

数学2B 試験問題 (2015.11.17. 5 限) 担当: 井関裕靖

注意事項

- 問題は4問あります。印刷が不鮮明な場合は申し出て下さい。
- 答案用紙は各自一枚ずつです。追加はありません。表裏の両面を使って構いませんが、一枚に収まるように解答のレイアウトを工夫して下さい。
- 答案用紙はOCR処理します。学籍番号は答案用紙の上にある記入例にしたがって、丁寧に記入して下さい。
- 持ち込みは不可です。教科書、ノートは(もちろん他の人の答案も)見てはいけません。

1 (15点) 次の線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の表現行列 A を求めよ。さらに、 f の全射性と単射性を判定せよ。

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, f\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2 (15点) 次の表現行列 A をもつ線形写像 f_A の像の次元が2となるような a, b を求めよ。また、そのときの f_A の核空間と像空間の基底と次元を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & b & 1 \end{bmatrix}$$

3 (10点) 次の行列 A の行列式を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

4 (10点) (1) $m \times n$ 行列 A を表現行列とする線形写像 $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が単射なら、 tA を表現行列とする線形写像は全射であることを示せ。

(2) $m \times n$ 行列 A に対し $A {}^tA$ が正則ならば、 A を表現行列とする線形写像 $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ は全射であることを示せ。