第１回レポート問題 (4/20 出題分) の解答例

問 (教科書 p. 7, 問 1.10)

自然数 n に対して, $z^n = 1$ を満たす複素数 z は

$$z = 1,\ e^{i(2\pi/n)},\ e^{i(4\pi/n)},\ \dots\ ,\ e^{i(2(n-1)\pi/n)}$$

の n 個であることを示せ.

解答

$z^n = 1$ とする. $|z| = r$, $\arg z = \theta$ とおいて $z = re^{i\theta}$ と表したとき, $z^n = r^n e^{i(n\theta)}$ であるから, $1 = e^{i(2k\pi)} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ に注意すると,

$$r^n = 1\ (r \geq 1), \quad n\theta = 2k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

つまり r, θ は

$$r = 1, \quad \theta = 2k\pi/n\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

を満たしていなくてはならない. ここで, 整数 m, l を $k = nm + l$ となるようにとれば

$$2k\pi/n = 2l\pi/n + 2m\pi \text{ したがって, } e^{i(2k\pi/n)} = e^{i(2l\pi/n)}\underbrace{e^{i(2m\pi)}}_{1} = e^{i(2l\pi/n)}.$$

l は k を n で割ったあまりとみなせるので 0, 1, ... ,$n-1$ のいずれかにとれる. よって, $z = e^{i(2k\pi/n)}$ という形の複素数は

$$1 = e^{i0},\ e^{i(2\pi/n)},\ e^{i(4\pi/n)},\ \dots\ ,\ e^{i(2(n-1)\pi/n)}$$

のいずれかと等しい. またこれら n 個の複素数は偏角が異なるので互いに異なる. よって, $z^n = 1$ を満たす複素数はこれら n 個に限る.

(注意.) $e^{i(2k\pi/n)}$ が上の n 個のいずれかに等しい, ということの理由が説明されていない解答が多かった. この部分をきちんと書かなくては正解にはならないので注意すること. その際に重要なのは「$e^{i(2k\pi/n)}$ と表される複素数のうちで偏角が 2π の整数倍異なる複素数同士は等しい」ということで, このことから 0 と 2π の間に偏角をとればよいことが導かれる. この説明なしに「$0 \leq \theta < 2\pi$ となるように偏角を選べば…」とした解答では不十分である.

問 (教科書 p. 7, 問 1.11)

z を 0 とは異なる複素数とする. 複素平面上で z を 0 のまわりに角 θ だけ回転した点を z_1 とすると, z_1 は $z_1 = ze^{i\theta}$ と表されることを示せ.

解答

$|z| = r$, $\arg z = \omega$ とし, $z = re^{i\omega}$ と表す. z を 0 のまわりに角 θ 回転させて得られる複素数 z_1 の偏角は

$$\arg z_1 = \arg z + \theta = \omega + \theta$$

である. 回転によって絶対値 (0 からの距離) は不変だから $|z_1| = r$. よって, $z_1 = re^{i(\omega+\theta)}$ である. 指数法則を用いれば, これは

$$z_1 = re^{i\omega}e^{i\theta} = ze^{i\theta}$$

となる.

要望があったので, 一応, 教科書の問 1.11 の解答をつけておく.

問 1.11 の解答

z を α のまわりに角度 θ 回転させることを, 次のような変換の組み合わせとして表すことができる.

(1) z を複素平面上で $-\alpha$ 平行移動し, $z-\alpha$ とする. (この平行移動で α は 0 にうつる.)

(2) 0 のまわりに $z-\alpha$ を角度 θ 回転させる. このとき, $\alpha=0$ の場合の上の解答から $z-\alpha$ は $(z-\alpha)e^{i\theta}$ に移される.

(3) α 平行移動して元に戻し, $(z-\alpha)e^{i\theta}+\alpha$ を得る. これが求める z_1 である. (この平行移動で 0 に移っていた α は α に戻る.)

第 2 回レポート問題 (4/27 出題分) の解答例

問 (教科書 p. 15, 問 2.6)

${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成り立つことを示せ.

解答

$(A = [a_{ij}]$ を $m \times n$ 行列, $B = [b_{ij}]$ を $n \times p$ 行列とする. このとき, A と B の積 AB が定義され, $AB = C = [c_{ij}]$ とすると,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, p$$

となっている. ${}^t(AB) = {}^tC = [c'_{ij}]$ と表すことにすると, 転置行列の定義から $c'_{ij} = c_{ji}$ である. したがって, ${}^t(AB)$ の (i, j) 成分 c'_{ij} は

$$c'_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, p \tag{1}$$

と表される. 一方, ${}^tA = [a'_{ij}]$, ${}^tB = [b'_{ij}]$ と表すことにすると, $a'_{ij} = a_{ji}$, $b'_{ij} = b_{ji}$ である. また, ${}^tB\,{}^tA = D = [d_{ij}]$ と表すことにすると, D の (i, j) 成分 d_{ij} は

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik}a'_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, p \tag{2}$$

と表される.

(1) と (2) を比較すれば, 任意の i, j に対し $c'_{ij} = d_{ij}$ が成り立っていることがわかる. すなわち ${}^tC = D$ である. これが示すべきことであった. □

注意. 提出された解答の中に

$$AB = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

と書かれたものが多数あったが, これは間違い. 正しくは

$$AB \text{ の } (i, j) \text{ 成分} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

である.

問 (教科書 p. 18, 問 2.10)

2 次直交行列 T は, ある実数 α によって

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

と表されることを示せ.

解答

$T = [\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}]$ と表したとき, 教科書 (2.8) 式によれば,

$${}^tTT = I \iff {}^t\mathbf{u_i}\mathbf{u_j} = \delta_{ij}$$

内積が0

であった．これは 2 次列ベクトル $\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ がそれぞれ長さ 1 のベクトルで，かつ互いに直交することを意味している．

$\mathbf{u}_1$ を (x, y) 平面におけるベクトルとみなしたとき，x 軸から反時計回りに計った角が α であったとする．このとき，$\mathbf{u}_1$ の長さは 1 なので，

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

と表される (各自確かめること)．$\mathbf{u}_2 = {}^t[x, y]$ とおいたとき，$\mathbf{u}_2$ の満たすべき条件は

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha = \cancel{1}\ 0 & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

である．(2) 式からある実数 β により，$x = \cos\beta$, $y = \sin\beta$ と表されることが $\mathbf{u}_1$ の場合と同様にしてわかる．これを (1) 式に代入して加法定理を用いれば，

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) = 0$$

となる．$0 \leq \alpha - \beta < 2\pi$ の範囲で考えれば十分なので，

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{または} \quad \frac{3\pi}{2},$$

すなわち

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{2} \quad \text{または} \quad \alpha - \frac{3\pi}{2}$$

を得る (この部分は幾何学的に「$\mathbf{u}_1$ と $\mathbf{u}_2$ のなす角度が $\frac{\pi}{2}$ だから」という説明でも構わない)．再び加法定理を用いれば

$$\begin{cases} \cos\beta = \sin\alpha,\ \sin\beta = -\cos\alpha & \beta = \alpha - \frac{\pi}{2} \text{のとき}, \\ \cos\beta = -\sin\alpha,\ \sin\beta = \cos\alpha & \beta = \alpha - \frac{3\pi}{2} \text{のとき} \end{cases}$$

となることがわかる．つまり

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$$

である．$T = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$ であったので，

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

が示された． □

注意. 「問にあるような形で与えられる行列 T が直交行列になる」ということを示している解答が多かったが，問題は逆を問うているので注意．また，2 次の直交行列が**すべて**問にあるような形に表せることを示さなくてはいけないのに，その議論が不十分な解答も散見された．自分の書いた解答とこの解答例を比較してよくチェックしてほしい．

第3回レポート問題 (5/18出題分) の解答例

問 1

$\mathbb{R}^3$ の部分空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad W_2 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

で与えたとき, $W_1 = W_2$ が成り立つことを示せ.

解答

まず, $W_1 \subset W_2$ を示す. 任意に $\mathbf{v} \in W_1$ をとる. W_1 の定義から, ある実数 c_1, c_2 により $\mathbf{v}$ は

$$\mathbf{v} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表される. これを

$$\mathbf{v} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (c_2 - c_1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と変形すると, 最後の辺は $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の一次結合になっている. よって, $\mathbf{v} \in W_2$. $\mathbf{v}$ は任意だったので $W_1 \subset W_2$.

次に $W_1 \supset W_2$ を示す. 任意に $\mathbf{u} \in W_2$ をとる. W_2 の定義から, ある実数 d_1 d_2 により $\mathbf{u}$ は

$$\mathbf{u} = d_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表せる. これを

$$\mathbf{u} = d_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (d_1 + d_2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と変形すると, 最後の辺は $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の一次結合になっている. よって, $\mathbf{u} \in W_1$. $\mathbf{u}$ は任意だったので $W_2 \subset W_1$. 上で示した $W_1 \subset W_2$ と合わせて $W_1 = W_2$ がしたがう. □

注意. 講義の際に注意したように, この問は命題 2.2 などを使わずに定義に戻って証明してほしい. また,

$$\mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

というような書き方をしている解答が散見されたが, これは間違いである. 左辺は集合, 右辺はその集合の元であるから, 「$=$」ではなく「$\ni$」でなくてはならない.

問 2

$\mathbf{y}_1,\ \ldots,\ \mathbf{y}_r \in V^n$ とする. $\{\mathbf{y}_1,\ \ldots,\ \mathbf{y}_r\}$ が一次独立系ならば $\{\mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2\}$ も一次独立系になっていることを示せ.

解答

$\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ の間の任意の一次関係

$$c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 = \mathbf{0} \tag{1}$$

が与えられたとき, $\mathbf{y}_j$ $(j = 3, \ldots, r)$ を 0 倍して加えた

$$c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + 0\mathbf{y}_3 + \cdots + 0\mathbf{y}_r = \mathbf{0} \tag{2}$$

は $\mathbf{y}_1,\ \ldots,\ \mathbf{y}_r$ の間の一次関係である. $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r\}$ は一次独立系だったので, (2) の一次関係は自明である. したがって, とくに $c_1 = c_2 = 0$ でなくてはならない. すなわち, (1) の $\mathbf{y}_1$ と $\mathbf{y}_2$ の間の一次関係も自明. 一次関係 (1) は任意だったので, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ は一次独立である. □

注意. 肝心な部分を「明らか」ですませてしまっている解答が多かったが, 「明らか」なら簡単に証明できるはず. 当たり前に見えることをきちんと数学の言葉に直す能力は, 数学を使うときに必要になる. こういうときに練習しておくと良い.