慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	~~50分~~	90
採点欄	84	※

平成 8 年 7 月 18 日（木）5 時限施行		理工 学部 学科 1 年 X 組 19 番	
担当者名	数学 A1 担当者全員	学籍番号	6 9 6 1 4 5 8 7
科目名	数学 A1	氏名	田村友紀
指示事項	持込 可（ ） 不可	答案用紙 要（B4大 B5小）不要 計算用紙 要（回収一要・不要） 不要	

15

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos x-e^{x^2}+1}{x^n}$ が $0, \pm\infty$ 以外の値を持つように n を定め、その時の極限値を求めよ。 ロピタルやなくてマクローリン展開

$f(x)=\sqrt{1+x^2}-\cos x-e^{x^2}+1$ とおく

$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\sin x-2xe^{x^2}$

$f'(0)=0$

$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x^2}{(\sqrt{1+x^2})^3}+\cos x-2e^{x^2}-4x^2e^{x^2}$

$=\frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}(1-x^2)+\cos x-2e^{x^2}(1+2x^2)$

$f'''(x)=-\frac{3x(1-x^2)}{(\sqrt{1+x^2})^5}-\frac{2x}{(\sqrt{1+x^2})^3}-\sin x-4xe^{x^2}(1+2x^2)-8xe^{x^2}$

$=\frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^5}(3x^3-3x-2x-2x^3)-\sin x-4xe^{x^2}(1+2x+2x^2)$

$f'''(x)=\frac{x^3-5x}{(\sqrt{1+x^2})^5}-\sin x-4xe^{x^2}(1+2x+2x^2)$

$f^{(4)}(x)=\frac{3x^2-5}{(\sqrt{1+x^2})^5}-\frac{5(x^3-5x)x}{(\sqrt{1+x^2})^7}-\cos x-4e^{x^2}(1+2x+2x^2)-8xe^{x^2}(1+2x+2x^2)x$

$=\frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^7}(3x^2-5+3x^4-5x^2-5x^4+25x^2)-\cos x-4e^{x^2}(1+2x+2x^2+2x\cdots)$

$=\frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^7}(-2x^4+23x^2-5)-\cos x-4e^{x^2}(1+8x+10x^2+4x^3)$

$f^{(4)}(0)=-2$

従って ロピタルの定理より $n=4$, 極限値 $=-\frac{\ }{4}$

答 $n=4$, 極限値

$n=4$, $-\frac{2}{3}$

34
50

合格

2. 15

$f(u,v)$ を C^1-級の関数とし $g(x,y)=f(\log\sqrt{1+x^2}, e^x\sin y^2)$ とおくとき $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ と $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ を f の偏微分と x, y の関数で表せ。

$u=\log\sqrt{1+x^2}$ とおくと $\frac{du}{dx}=\frac{x}{1+x^2}$

$v=e^x\sin y^2$ とおくと $\frac{dv}{dx}=e^x(\sin y^2+\frac{dy}{dx}\cdot 2y\cos y^2)$

$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial f(\log\sqrt{1+x^2}, e^x\sin y^2)}{\partial x}=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

$=f_u\times\frac{x}{1+x^2}+f_v e^x(\sin y^2+\frac{dy}{dx}\cdot 2y\cos y^2)$

$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial f(\log\sqrt{1+x^2}, e^x\sin y^2)}{\partial y}=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$

$=f_v\times 2y\cos y^2$

3. $f(x,y)=8x^3-12x^2y+6xy^2-18xy+9y^2$ とする。

20 (1) f の停留点をすべて求めよ。

(2) f のヘシアンを求め、停留点がそれぞれ極大点、極小点、鞍点のいずれであるか判定せよ。

(1) $f_x=24x^2-24xy+6y^2-18y=6(4x^2-4xy+y^2-3y)$

$f_y=-12x^2+12xy-18x+18y=6(-2x^2+2xy-3x+3y)$

$f_x=0$, $f_y=0$ より $y^2+3y-6x=0$ ∴ $x=\frac{y^2+3y}{6}$

$(2x-y)^2-3y=(\frac{1}{3}y^2+y-y)^2-3y=\frac{1}{9}y^4-3y=\frac{y}{9}(y^3-27)=0$

$y=0, 3$ より

よって $(x,y)=(0,0),(3,3)$

答 $(x,y)=(0,0),(3,3)$

(2) $f_{xx}=48x-24y=24(2x-y)$

$f_{xy}=f_{yx}=-24x+12y-18=6(-4x+2y-3)$

$f_{yy}=12x+18=6(2x+3)$

従ってヘッセ行列 H は、

$H=\begin{pmatrix}24(2x-y) & 6(-4x+2y-3)\\ 6(-4x+2y-3) & 6(2x+3)\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}4(2x\cdots & \\ \cdots & \end{pmatrix}$

$(x,y)=(0,0)$ のとき

$H=6\begin{pmatrix}0 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix}$

$f_{xx}=0$ より $(x,y)=(0,0)$ は鞍点

$(x,y)=(3,3)$ のとき

$H=6\begin{pmatrix}12 & -9\\ -9 & 9\end{pmatrix}=18\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix}$

$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=12-9-3>0$

$f_{xx}>0$ より、$(x,y)=(3,3)$ は極小点。