Date . . No.

H16年 数学A2

[1] $x_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2-a \end{pmatrix}$ とする。

$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$ とおくと

$$\begin{cases} 8c_1 - 2c_2 - 4c_3 = 0 & \text{—— ①} \\ -c_1 + c_2 + 4c_3 = 0 & \text{—— ②} \\ 5c_1 + ac_2 + (2-a)c_3 = 0 & \text{—— ③} \end{cases}$$

(①$\times\frac{1}{2}$)+② より　$3c_1 + 2c_3 = 0$

(①$\times\frac{a}{2}$)+③ より　$(4a+5)c_1 + (2-3a)c_3 = 0$

よって　$2(4a+5)c_1 + (2-3a)\cdot(2c_3) = 0$

$2(4a+5)c_1 + (2-3a)\cdot(-3c_1) = 0$

$(17a+4)c_1 = 0$

ゆえに　$a \neq -\frac{4}{17}$ のとき　$c_1 = c_2 = c_3 = 0$　となり

x_1, x_2, x_3 は一次独立となる。

以上より 求める条件は　$a \neq -\frac{4}{17}$ //

[2] 求めるベクトルを x とする。

$\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ より 外積をとれば x を得られる。

$\therefore\ x = \pm\, x_1 \times x_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ //

(別解 —— シュミットの直交化法)

x_1, x_2 と独立なベクトルとして $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をとる。

$u = x + c_1 x_1 + c_2 x_2$ とし、$(u, x_1) = (u, x_2) = 0$ をみたす c_1, c_2
を求めると　$c_1 = 0$, $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

これより　$u = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$