a, \varphi, z)$ と磁性体の外側の表面上の位置 $(r = b, \varphi, z)$ における面磁化電流密度ベクトル $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(b, \varphi, z)$ を求めなさい。

(3) 位置 (r, φ, z) における磁化電流密度 $\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}(r, \varphi, z)$ を求めなさい。
ヒント: デカルト座標 (x, y, z) においては、$r = \sqrt{x^2 + y^2}$、
$\boldsymbol{e}_r = \left(\dfrac{x}{r}, \dfrac{y}{r}, 0\right)$、$\boldsymbol{e}_\varphi = \left(-\dfrac{y}{r}, \dfrac{x}{r}, 0\right)$、$\boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)$ と表される。

問題 IV 半径 a の無限に長い導体円柱棒がある。導体円柱棒の中心軸を z 軸にとり、**問題 III** で用いた円柱座標系 (r, φ, z) を用いて考える。導体円柱棒の電気伝導率は r の関数として $\sigma(r) = \sigma_0 \left(\dfrac{r}{a}\right)^2$ で与えられている。この導体円柱棒の内外に時刻 t に依存した一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}}(r, \varphi, z, t) = B_{\mathrm{ex}}(t)\boldsymbol{e}_z = (B_0 + \beta t)\boldsymbol{e}_z$ を加えた。ここで、σ_0、B_0、β は正の定数である。また、導体円柱棒の内外で透磁率は μ_0 である。位置 (r, φ, z) におけるベクトル量は、互いに直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ を用いて表しなさい。

(1) 時刻 t で、位置 (r, φ, z) における電界 $\boldsymbol{E}(r, \varphi, z, t)$ と電流密度ベクトル $\boldsymbol{i}(r, \varphi, z, t)$ を求めなさい。

(2) 時刻 t で、円柱棒の単位長さに発生する単位時間あたりのジュール熱 $P(t)$ を求めなさい。

(3) (1) で求めた電流密度が、時刻 t で、位置 (r, φ, z) につくる磁束密度 $\boldsymbol{B}'(r, \varphi, z, t)$ を求めなさい。