

1 量化学理論-導入-

これまでは、命題論理を考察してきたが、推論一般を形式化するには、命題論理だけでは不十分である。例えば、

$$\begin{array}{l} \text{全ての人間は哺乳類である} \\ \text{全ての哺乳類は四本足である} \\ \hline \text{全ての人間は四本足である。} \end{array}$$

これは正しい推論である。もし、この推論を命題論理を使って記号化しようとするれば、以下のようになるであろう。

$$P \wedge Q \supset R$$

(各列の文にはいかなる接続語句も現われていない。)しかし、明らかにこの文は恒真ではない。よって、われわれは命題論理で正しい推論を全て形式化できるわけではない。このため、「すべて」や「いくつかの」といった量に関わる表現-量化表現-を扱うような論理が必要になってくる。この目的のために考案されたのが量化学理論 quantification theory である。

1.0.1 述語と項

量化学理論が真理関数理論と根本的に異なる点の一つはどのような言語を扱っているかということである。量化学理論は、真理関数理論が基本単位として扱っていた要素文をさらにその部分へと分析する。典型的な要素文としては、しかじかの対象がしかじかの性質を所有するということを述べているような要素文が挙げられる。例えば、

例. イチローは大リーガーである。

この例文は、「イチロー」という名前を持つ対象が「大リーガーである」という述語によって表わされる性質を持つということを述べている。

このように、要素文は名前と述語の部分に分けられる。これが、推論に関わる限りでの要素文の形式的構造を考えるにあたって、一番のポイントになる。

形式論理学の観点から言うと、あるいは推論の形式化の目的にとっては、要素文がどのような形式的構造を持っているかということだけが重要なのであって、要素文が具体的にどのような内容を表わしているかということはどうでもよいことである。これをつきつめて考えると、名前や述語がどのような内容を持っているかということはどうでもよい。そこで、われわれは、「イチロー」や「大リーガーである」という具体的な日常表現をそのまま使うかわりに、形式的な表現を採用する。「大リーガー (である)」のような日常言語の述語のかわりに、述語記号 predicate symbol を採用する。述語記号として、

$$P, Q, R, \dots, P_1, P_2, P_3, \dots$$

を採用する。また、「イチロー」のような固有名詞のかわりに、個体定項 individual constant を採用する。個体定項としては、

$$c, d, e, \dots, c_1, c_2, c_3 \dots$$

を採用することにする。個体定項は形式言語に属する表現である。こうして、上の例文は形式的には以下のように表わされる。

$$Pc$$

これが表わしている内容は、 c (によって名指された対象) が P という性質を持っていることである。

要素文が名前 (項) と述語の部分に分けられると述べたが、この分析の仕方についてさらに詳しく見ていくことにしよう。従来の分け方は、この例文を、「西脇 与作」を主語、「教授である」を述語に持つような文であるとしてきた。より一般的には、要素文は主語と述語とに分けられるべきであるとしてきた。

例. 長島 茂雄は長島一茂の親である。

従来の方法によると、この文は「長島茂雄」を主語、「長島一茂の親である」を述語に持つ文として分析されるべきである。つまり、これは長島茂雄が長島一茂の親であるという性質を持っているということを述べる文であるとされてきた。しかし、推論の形式化の目的にとっては、そのような分析ではまったく不十分であることがわかっている。そこで、現代論理学の方法は、見方をさらに細かくして、この文が長島茂雄と長島一茂の間に一定の関係—親子関係—があるということを述べているとする。つまり、「長島茂雄」によって名指された対象が「長島一茂」によって名指された対象と親子の関係にあるということを述べているとするのである。

一項述語として理解した場合、

$$Ps$$

これに対して、二項述語として理解した場合、

$$P'sk$$

この P と P' は全く異なる構造を持った述語として理解されるべきである。

このように、要素文には、単にしかじかの対象がしかじかの性質を持つということを述べるものだけではなく、対象間の関係について述べるものも存在する。

各々の述語にはそれに固有の項の数が存在する。「与野市は大宮市と浦和市の間にある」という文には、「～の間にある」という三項述語が現われる。

一項の述語は対象についての何等かの性質に対応し、二項の述語は二つの対象の間に成り立つ何等かの関係に対応する。一般に、 n 項の述語は n 項の間の関係に対応する。

このように、要素文の形式的構造に関して重要な点は、その中に現われる述語が何項であるかということである。

2 量化理論の言語 QL

ここでは、量化理論の形式的言語 QL を厳密に定義する。

def 2.1 (QL の基本的語彙) 個体定項: a, b, c, \dots

個体変項: $x, y, z, \dots, x_1, x_2, x_3, \dots$

述語記号: $P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots$

論理結合子: $\neg, \supset, \wedge, \vee, \equiv$

量化記号: \forall, \exists

括弧: $(,)$

def 2.2 (QL の項) 1. 個体定項は項である。

2. 個体変項は項である。

3. 項は 1 と 2 のみによって作られる全てである。

def 2.3 (QL の論理式) 1. n -項述語 A について、 $A(t_1, \dots, t_n)$ は論理式である。ここで、 t_1, \dots, t_n は項である。

2. もし、 A, B が論理式であれば、 $(\neg A), (A \supset B), (A \wedge B), (A \vee B), (A \equiv B), (\forall x A), (\exists x A)$ もまた論理式である。

3. 論理式は 1 と 2 のみによって作られる全てである。

量化理論の言語は、真理関数理論の言語の拡張であると見なすことができる。真理関数理論で単に文記号として扱ってきたものを、量化理論では、さらに述語記号と項に分析するわけである。この論理式の定義に従うと、一項述語 P と Q について $\forall x(P(x) \supset Q(y))$ 、また三項述語 R について $R(x, a, c)$ は論理式である。これに対して、 $\forall P(x)$ は式ではない。式の中では、量化記号は必ず変項と組み合わせて使われなければならない。また、部分式という概念は真理関数理論の場合に準じて定義される。例えば、 $\forall x \exists y P(x, y)$ の部分式は、 $P(x, y)$ 、 $\exists y P(x, y)$ および $\forall x \exists y P(x, y)$ である。

2.1 量子子の作用域 scope

式 B の部分式 $\forall x A$ における量子子 $\forall x$ の作用域を A とする。量子子の作用域の狭さは否定のそれと同等であると決める。この点を考慮して括弧を外すことができる。したがって、例えば、

$$(1) \quad \forall x A \wedge B$$

は、

$$(2) \quad \forall x (A \wedge B)$$

ではなく、

$$(3) \quad (\forall x A) \wedge B$$

と理解されるべきである。したがって、式 (2) では、 $\forall x$ の作用域は $(A \wedge B)$ であり、式 (1) では、 A となる。

2.2 変項の束縛的現われと自由な現われ

このように量子子の作用域を定義した後で、量化理論にとって重要な概念、変項の束縛的現われ bound occurrence と自由な現われ free occurrence という概念を厳密に定義することにする。

1. 式 A 中の x の現われが A において自由である (free in A) のは、式 A 中の $\forall x$ や $\exists x$ という形の量子子の作用域の中にこの x が現われてこないときであり、またそのときに限る。
2. 式 A に $\forall x B$ あるいは $\exists x B$ という形の部分式があって、 x の現われが B で自由であるとき、この x の現われは $\forall x$ あるいは $\exists x$ という量子子によって束縛されている bound と言う。

ただし、量化記号の隣の変項について、それが自由であるとか、束縛されているとか言うことには意味がない。例を使ってこの違いを見ていくことにする。

$$(4) \quad \forall x P(x, y) \supset P(x, z)$$

$$(\forall x P(x, y)) \supset P(x, z)$$

という式では x の一番目の現われは、 $\forall x$ によって束縛され、 x の二番目の現われは自由である。他方、

$$(5) \quad \forall x (P(x, y) \supset P(x, z))$$

という式では、二つの x の現われが、同じ量子子 $\forall x$ によって束縛されている。さらに、

$$(6) \quad \forall x (P(x) \wedge \exists x (Q(x)))$$

ここでは、一番目の x の現われは $\forall x$ によって束縛され、二番目の x の現われは $\exists x$ によってのみ束縛されており、 $\forall x$ によって束縛されることはない。 $\exists x$ においてこの x の現われはもはや自由ではないからである。このように、定義によって、 x が異なる二つ以上の量子子によって束縛されることはない。もちろん、異なる二つ以上の変項の現われが同一の量子子によって束縛されることはある。

2.3 演習問題

1. 次の式で、変項がどのように (自由、束縛) 現われているかを示せ。

$$(a) \quad \forall x (P(x, x, y) \supset \exists z (Q(x, z)))$$

$$(b) \quad (\neg \exists x (\neg P(x, y))) \wedge R(z, x)$$

$$(c) \quad \exists x \forall y (P(x, y) \wedge Q(y, x))$$

量化文の典型的な例としては、次の4つが挙げられる。

全称肯定 A: 全ての A は B である $\forall x (A(x) \supset B(x))$

全称否定 E: 全ての A が B でない $\forall x (A(x) \supset \neg B(x))$

特称肯定 O: ある A は B である $\exists x (A(x) \wedge B(x))$

特称否定 I: ある A は B でない $\exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$

3 自然言語表現の QL への翻訳

まず、与えられた文の中に固有名詞や述語がないかどうかを調べる。固有名詞があったら、それを適当な個体定項で置き換え、述語があったら、それを式(命題関数)で置き換える。もちろん、異なる述語は異なる述語記号によって置き換え、異なる固有名詞は異なる個体定項によって置き換えなければならない。例えば、

例 1. 佐々木が歩いている。

この中に現われる述語と固有名詞はそれぞれ、「歩いている」と「佐々木」である。述語「歩いている」を述語記号 W で置き換え、「佐々木」を適当な個体定項 a で置き換えてやると、最終的な翻訳は以下になる。

$$Wa$$

例 2. 木村は背の高い学生である。

これが意味していることは、「木村は背が高く、かつ学生である」ということであるから、「木村」を a 、「背が高い」を T 、「学生である」を S で置きかえると、最終的には、これは以下の式に翻訳される。

$$Ta \wedge Sa$$

これから量化表現が現われる文の翻訳を考察していく。

例 3. 犬がいる。

これは「犬であるようなものが存在する」という意味である。この文の中には固有名詞は存在しない。この文の中に現われる述語は「 x は犬である」だけである。これを述語記号 D で置き換える。あるいは、 x は犬である」と最初から命題関数に直して、 Dx で置き換えるほうがわかりやすい。そして、存在するという意味は存在量子 $\exists x$ によって表現されるから、例 3 は、

$$\exists x Dx$$

と翻訳される。

例 4.(二項述語) 林は佐々木より頭のよい学生だ。

まず、「学生だ」を一項述語 $S(x)$ 、「より頭のよい」を二項述語 $W(x, y)$ でそれぞれ表す。林と佐々木という固有名詞は、それぞれ h 、 s で表す。すると、文は、 $S(h) \wedge W(h, s)$ となる。ここで、翻訳文の中の h を x に置き換え、 $S(x) \wedge W(x, s)$ という命題関数を作っておく。

例 5. 川田はピカソの絵を持っている。

もちろん、川田が持っているピカソの絵は一枚とは限らない。そこで、上記を「川田はピカソの絵を何枚か持っている」に置きなおす。実は、この文の中に 2 つの二項述語が含まれていることに注目したい。つまり、 x は y の描いた絵であることを $P(x, y)$ 、 x は y を持っているを $H(x, y)$ とおく。川田を k 、ピカソを p と置くと、 $\exists y (H(k, y) \wedge P(y, p))$ となる。

例 6. ピカソの絵を持っているものはみな金持ちだ。

x は金持ちであることを Rx と置く。 x はピカソの絵を持っているは、先ほどの k を x に替えて $\exists y (H(x, y) \wedge P(y, p))$ とすればよい。よって、 $\forall x (\exists y (H(x, y) \wedge P(y, p)) \rightarrow R(x))$ となる。

例 7. 全ての男性は石黒が好きである。

石黒を i と置く。 x は石黒が好きであるは、 $L(x, i)$ となる。 よって、例 7 は、 $\forall x(M(x) \rightarrow L(x, i))$ となる。

例 8. 全ての男性が好きになる女性がいる。(男性が女性を好きになる、という意味。その逆ではない。)

例 9. 全ての男性には好きな女性がいる。

3.1 演習問題

1. 次の日本語の文を論理式に翻訳せよ。

- (a) 空を飛べる哺乳類が存在する¹。
- (b) 光合成をしない植物は存在しない。
- (c) アメリカ人がみなハンバーガーが好きとは限らない。
- (d) 日本人だけが米食だ²。
- (e) どのカップルも映画が 1000 円で観られる³。
- (f) 全ての女性が好きなのは全ての女性に好かれない(嫌われる)⁴。
- (g) どの 2 つの有理数にもその間にある有理数が存在する⁵。

¹ 空を飛べるを $F(x)$ 、哺乳類であるを $M(x)$ とおく。

² 日本人であるを $J(x)$ 、米食だを $R(x)$ とおく。

³ x と y はカップルであるを $C(x, y)$ 、映画が 1000 円で観られるを $T(x)$ とおく。

⁴ x は y が好きであるを $L(x, y)$ 、男性であるを $M(x)$ 、女性であるを $F(x)$ とおく。

⁵ 有理数であるを $R(x)$ 、 x は y と z の間にあるを $B(x, y, z)$ とおく。