1/2

# 慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

| 試験時間 | ~~50分~~ | 90分 |
|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 平成18年 7月18日（火） 6 時限施行 | | 理工 学部 　学科 1 年 ? 組 | 採点欄 ※ |
| 担当者名 | 数学 A1 担当者全員 | 学籍番号 6 0 6 * * * * * | 80/80 満点 |
| 科目名 | 数学 A1 | 氏名 名無 権兵衛 | |

**1.** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\{\log(1+x)\}^2+ax^2+bx^3}{x^4}$ が有限の極限値を持つように定数 $a, b$ の値を定め、その時の極限値を求めなさい。

10

マクローリン展開

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

より

$$(\log(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$$

とかける。

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{|\log(1+x)|^2+ax^2+bx^3}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+a)x^2+(-1+b)x^3+\frac{11}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}$$

これが有限値をもつことから、

$$1+a=0 \iff a = -1$$

$$-1+b=0 \iff b = 1$$

であり、このとき、

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\log(1+x))^2+ax^2+bx^3}{x^4} = \frac{11}{12}$$

となる。

**2.** 関数 $z=f(x,y)$ を $C^2$ 級とする。新しい変数 $(s,t)$, $(s,t)\neq(0,0)$, を $2x=s^2-t^2$, $y=st$ で定めるとき、次の (1)、(2) を $s,t$ および $z$ の $s,t$ による偏導関数を用いて表しなさい。

20

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(s^2-t^2) \\ y = st \end{cases} \qquad \therefore \frac{\partial x}{\partial s} = s,\ \frac{\partial x}{\partial t} = -t,\quad \frac{\partial y}{\partial s} = t,\ \frac{\partial y}{\partial t} = s$$

ここで、

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} = s\frac{\partial z}{\partial x} + t\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = -t\frac{\partial z}{\partial x} + s\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\iff \begin{cases} z_s = s z_x + t z_y & \cdots ① \\ z_t = -t z_x + s z_y & \cdots ② \end{cases}$$

①×s − ②×t ：

$$s z_s - t z_t = (s^2+t^2) z_x$$

$s^2+t^2 \neq 0$ （∵ $(s,t)\neq(0,0)$）より

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{s\frac{\partial z}{\partial s} - t\frac{\partial z}{\partial t}}{s^2+t^2}$$

(2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$

同様に、①×t ＋ ②×s とすれば

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{t\frac{\partial z}{\partial s} + s\frac{\partial z}{\partial t}}{s^2+t^2}$$

を得る。

$$\therefore \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(s^2+t^2)^2}\left\{ s^2\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 + t^2\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \cancel{-2st\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}} + t^2\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 + s^2\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 \cancel{+2st\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}} \right\}$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2}{s^2+t^2}$$

**3.** (1) 点 $x=1$ の近傍で次の条件 (i), (ii) を満たす $C^1$-級の関数 $y=\varphi(x)$ が存在することを示しなさい。

20

(i) $\varphi(1)=2$

(ii) $y^x+y+x=5$

$f(x,y) = y^x + y + x - 5$ とする。

・$f(1,2) = 2^1 + 2 + 1 - 5 = 0$

・$f_y(x,y) = x y^{x-1} + 1$

$\therefore f_y(1,2) = 1\cdot 2^{1-1} + 1 = 2 \neq 0$

より、陰関数定理から、

点 $(1,2)$ 近傍で陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在する。

また、陰関数は $C^1$ 級であり、その導関数は

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x}{f_y}$$

とかける。

③.

4/2

(2)　(1) の関数 $y=\varphi(x)$ に対し、微分係数 $\varphi'(1)$ の値を求めなさい。

$$f_x(x,y) = y^x \log y + 1$$

であるから，陰関数定理より

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{y^x \log y + 1}{x y^{x-1} + 1}$$

ここで，$x=1$ のとき $y=2$ （$\because \varphi(1)=2$）ゆえ，

$$\varphi'(1) = -\frac{2^1 \cdot \log 2 + 1}{1 \cdot 2^{1-1} + 1}$$

$$= -\frac{2\log 2 + 1}{2}$$

**4.**　実数 $a$ を定数として関数 $f(x,y) = x^3 - (a^2+3)x^2 - 2axy - y^2$ を考える。

20

(1)　$f$ の停留点をすべて求めなさい。

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 2(a^2+3)x - 2ay$$

$$f_y(x,y) = -2y - 2ax$$

います．

$$\mathrm{grad}\, f = (f_x, f_y) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2(a^2+3)x - 2ay = 0 & \cdots ① \\ -2y - 2ax = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

$① - ② \times a$ : $3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0$

$\therefore x = 0,\ 2$

これを②に代入すると，停留点として，

$$(x,y) = (0,0)(2,-2a)$$

を得る．

(2)　(1) で求めた停留点がそれぞれ極大、極小、あるいはそのいずれでもないかを判定しなさい。

ヘシアン H は

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3x-(a^2+3) & -a \\ -a & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

である。

$(x,y)=(0,0)$ のとき，

$$AC - B^2 = (a^2+3) - a^2 = 3 > 0$$

$$A = -(a^2+3) < 0$$

より，点 $(0,0)$ は 極大

$(x,y)=(2,-2a)$ のとき，

$$AC - B^2 = a^2 - 3 - a^2 = -3 < 0$$

より，点 $(2,-2a)$ はいずれでもない．

**5.**　条件 $3x^2+2y^2-2xy=1$ のもとで $f(x,y)=x^2+y^2$ の最大値、最小値を求めなさい。

10

$\varphi(x,y) = 3x^2+2y^2-2xy-1$ とする．

$$\varphi_x = 6x - 2y$$

$$\varphi_y = 4y - 2x$$

より，$\varphi = \varphi_x = \varphi_y = 0$ をみたすような $(x,y)$ は存在しない。

ここで

$$F(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(3x^2+2y^2-2xy-1)$$

として，連立方程式

$$\begin{cases} F_x = 2x + \lambda(6x-2y) = 0 & \cdots ① \\ F_y = 2y + \lambda(4y-2x) = 0 & \cdots ② \\ F_\lambda = 3x^2+2y^2-2xy-1 = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

を解く。①,②より，

$$-\lambda = \frac{2x}{6x-2y} = \frac{2y}{4y-2x} \Longleftrightarrow x^2 + 2xy - y^2 = 0 \quad \cdots ④$$

$③ + ④ \times 2$ ;

$$5x^2 - 1 = 0 \quad \therefore x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

これと④より，

$x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

となり．

最大値：$\frac{5+\sqrt{5}}{10}$　$(x,y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)$ のとき．

最小値：$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$　$(x,y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)$

（複号同順）

を得る