数学 A2 試験問題 (2010.6.8)　担当: 井関裕靖

注意事項

- 問題は 4 問あります．印刷が不鮮明な場合は申し出て下さい．
- 答案用紙は各自一枚ずつです．追加はありません．表裏の両面を使って構いませんが，一枚に収まるように解答のレイアウトを工夫して下さい．
- 答案用紙は OCR 処理します．学籍番号は答案用紙の上にある記入例にしたがって，丁寧に記入して下さい．
- 持ち込みは不可です．教科書，ノートは (もちろん他の人の答案も) 見てはいけません．

$\boxed{1}$ (10 点)　$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ を V^n の一次独立なベクトルの組とする．$\mathbf{x} \in \mathrm{Span}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ を $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r$ の一次結合として表す仕方はただ一通りであることを示せ．

$\boxed{2}$ (10 点)　A を $m \times n$ 行列，B を $n \times p$ 行列とする．このとき ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{3}$ (15 点)　線形写像 $L\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ が

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

を満たしているとする．このとき，$L_A = L$ となる 2×2 行列 A を求めよ．
(注意.) L_A は $L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ で定義される写像である．

$\boxed{4}$ (15 点)　$\mathbb{R}^3$ の部分ベクトル空間

$$W = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

を考える．$\mathbb{R}^3$ の二つのベクトルの組

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

が W の基底になっていることを示せ．