第１回　化学Ａ演習　2014/05/23

<u>※学籍番号・クラス・名前を明記すること</u>

【問】以下の問いに答えなさい。

必要なら次の定数を用いてよい。

プランク定数 $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js, 電子の電荷 $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C

光速 $c = 2.998 \times 10^{3}$ ms^{-1}, 電子の質量 $m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg

1. 光の粒子性

金属表面にある一定以下の波長の光を当てると電子（光電子）が飛び出る。この現象は光電効果と呼ばれる。いま、ある金属表面に波長 252 nm の光を照射したところ、飛び出た電子のエネルギーは 3.65 eV であった。この金属の仕事関数を eV 単位で求めなさい(導出過程を示すこと)。

【ヒント】

・波長 λ [m]の光のエネルギー ε [J]は、Einstein の光量子説より

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (h\text{: プランク定数}, \quad c\text{: 光速})$$

・1 eV は電子 1 個が 1 V の電位差で加速されたときに得るエネルギーである

2. 電子の波動性：以下の文章を読み、$\boxed{（ア）}$～$\boxed{（ウ）}$には式を、$\boxed{（エ）}$には<u>数値と単位(導出過程を示すこと)</u>を、$\boxed{（オ）}$には語句をそれぞれ回答しなさい。

速度 0 の電子が電位差 Vで加速されたとき、その運動エネルギー$(1/2)m_e v^2$は Vを用いて$\boxed{（ア）}$であるので、その運動量pは Vを用いて$\boxed{（イ）}$と書ける。この加速された電子を入射角θでニッケル単結晶に照射して、反射角θで反射電子の強度を観測した。この電子を物質波と考えると、反射電子の強度が強くなる際の物質波の波長λは、Bragg の反射条件から、結晶の格子間隔dと整数nを用いて$\lambda =$$\boxed{（ウ）}$と書ける。Davisson と Germer の実験では、電位差 Vの平方根$\sqrt{V}$を横軸に、散乱電子の強度を縦軸にとると、散乱電子強度は等間隔の$\sqrt{V}$に対して強くなり、$\sqrt{V}/n = 3.00$（単位：$V^{1/2}$）を満たした。この結果から、ニッケル格子間隔$d = 2.03 \times 10^{-10}$ m、入射角、散乱角をともに$80.0°$として、運動量pと波長λの積を求めると、その値は$\boxed{（エ）}$(有効数字 3 桁)である。この大きさは$\boxed{（オ）}$の大きさにほぼ等しい。

3. 水素原子について：以下の$\boxed{（カ）}$～$\boxed{（ケ）}$に適切な語句、数値を答えなさい。

水素原子の中の電子は、3 つの量子数n, l, mによって記述される。$n = 2$の状態の水素原子では、$\boxed{（カ）}$種類のlの値をとり、その軌道は全部で$\boxed{（キ）}$重に縮重している。これに磁場を加えると、$\boxed{（ク）}$$= \pm 1$に対応する軌道のエネルギー準位が変化する。このような現象は$\boxed{（ケ）}$と呼ばれる。

第１回 化学Ａ（化学科 中嶋教授）演習 2014 /05 /23　解答　　　作成：中嶋研修士１年　川﨑健志郎

1. 光の粒子性

【解答・解説】

仕事関数とは、金属内の自由電子が金属表面から飛び出すのに必要な最小エネルギーである。波長λの光のエネルギーεは、Einstein の光量子説より

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (h\text{: プランク定数,} \quad c\text{: 光速})$$

と表されるので、波長 252 nm の光のエネルギーは以下のように計算できる。

$$\varepsilon = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}) \times (2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}})}{252 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}} = 7.88_3 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

ここで、1 eV は電子１個が１V の電位差で加速されたときに得るエネルギーであるから、

$$1\ \mathrm{eV} = (1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(1\ \mathrm{V}) = 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C \cdot V} = 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

の関係が成り立つ。したがって、求めたエネルギーを eV 単位に換算すると、以下のように求まる。

$$(7.88_3 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}) \times \left(\frac{1\ \mathrm{eV}}{1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}}\right) = 4.92_1\ \mathrm{eV}$$

よって求める仕事関数は

$$4.92_1\ \mathrm{eV} - 3.65\ \mathrm{eV} = 1.27_1\ \mathrm{eV} \cong 1.27\ \mathrm{eV}$$

2. 電子の波動性

【解答・解説】

(ア) 電荷 1C の粒子が電位１V で加速されたときの運動エネルギーが１J であるから

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 = eV$$

(イ) 運動エネルギーEは、運動量pを用いて、以下のように表せる。

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2m_e}({m_e}^2 v^2) = \frac{p^2}{2m_e}$$

よって、(ア)と合わせて考えると

$$E = \frac{p^2}{2m_e} = eV$$

$$\therefore p = \sqrt{2m_e eV}$$

(ウ) Bragg の反射条件

$$2d \sin\theta = n\lambda$$

を変形して

$$\lambda = \frac{2d \sin\theta}{n}$$

(エ) 運動量pと波長λの積は、それぞれ(イ)、(ウ)の表記を用いると以下のように表せる。

$$p \times \lambda = \sqrt{2m_e eV} \times \frac{2d\sin\theta}{n} = \sqrt{2m_e e} \times 2d\sin\theta \times \frac{\sqrt{V}}{n}$$

いま、$\sqrt{V}/n = 3.00\ \mathrm{V}^{1/2}$であるから、

$$\sqrt{2(9.109\times10^{-31}\ \mathrm{kg})(1.602\times10^{-19}\ \mathrm{C})} \times 2(2.03\times10^{-10}\ \mathrm{m})\sin 80.0° \times 3.00\ \mathrm{V}^{1/2}$$
$$\cong 6.48\times10^{-34}\ \mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$$

(オ) プランク定数

3. 水素原子について

【解答】(カ) 2　(キ) 4　(ク) m または磁気量子数　(ケ) ゼーマン効果

【解説】

(カ)、(キ)　設問中の 3 種類の量子数について、

$$\begin{cases} n = 1,2,3,\cdots\ (\text{主量子数}) \\ l = 0,1,2,\cdots,n-1\ (\text{方位量子数}) \\ m = 0,\pm1,\pm2,\cdots\pm l\ (\text{磁気量子数}) \end{cases}$$

という条件がある。よって、量子数の組み合わせを(n,l,m)と書くと、$n=2$では$l=0,1$の 2 種類の値をとることができる。とりうる(n,l,m)の組み合わせを全て書くと

(2, 0, 0)　: 2s 軌道

(2, 1, 1), (2, 1, 0), (2, 1, -1)　: 2p 軌道

であり、水素原子の電子がもつエネルギーは主量子数nにのみ依存するので、4 重に縮重していることになる。

(ク)、(ケ)　磁場中では磁気量子数mの違いによって縮退が解けるので（ゼーマン効果）、$n=2,\ l=1$の一重線は、$m=0,\pm1$の 3 本に分裂する。

――――――――――――――

参考：化学 A 過去問ページ　http://www.chem.keio.ac.jp/info/class/detail_145.html