担当教員：坂内 健一　研究室：矢上 14 棟 443 室　E-mail:bannai@math.keio.ac.jp

数学 B1 解答

November 17, 2010　http://www.math.keio.ac.jp/~bannai/

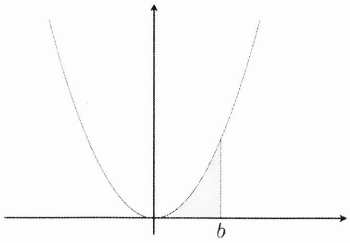
【略解】

問題 1.

右図の塗られた箇所の面積が、

$$\int_0^b x^2 dx$$

である。



問題 2.

(1) 略

(2)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 b^2}{n^2} \cdot \frac{b}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)b^3}{6n^2} \\ s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2 b^2}{n^2} \cdot \frac{b}{n} = \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{6n^2}. \end{aligned}$$

問題 3.

$$\begin{aligned} \overline{\int_0^b} x^2 dx &= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{3}\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{b^3}{3}, \\ \underline{\int_0^b} x^2 dx &= \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{3}\left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{b^3}{3}. \end{aligned}$$

$\overline{\int_0^b} x^2 dx = \underline{\int_0^b} x^2 dx$ より $f(x) = x^2$ は区間 $[0, b]$ で積分可能である。

問題 4. 以下 C は定数。

(1) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$　　(2) $F(x) = -\cos(x) + C$

(3) $F(x) = x\log x - x + C$　　(4) $F(x) = \mathrm{Arctan}(x) + C$

問題 5. 微分積分学の基本定理を用いて計算する。

(1) $\displaystyle\int_0^b x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^b = \frac{b^3}{3}$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\left[\cos x\right]_0^{\pi/2} = 1$

問題 6. 部分積分を用いて解く。以下 C は積分定数。

(1) $x\log(x) - x + C$　　(2) $(x^2 - 2x + 2)e^x + C$

(3) $x\,\mathrm{Arctan}(x) - \dfrac{1}{2}\log(1 + x^2) + C$　　(4) $x\,\mathrm{Arcsin}(x) + \sqrt{1 - x^2} + C$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

担当教員：坂内 健一　研究室：矢上14棟443室　E-mail:bannai@math.keio.ac.jp

問題 7. 以下 C は積分定数。

(1) $\mathrm{Arctan}(x) + C$ (2) $\mathrm{Arcsin}(x) + C$

(3) $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \log|x + \sqrt{x^2+1}|\right)$ (4) $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1} - \log|x + \sqrt{x^2-1}|\right)$

答え逆？

問題 8. 以下 C は積分定数。

(1) $\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C$ (2) $\log|x-a| + C$

(3) $\frac{((x-a)^2+b^2)^{1-n}}{2(1-n)} + C$ (4) $\frac{1}{2}\log|(x-a)^2+b^2| + C$

(5) $\frac{1}{b}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-a}{b}\right)$ (6) $\frac{(x-a)}{2b^2((x-a)^2+b^2)} + \boxed{\frac{1}{2b}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-a}{b}\right) + C$

？ $\frac{1}{2b^3}$ になった

問題 9. 部分分数展開は確実にできるようになりましょう。

(1) $\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1}$ (2) $\frac{2x^2+4}{(x-1)^2(x-4)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$

(3) $\frac{3x^2-4x+1}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x-2}$ (4) $\frac{x^3-5x^2+x-10}{(x^2+1)(x^2-4)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2}$

問題 10. 以下 C は積分定数。

(1) $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x-2)} = \log\frac{|x-2|^2}{|x-1|} + C$

(2) $\int \frac{(2x^2+4)\,dx}{(x-1)^2(x-4)^2} = \log\frac{|(x+1)(x-2)|}{|(x-1)(x+2)|} + C$

(3) $\int \frac{(3x^2-4x+1)\,dx}{(x^2+1)(x-2)} = \log|(x^2+1)(x-2)| + C$

(4) $\int \frac{(x^3-5x^2+x-10)\,dx}{(x^2+1)(x^2-4)} = \mathrm{Arctan}(x) + \log\frac{|x+2|^2}{|x-2|} + C$

問題 11. 以下 C は積分定数。

(1) $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}dx = \frac{1}{2}\log|x| + 2\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+2| + C$

(2) $\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}dx = \frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$

(3) $\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}dx = \log|x-1| + \log(x^2+x+1) + \frac{4\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

(4) $\int \frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2}dx = \frac{1}{3}\log|x-1| + \frac{1}{3}\log(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{6}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2x^2+4} + C$

問題 12. 部分積分を使う。

$$I_n = \frac{1}{b^2}\left\{\left(\frac{(x-a)}{2(n-1)((x-a)^2+b^2)^{n-1}}\right) + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right\}$$

とならない？

問題 13. 以下 C は積分定数。

(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\log\left|\dfrac{\tan(x/2)+\sqrt{2}-1}{\tan(x/2)-\sqrt{2}-1}\right|+C$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1+3\tan(x/2)}{\sqrt{5}}\right)+C$

(3) $\dfrac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}\tan\dfrac{x}{2}\right)+C$ (4) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}\log\left|\dfrac{a+\cos x+\sqrt{a^2-1}\sin x}{1+a\cos x}\right|+C$

問題 14. 以下 C は積分定数とする。(3) のヒント：$3-2x-x^2=4-(x+1)^2$ に注意せよ。

(1) $\log|x+\sqrt{x^2+1}|+C$ (2) $\log|x+\sqrt{x^2-1}|+C$

(3) $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+C$ (4) $\dfrac{2x^2+x-9}{6}\sqrt{3-2x-x^2}-2\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+C.$

−arccos.

問題 15.

(1) $y=-\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}+C.$

(2) $y=\sqrt{x^2(x+1)}$, $y=tx$ でパラメーター表示を入れる。すると、$x=t^2-1$ となる。このパラメーターを用いて計算すると

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2(x+1)}}=\int\frac{2dt}{t^2-1}=\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\log\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C.$$

問題 16.

(1) 積分領域 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0\le x\le 4,\ x\le y\le 2\sqrt{x}\}$ は $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ 0\le y\le 4,\ \frac{y^2}{4}\le x\le y\right\}$ に等しい。従って、$\displaystyle\int_0^4 dx\int_x^{2\sqrt{x}}f(x,y)\,dy=\int_0^4 dy\int_{\frac{y^2}{4}}^{y}f(x,y)\,dx.$

(2) 積分領域 $\left\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le a\cos\theta\right\}$ は $\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\mid 0\le r\le a,\ 0\le\theta\le\cos^{-1}\frac{r}{a}\}$ に等しい。従って、$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}f(r,\theta)\,dr=\int_0^a dr\int_0^{\cos^{-1}\frac{r}{a}}f(r,\theta)\,d\theta.$

arc と同じ?

問題 17.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{a^2}{4}}dy\int_{\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4y})}^{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4y})}f(x,y)\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^b dy\int_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}f(x,y)\,dx$

問題 18.

(1) 積分領域 $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ 0\le x\le 2a,\ \dfrac{x^2}{4a}\le y\le 3a-x\right\}$ は $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0\le y\le a,\ 0\le x\le 2\sqrt{ay}\}$ と $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid a\le y\le 3a,\ 0\le x\le 3a-y\}$ を合わせたものに等しい。従って、

$$\int_0^{2a}dx\int_{\frac{x^2}{4a}}^{3a-x}f(x,y)\,dy=\int_0^a dy\int_0^{2\sqrt{ay}}f(x,y)\,dx+\int_a^{3a}dy\int_0^{3a-y}f(x,y)\,dx.$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{b}{a+b}}dy\int_0^a f(x,y)\,dx+\int_{\frac{b}{a+b}}^1 dy\int_0^{b\left(\frac{1}{y}-1\right)}f(x,y)\,dx$

担当教員：坂内 健一　研究室：矢上 14 棟 443 室　E-mail:bannai@math.keio.ac.jp

(3) $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$

問題 19.

(1) 積分の順序を変更して計算すると、

$$\int_0^a dr \int_{-\cos^{-1}\frac{r}{a}}^{\cos^{-1}\frac{r}{a}} r\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r\,dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{a\cos\theta} d\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}a^2.$$

(2) 積分の順序を変更して計算すると、

$$\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 y\,e^{xy}\,dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 y\,e^{xy}\,dx + \int_1^2 dy \int_1^2 y\,e^{xy}\,dx$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[e^{xy}\right]_{\frac{1}{y}}^2 dy + \int_1^2 \left[e^{xy}\right]_1^2 dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 (e^{2y} - e)\,dy + \int_1^2 (e^{2y} - e^y)\,dy = \frac{e^2}{2}(e^2 - 2).$$

問題 20.

(1) $\dfrac{1}{3}$　(2) $\dfrac{3}{20}$　(3) $\dfrac{4}{3}$　(4) $\dfrac{e-1}{2}$

問題 21.

(1) $\dfrac{\pi}{2}$　(2) $\dfrac{\pi}{2}$　(3) -1

問題 22.

(1) 収束しない。　(2) 収束する。

問題 23.

(1) 収束する。　(2) 収束しない。

問題 24. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{(x\log x)^\lambda}dx \le \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\log n)^\lambda} \le \frac{1}{2(\log 2)^\lambda} + \int_2^\infty \frac{1}{(x\log x)^\lambda}dx$ を用いると、$\lambda > 1$ で収束、$\lambda \le 1$ で発散することが導かれる。

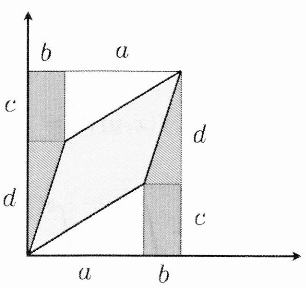
問題 25. (2) の $0 \le x, y \le 1$ は $0 \le x \le 1$ かつ $0 \le y \le 1$ の意味であることに注意せよ。

(1) $\dfrac{1}{4}$　(2) 1

問題 26. 右の図で青い部分の面積を計算すれば良い。全体の面積は

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

ここから黄色い部分の面積 ac、緑の部分の面積 bd、赤の部分の面積 $2bc$ を引くと、$ad - bc$ を得る。



問題 27. $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$ により変数変換を行う。変換後の積分領域は

$$\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\},$$

Jacobian は $\left|\frac{\partial(x\ y)}{\partial(r\ \theta)}\right| = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$　なので

$$\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot|abr|\,dr$$
$$= 2\pi ab\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}ab.$$

問題 28. 頑張って計算してみて下さい。

問題 29.

(1) 逆行列を計算すれば良い。$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} u+2v \\ u-v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ である。Jacobi 行列は $\frac{\partial(x\ y)}{\partial(u\ v)} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$ で与えられるため、Jacobian は $\left|\frac{\partial(x\ y)}{\partial(u\ v)}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\right| = 1/3$

(2) 図は略。$E = f^{-1}(D)$ は正方形 $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le |u| \le 1, 0 \le |v| \le 1\}$ である。また、1 次変換による面積の比率が行列式の絶対値倍になることから、D の面積は E の面積の $\left|\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\right| = 1/3$ 倍である。

(3) Jacobian が $\left|\frac{\partial(x\ y)}{\partial(u\ v)}\right| = 1/3$ であることから、$I = \frac{1}{3}\iint_E v^2 du dv$ となる。計算すると 4/9 になるはず。

問題 30.

(1) 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を行うと, 変換後の積分領域は

$$D_1 = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le r \le \frac{a}{\cos\theta}\right\} \quad と \quad D_2 = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le \frac{a}{\sin\theta}\right\}$$

に分かれるので

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(a^2+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \iint_{D_1} (a^2+r^2)^{-\frac{3}{2}}\,r\,dr\,d\theta + \iint_{D_2} (a^2+r^2)^{-\frac{3}{2}}\,r\,dr\,d\theta.$$

右辺の第一項を計算すると、

$$\iint_{D_1} (a^2+r^2)^{-\frac{3}{2}}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} (a^2+r^2)^{-\frac{3}{2}}\,r\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[-(a^2+r^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{a}{\cos\theta}} d\theta$$
$$= \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}\right) d\theta = \frac{\pi}{4a} - \frac{1}{a}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{4a} - \frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12a},$$

ただし途中で $t = \sin\theta$ と置き換えている。同様に

$$\iint_{D_2} (a^2+r^2)^{-\frac{3}{2}}\,r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{12a}.$$

従って、求める積分の値は $\frac{\pi}{6a}$。

(2) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を行うと、変換後の積分領域は

$$\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

なので

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^m} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^{1-2m}\,dr = 2\pi \int_1^2 r^{1-2m}\,dr.$$

従って、$m > 1$ のとき、求める積分の値は $2\pi\left[\dfrac{r^{2-2m}}{2-2m}\right]_1^2 = \dfrac{\pi}{1-m}(2^{2-2m}-1)$.

$m = 1$ のとき、求める積分の値は $2\pi\Big[\log r\Big]_1^2 = 2\pi\log 2$.

(3) 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を行うと, 変換後の積分領域は

$$\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 \le \cos 2\theta,\ 0 \le r,\ 0 \le \cos 2\theta\},$$

すなわち

$$\left\{(r,\theta) \in R^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le r \le \sqrt{\cos 2\theta}\right\}$$

なので

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2} &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{r\,dr}{(1+r^2)^2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[-\frac{1}{2(1+r^2)}\right]_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+\cos 2\theta)}\right) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sec^2\theta\right) d\theta \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\Big[\tan\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(4) $x = ar\cos\theta,\ y = br\sin\theta$ と変数変換すると、変換後の積分領域は

$$\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\},$$

Jacobian は $\left|\dfrac{\partial(x\ y)}{\partial(r\ \theta)}\right| = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$ なので

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy &= ab\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\,r^3\,dr \\
&= a^3b\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta \int_0^1 r^3\,dr + ab^3\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\,d\theta \int_0^1 r^3\,dr \\
&= a^3b\cdot\pi\cdot\frac{1}{4} + ab^3\cdot\pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}ab\,(a^2+b^2).
\end{aligned}$$

(5) (4) と同様の変数変換を行うと、

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\Big/\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dx\,dy &= ab\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr \\
&= 2\pi ab\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr
\end{aligned}$$

$s = \sqrt{\dfrac{1-r^2}{1+r^2}}$ と変数変換すると、$r\,dr = \dfrac{-2s\,ds}{(1+s^2)^2}$ なので

$$\begin{aligned}
2\pi ab\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr = 2\pi ab\int_0^1 \frac{2s^2\,ds}{(1+s^2)^2} &= 2\pi ab\left(\left[-\frac{s}{1+s^2}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{ds}{1+s^2}\right) \\
&= 2\pi ab\left(-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \pi ab\left(\frac{\pi}{2}-1\right).
\end{aligned}$$

数学 B1 解答

略解利用上の注意

数学の演習問題の解答を配るべきかどうかは、数学担当教員の間で常に議論になる話題です。大学数学では、与えられた解答を目指すことが大事なのではなく、未知な問題の自分なりの解答を見つけることが何よりも大切です。解答を配ってしまうと、最初に解答を見てそれに合わせて考える様になってしまい、自分の頭で道筋を考えるという貴重な機会が失われてしまうのではないかと危惧しているからです。

この講義で私は解答を配ることにしましたが、以上の理由から、あくまでも自分の解答の確認のために利用して下さい。高校の参考書と比べると不親切な面もありますが、考えて穴を埋めるところこそが、単に暗記するだけではない本当の意味での勉強になります。そのため、この解答は基本的に略解に留めています。ご了承下さい。また、ミスプリもあると思いますが、発見したら教えて下さい。

お願い

理工学部・FD アンケートにご協力下さい。皆さんの意見はとても参考になります。

（入力期間：1 月 7 日〜2 月 14 日午後 7 時）　https://fd-enquete.st.keio.ac.jp/

コメント、楽しみにしています。よろしくお願いします。

【略解】

問題 31.

(1) $|A| = -6$　(2) $|A| = 4$、　(3) $|A| = 0$

(2) は単に対角線を掛けたものに成っていることに注意！(3) は最後の 2 列が同じものなので、縦方向の 3 ベクトルが張る平行 6 面体の体積が 0 になることに注意！

問題 32. 外積を計算すれば良い。

(1) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

以上の定数倍でも、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ に直交している。

問題 33. 略

問題 34. 定義より $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (6xy + z, 3x^2 - z, x - y)$.

問題 35. 定義に従って計算する。$\mathrm{div}(\boldsymbol{v}) = 2x + 3y^2$, $\mathrm{rot}(\boldsymbol{v}) = (x-1, -y, -1)$ となる。

問題 36. 強引に計算してみても良い。$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_2)$、$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$、$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,w_3)$ と置くと、

$$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=\det\begin{pmatrix}u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\\w_1&w_2&w_3\end{pmatrix}$$

となることに注意。$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})$、$\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$ は行の順番を入れ替えたものであり、行列式は変わらない。$u\cdot(v\times w)=-v\cdot(u\times w)$ などになることには注意せよ！

問題 37. $\mathrm{rot}(\boldsymbol{v})\neq 0$ となる $\boldsymbol{v}$ は、ポテンシャルを持たないことに注意。

(1) $f(x,y,z)=\frac{1}{2}x^2-yx+\frac{1}{2}z^2$　(2) $\boldsymbol{v}$ はポテンシャルを持たない。

(3) $f(x,y,z)=x^2y^2+(x-y)z$　(4) $f(x,y,z)=\dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}$.

問題 38.

(1) $\mathrm{div}(\boldsymbol{v})=z^3+8x^2y^3+10yz.$　(2) $\mathrm{div}(\boldsymbol{v})=0.$

(3) $\mathrm{div}(\boldsymbol{v})=ye^{xy}+\sin(y)+\sin(2z).$　(4) $\mathrm{div}(\boldsymbol{v})=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

問題 39.

(1) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{v})=(0,0,0).$　(2) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{v})=(5z^2,3xz^2,4xy^4).$

(3) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{v})=(0,0,-xe^{xy}).$　(4) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{v})=(-12xy^3+10x^2z^4,3y^4+14y^3z,-21y^2z^2-16xz^5).$

問題 40. ベクトル・ポテンシャルの取り方は色々とあるので注意。(3) は $\mathrm{div}(\boldsymbol{v})\neq 0$ より、ベクトル・ポテンシャルは存在しない。

(1) $\boldsymbol{v}=(-yz,-xz,y).$　(2) $\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}(z^2,x^2,y^2).$

(3) 存在しない。　(4) $\boldsymbol{v}=(-xy,z^2,y^3).$

問題 41. 定義に基づいて計算すれば良い。(1) は、$x=\cos(t)$, $y=\sin(t)$ より、

$$\begin{aligned}\int_\Gamma 2xydx+(x^2+y^2)dy&=\int_0^{\pi/2}\Big(2\sin(t)\cos(t)(-\sin(t))+(\sin^2(t)+\cos^2(t))\cos(t)\Big)\,dt\\&=\int_0^{\pi/2}\cos(t)(1-2\sin^2(t))dt=\Big[\sin(t)-\frac{2}{3}\sin^3(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

同様の計算をすると、(2)(3) も 1/3、(4) は $-1/3$ になる。

(1)-(4) の Γ は $\mathbb{R}^2$ の部分集合としては全く同じものであることに注意せよ！ただし、パラメータ t は、(1)(2)(3) のときは点 $(1,0)$ から $(0,1)$ へ反時計周りに動いているが、(4) のときは $(0,1)$ から $(1,0)$ へ時計回り（他の場合と逆方向）に動いていることに注意せよ．(4) だけマイナスがあるのはこの理由からである．

問題 42. $(x, y, z) = (t, t^2, t^3)$ であることから、定義に従って計算すると

$$= \int_\Gamma yzdx + xzdy + xydz = \int_0^1 t^5 dt + t^4(2tdt) + t^3(3t^2)dt = \int_0^1 6t^5 dt = \left[t^6\right]_0^1 = 1$$

が導かれる。

問題 43. 表面積の公式は絶対に絶対に覚えておきましょう！

(1) 長方形を R と置くと、

$$\begin{aligned}
\text{表面積 } S &= \iint_R dS = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \quad dxdy \\
&= \iint_R \sqrt{\left(\frac{x^2}{4-x^2}\right) + 1} \quad dxdy = \iint_R \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dxdy \\
&= \int_0^4 dy \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^4 2\left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^1 dy = 2\int_0^4 \frac{\pi}{6} dy = \frac{4}{3}\pi.
\end{aligned}$$

すなわち、S の面積 $= \frac{4}{3}\pi$ である。

(2) 円板 $x^2 + y^2 \leq 1$ を R と置くと、

$$\begin{aligned}
\text{表面積 } S = \iint_R dS &= \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \quad dxdy \\
&= \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy
\end{aligned}$$

である。この重積分を極座標表示で計算すると（を忘れずに！）、

$$\begin{aligned}
\iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy &= \iint_R \sqrt{4r^2\cos^2(\theta) + 4r^2\sin^2(\theta) + 1} \quad rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} \quad rdr = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12}(4r^2 + 1)^{3/2}\right]_0^1 d\theta = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right).
\end{aligned}$$

すなわち、S の面積 $= \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right)$ である。

問題 44. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ が成り立つので、表面積の公式より、

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \quad dxdy = \sqrt{2}dxdy$$

が成り立つ。$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ と極座標表示すると、領域 A は $\{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2\}$ と書き表される。従って、問題の積分は

$$\iint_A y^2 z^2 dS = \iint_A y^2(x^2 + y^2)\sqrt{2}dxdy$$

であり、極座標表示を用いると（ヤコビアンを忘れずに！）

$$\iint_A y^2 z^2 dS = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^5 \sin^2\theta\, dr = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^6}{6}\right]_1^2 \sin^2\theta\, d\theta$$
$$= \frac{21\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta = \frac{21\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2\theta)}{2}d\theta = \frac{21\sqrt{2}}{2}\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{21\sqrt{2}}{2}\pi$$

が導かれる。

問題 45.

(1) 曲面 A の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面は、$z = \frac{\partial z}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y-y_0) + z_0$ によって与えられる。従って、点 (x_0, y_0, z_0) における法線ベクトル $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{u} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right) = (2x_0, 2y_0, 1)$$

で与えられる。接平面上のベクトル $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ は実際に $\boldsymbol{u}$ と直交していることに注意せよ。

単位法線ベクトルは長さを 1 にしたもの。すなわち、点 (x, y, z) では

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

で与えられる。

(2) dS の公式より $dS = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}dxdy = \sqrt{4x^2+4y^2+1}dxdy$ となる。すると dS と $\boldsymbol{n}$ の中の $\sqrt{4x^2+4y^2+1}$ が打ち消されるので、

$$\iint_A \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS = \iint_A (2x^2+2y^2+z)dxdy = \iint_A (x^2+y^2+1)dxdy$$

が成り立つ。最後の等号は $z = 1 - x^2 - y^2$ から導かれる。極座標表示でこの積分を計算すると、

$$\iint_A (x^2+y^2+1)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 (r^2+1)rdr = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}+\frac{r^2}{2}\right]_0^1 d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\frac{3}{4}d\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

すなわち、

$$\iint_A \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}dS = \frac{3\pi}{2}$$

が導かれる。