慶應義塾大学試験問題　　物理学D

2009年1月 24 日(土) 3 時限（試験時間 50分）　　問題用紙　回収不要

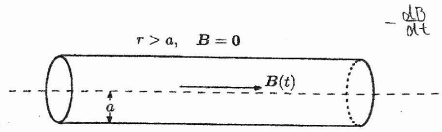
担当者　小原，神成，高野、日向

注意：とくに指示がない場合、答案には結果のみならず、それを導いた過程についても記すこと。 また、万一与えられた条件だけでは解けない場合には、適当な量を定義したり，条件を明記した上で解いてよい。ただし、真空の誘電率 ε_0、透磁率 μ_0 は断りなしに使ってよい。

問題 I　導体でできた半径 a の無限に長い円柱棒がある。その中心軸に平行に磁界を加えて，導体内の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を一定の割合 $dB/dt = \beta$ で大きさを増していく。導体の外部の磁束密度は零に保つとする。

$- \frac{dB}{dt}$

$\mathrm{rot}\,E = -\frac{dB}{dt}$



E

導体棒の中心軸からの距離を r として、この磁界により導体内 $(r \leq a)$ および導体外部 $(r > a)$ で誘導される電界の大きさをそれぞれ求めなさい。
（注意：渦電流の作る磁界は時間に依らない。）

問題 II　以下の問で用いられる関数 $f(x), g(x)$ は、２回以上微分可能である。また、$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ は座標単位ベクトルであり、解答に必要ならばこれらを用いよ。

(1) 電界ベクトルが $\boldsymbol{E} = f(y - vt)\boldsymbol{e}_z$ であるとする。$\boldsymbol{E}$ が波動方程式 $\triangle \boldsymbol{E} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{E}$ を満たすことより、$v > 0$ を決定しなさい。ここで $\triangle = \nabla^2$ はラプラシアンである。

(2) 電界ベクトルが重ね合わせ

$$\boldsymbol{E} = f(y - vt)\boldsymbol{e}_z + g(z - vt)\boldsymbol{e}_x$$

$\nabla\phi$
$\triangle\phi$

であるとする。この v は (1) で求めている。各電磁波の進行方向の単位ベクトルを $\hat{k}$ とすると、磁束密度は、$\frac{1}{v}\hat{k} \times \boldsymbol{E}$ と表わされるベクトル場の重ね合わせである。磁束密度 $\boldsymbol{B}$ を求めなさい。

$k_y E_z$

(3) (2) で求めた電磁波のエネルギー密度を求めなさい。ただし、v には (1) で求めた結果を代入して答えなさい。

(4) (2) で求めた電磁波のポインティングベクトルを求めなさい。ただし、v には (1) で求めた結果を代入して答えなさい。

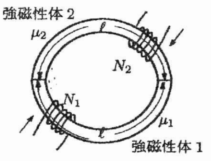
1　$g(z-vt)$
1　0
1　$f(y-vt)$

問題 III　以下の問に答えなさい。

(1) 真空から電界 $\boldsymbol{E}$ が誘電率 ε の誘電体の平らな表面に印加している．$\boldsymbol{E}$ の大きさは E であり、電界と境界面の法線のなす角度を θ とする。誘電体表面の真電荷面密度は零であるとする。誘電体の内部での電界の大きさ E' および、この電界と境界面の法線のなす角度を θ' とする。E' が満たすべき境界条件（２条件）を記しなさい。そして、$\tan\theta'$ を求めなさい。

(2) 誘電率 ε の無限に大きな誘電体の内部に、半径 a の球状の空洞を空け、この球の中心に点電荷 q を置く。空洞内は真空とする。点電荷からの距離 r の関数として、この点電荷の作る電束密度および電界の大きさを、$r < a$ および $r > a$ に分けて求めなさい。

問題 IV　図のように長さ ℓ の半円で、その断面積が S、透磁率が μ_1 の強磁性体１と、同じ形状で透磁率が μ_2 の強磁性体２から成る円環状の電磁石がある。強磁性体１には N_1 回コイルが、強磁性体２には N_2 回コイルが巻いてある。磁束線は強磁性体から外部に漏れることはないものと考えてよい。以下の問に答えなさい。



$B = \mu_0 H$

(1)　コイル１とコイル２にそれぞれ同じ大きさの電流 I を、図に示す矢印の方向に流した。強磁性体内部の磁束密度の大きさを求めなさい。

(2)　この２つのコイルの間の相互インダクタンスを求めなさい。

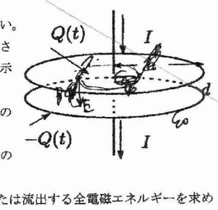
問題 V　誘電率が ε で、透磁率が μ である物質中では、電界ベクトル $\boldsymbol{E}$ と電束密度 $\boldsymbol{D}$、および、磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と磁界の強さ $\boldsymbol{H}$ の間には、$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ が成り立つことは既知とする。
$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}$ が従う物質中のマクスウェルの方程式をすべて（４個の式）を書きなさい。ただし、真電荷密度を ρ_t、真電流密度を $\boldsymbol{i}_t$ とする。

$\mathrm{rot}\,H = i_t + \frac{\partial D}{\partial t}$　M.A
$\mathrm{rot}\,E = -\frac{\partial B}{\partial t}$　F
$\mathrm{div}\,B = 0$　P.G
$\mathrm{div}\,D = \rho_t$　G

2007 年度物理学 D 期末試験問題

問題 I　図のように半径 a の円板を極板とするコンデンサーに、一定の電流 I が流れているとする。極板間も外部の空間も真空であるとする。中心軸からの距離を r とし、時刻 t で極板に溜まっている電荷を Q(t)とする。極板間の距離 d は小さく電界の外部への漏れは小さく無視できると仮定する。以下の問に答えなさい。

(1)時刻 t での極板間の電界の大きさを求めなさい。
(2)変位電流（密度）の大きさを求めなさい。さらに全変位電流が流入電流 I に等しいことを示しなさい。
(3)中心軸から距離 r, (r≦a)だけ離れた場所での磁束密度の大きさを求めなさい。
(4)ポインティングベクトルの大きさを求め、どの方向を向いているか記しなさい。
(5)単位時間当たりに、r＝a の側面で流入、または流出する全電磁エネルギーを求めなさい。



問題 II　z<0 の空間が真空であり、z>0 の空間が完全導体で満たされ、z<0 から、この導体表面（z＝0）に垂直に電磁波が入射する。完全導体では抵抗率が零であるから、導体内部の電界は零となる。以下の解答には座標単位ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ を用いよ。

(1)入射波の電界を $\mathbf{E}^i = f(z - ct)\ \mathbf{e}_x$ とする。$f(\omega)$は 2 回以上微分可能な関数である。反射波の電界を $\mathbf{E}^r = g(z + ct)\ \mathbf{e}_x$ とする。全電界は $\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}^i(z,t) + \mathbf{E}^r(z,t)$ である。電界の境界条件を記しなさい。この条件を考慮して、g(z＋ct)を関数 f を用いて表しなさい。

(2)磁束密度は、電磁波の進行方向の単位ベクトルを $\hat{k}$ と表すと $\mathbf{B} = \frac{1}{c}\hat{k} \times \mathbf{E}$ となる。
これより入射波および反射波の磁束密度 $\mathbf{B}^i$、$\mathbf{B}^r$ を f と座標単位ベクトルを用いて表しなさい。

問題 III　真空中に電荷密度 ρ(r,t)と電流密度 i(r,t) がある場合に、電界ベクトル E と磁束密度 B が従うマクスウェル方程式（微分形)をすべて（4 個の式)を書き、各々の式が表す法則名を記しなさい。

問題 IV　平行平板コンデンサーを考える。極板間の距離は d、両極板の面積はおのおの S である。一方の極板からの距離を x とすると、極板間 0<x<d には誘電率が

$$\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon_0}{A + Bx/d}$$

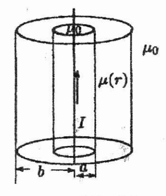
と変化している誘電体が充填されている。ここで A,B は定数である。端からの電界の漏れはないとする。

(1)x＝d にある極板に電荷 Q、x＝0 にある極板に電荷－Q を与える。このときの電束密度 D を求めなさい。
(2)電界の強さおよび電位を求め、このコンデンサーの電気容量を決定しなさい。

問題 V　直線状の導線に定常電流 I が流れている。この導線を中心軸とした磁性体が、内径 a と外径 b の円筒状に図のように分布している。中心軸からの距離を変数 r で表す。磁性体の内側 (r<a)および外側 (r>b)の空間は真空である。真空の透磁率は μ_0 であり、a<r<b の領域にある磁性体の透磁率は r により変化し、μ(r)であるとする。以下の問に答えなさい。

H.B.

(1)各領域 r≦a, a≦r≦b, b≦r における、磁界の強さ、および磁束密度の大きさを求めなさい。
(2)r＝a、および r＝b での磁性体の境界面に流れる磁化面電流密度の大きさ、および全磁化電流の大きさを求めなさい。さらに $\mu(r) > \mu_0$, (a≦r≦b)とするとき、各々の電流の方向と中心軸の電流の方向の関係を示しなさい。



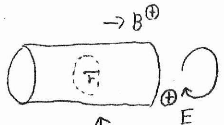
$\oint B\,ds = \mu_0 \iint i\,dS$

ただし、磁化面電流密度ベクトル $\mathbf{I}_m$ は、磁化ベクトル $\mathbf{J} = \mathbf{B} - \mu_0\mathbf{H}$ を用いると、n を磁性体表面から磁性体の外部に向かっての法線ベクトルとして、$\mathbf{I}_m = \mathbf{J} \times \mathbf{n} / \mu_0$ で与えられる。

$B - \mu_0 H \times n/\mu_0$

2009 物理D

問題I



$r \leq a$ では

$$\oint E\,ds = \iint -\frac{\partial B}{\partial t}\,ds$$

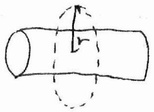
E, Bの正方向
使う閉曲面

$$2\pi r E = -\pi r^2 \beta$$

$$E = -\frac{r}{2}\beta$$

$$\therefore |E| = \frac{r}{2}\beta$$

$r > a$ では
右図のような
閉曲面をとり



$$\oint E\,ds = \iint -\frac{\partial B}{\partial t}\,ds$$

$$2\pi r E = -\pi a^2 \beta$$

$$E = -\frac{a^2}{2r}\beta$$

$$\therefore |E| = \frac{a^2}{2r}\beta$$

問題II

(1) $\Delta E = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E$ より

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} E_z = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_z$$

$$f''(y - vt) = \varepsilon_0 \mu_0 v^2 f''(y - vt)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

(2) $f(y-vt)e_z$ の項と $g(z-vt)$ の項で分けて考え、合成する。

$$B_1 = \frac{1}{v} k \times f(y-vt) e_z$$

$k = e_y$ より (このyが進行方向)

$$B_1 = \frac{1}{v} f(y-vt) e_x$$

同様に

$$B_2 = \frac{1}{v} k \times g(z-vt) e_x$$

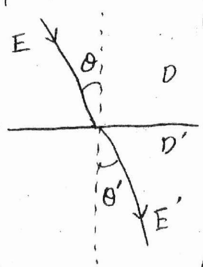
$$= \frac{1}{v} g(z-vt) e_y$$

求めるBは

$$B = B_1 + B_2$$

$$= \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \left\{ f\left(y - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\right) e_x + g\left(z - \frac{t}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}\right) e_y \right\}$$

問題III



(1) $\begin{cases} D = \varepsilon_0 E \\ D' = \varepsilon E' \end{cases}$

2つの境界条件より

$$\begin{cases} E \sin\theta = E' \sin\theta' \\ D \cos\theta = D' \cos\theta' \end{cases}$$

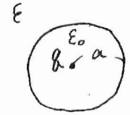
(Eは水平成分 / Dは垂直成分 が連続)

$$\therefore \begin{cases} E \sin\theta = E' \sin\theta' \\ \varepsilon_0 E \cos\theta = \varepsilon E' \cos\theta' \end{cases}$$

$$\therefore \frac{1}{\varepsilon_0} \tan\theta = \frac{1}{\varepsilon} \tan\theta'$$

$$\therefore \tan\theta' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \tan\theta$$

(2)



$r < a$ では
半径rの球面で考えて

$$\iint E\,ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

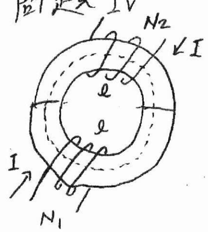
$r > a$ では 同様に考えて

$$\iint D\,ds = q$$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$\therefore E = \frac{q}{4\pi \varepsilon r^2}$$

問題IV



(1) 点線に沿って

磁性体中のアンペールの法則より
強磁性体1にH_1, B_1 2にH_2 B_2が存在するとして

$$\oint H\,ds = (N_1 + N_2) I$$

$$H_1 l + H_2 l = (N_1 + N_2) I$$

境界条件より

$$B_1 = B_2$$

また $\begin{cases} B_1 = \mu_1 H_1 \\ B_2 = \mu_2 H_2 \end{cases}$

以上より、$B_1 = B_2 = B$ として

$$l\left(\frac{B}{\mu_1} + \frac{B}{\mu_2}\right) = (N_1 + N_2) I$$

$$B = \frac{(N_1 + N_2) I}{l\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)}$$

$$= \frac{N_1 + N_2}{l}\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)^{-1} I$$

(2) コイル1にのみ I 流すとする
(1) 同様にして

$$B = \frac{N_1}{l}\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)^{-1} I$$

よってコイル2の全磁束は

$$\Phi_{21} = S N_2 B$$

$L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I}$ より

$$L_{21} = \frac{S N_1 N_2}{l}\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)^{-1}$$

問題V

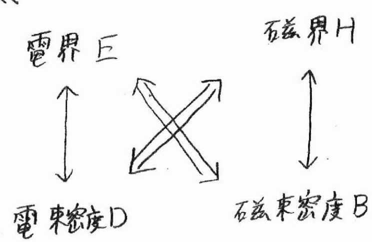
$$\mathrm{rot}\,H = i_t + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,B = 0$$

$$\mathrm{div}\,D = \rho_t$$

※



⟺ はマクスウェル方程式で結ばれる関係。

$\oint E_n dS =$

$\iint E_n dS = \frac{\rho S}{\varepsilon}$

$ES = \frac{\rho S}{\varepsilon}$

[III] 真空中に電荷密度 ρ、および電流密度 i が分布している。電界 E と磁束密度が B が従うマクスウェルの方程式は4個の式からなる。

(1) および (2) の欄に2個づつ方程式を書き、その式が表す法則名を付記しなさい。

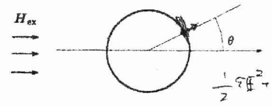
$J = \chi_m H$　　$B = \mu_0 H - J$

[IV] 超伝導体は磁化率 χ_m が $\chi_m = -\mu_0$ の磁性体である。図のように半径 a の超伝導体の球を強さが H_{ex} の一様な外部磁界で磁化する。

(1) 球内の磁束密度を求めなさい。　0

(2) 球内の磁界はいくらか。また、球面上の図の角度 θ の位置での磁極面密度を求めなさい。ただし、球形の磁性体の反磁界係数は $\frac{1}{3}$ である。　$-\mu_0 H$

$H_d = -\frac{J}{\mu_0} \cdot \frac{1}{3}$



$\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2 = \frac{1}{2}\varepsilon f^2(x-ct)$

$E = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_1} \times \frac{1}{2}\right) + \frac{Q^2}{24\pi\varepsilon_1} \cdot \frac{1}{6}$

$= \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_1} + \frac{Q^2}{48\pi\varepsilon_2}$

$\frac{1}{2} \cdot \varepsilon_1 E(r)^2 \cdot 2\pi r\, dr$

$= \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_1^2 r^4} \cdot 2\pi r\, dr$　　$\frac{5}{28} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

$= \frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_1} \cdot \frac{1}{r^3} dr$

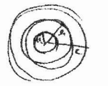
$= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4a^2} = \frac{3}{4a^2}$　　$\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{9a^2} = \frac{9-4}{36} = \frac{5}{36a^2}$

$H^2 = H_{ex}$　H_d

$\frac{1}{3}H$

$\frac{2}{3}H = H_{ex}$

$H = \frac{3}{2}H_{ex}$



慶應義塾大学試験問題（日吉）

			試験時間 50分
平成18年1月26日(木)6時限施行		学門(学科) 5 ; 1 年 11 組; 出席番号　番	
担当者名	小原，神成，高野，日向	学籍番号	6 0 5 1 3 9 6 0
科目名	物理学D	氏名	津留崎 彩
指示事項	持込　不可	答案用紙　回収 要　→　指定答案用紙を使用のこと 問題用紙　回収　不要　　計算用紙　不要	

注意：とくに指示がない場合、答案には結果のみならず、それを導いた過程についても簡単に記すこと。また、万一与えられた条件だけでは解けない場合には、適当な量を定義したり，条件を明記した上で解いてよい。ただし、真空の誘電率 ε_0、透磁率 μ_0、光速 c の記号は断りなしに使ってよい。各小問の配点は１０点である。

[I] 半径 a および半径 c $(a < c)$ の同心の金属球殻を両極とするコンデンサーがある。両極の間には中心からの距離が $a < r < b$ $(b < c)$ の間には誘電率が ε_1、距離が $b < r < c$ の間には誘電率が ε_2 となるように誘電体をつめてある。

(1) 内側および外側の電極にそれぞれ電荷 $Q, -Q$ の電荷を与えた。この場合に中心からの距離を r として、$(a < r < b)$ および $(b < r < c)$ での電界と電束密度の大きさ E, D を表す式を導きなさい。

(2) このコンデンサーの電気容量を求めなさい。

(3) $b = 2a,\ c = 3a$ とする。$a < r < b = 2a$ の間に蓄えられている静電エネルギーと $b = 2a < r < c = 3a$ のあいだに蓄えられている静電エネルギーの比を求めなさい。

$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$

[II] $f(x)$ を任意の関数とする。電界が $E_x = E_z = 0,\ E_y = f(x - ct)$、磁束密度が $B_x = B_y = 0$、$B_z = \frac{1}{c}f(x - ct)$ である平面波がある。この平面波のポインティングベクトルと、平面波のエネルギー密度 u を求めなさい。これからポインティングベクトルと u の間の関係を決め、この関係が何を意味しているか記しなさい。

$\frac{1}{a^3} - \frac{1}{8a^3}$　$\frac{1}{8} - \frac{1}{27a^3} = \frac{27-8}{216} = \frac{19}{216}$　$\frac{19}{216} \times \frac{7}{8}$

慶應義塾大学試験問題（日吉）

			試験時間 50分
2007年1月26日(金)6時限施行		学門(学科) 1 ; 1 年 7 組; 出席番号 20 番	
担当者名	小原，神成，高野，日向	学籍番号	6 0 6 1 5 2 8 5
科目名	物理学D	氏名	土岐佳輝
指示事項	持込　不可	答案用紙　回収 要　→　指定答案用紙を使用のこと 問題用紙　回収　不要　　計算用紙　不要	

注意：とくに指示がない場合、答案には結果のみならず、それを導いた過程についても簡単に記すこと。また、万一与えられた条件だけでは解けない場合には、適当な量を定義したり，条件を明記した上で解いてよい。ただし、真空の誘電率 ε_0、透磁率 μ_0、光速 c の記号は断りなしに使ってよい。各小問の配点は１０点である。

$\Delta\phi(r) = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$

[I] 以下の問に答えなさい。

(1) 電位 $\phi(r)$ と電荷密度 $\rho(r)$ の間に成り立つポアソン方程式、ならびに電位と電界ベクトル $E(r)$ の間に成り立つ関係式を記しなさい。（導く必要はない。）

(2) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とし、a および λ は定数であるとして、$r \leq a$ では $\phi = \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$ であり、$r \geq a$ では $\phi = \lambda a^3/r$ であるとする。このとき電荷密度および全電荷を求めなさい。　ϕ　$E(r)$

[II] 図 (a) のように z 軸に沿って、$z = -\infty$ から一定電流 I が座標原点 O にある電荷溜りに流れ込んでいる。図 (b) では、z 軸上の点 A $(z = a > 0)$ から同じ量の電流 I が $z = \infty$ に流れ出ている。

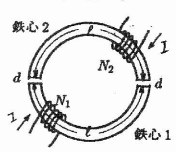
(1) 図 (a) の場合に位置ベクトル r での変位電流を求めなさい。これより O を中心とする半径 r の球面を通過する全変位電流を求めなさい。　i_d

(2) 図 (b) の場合を考える。同時刻では点 O と点 A にある電荷は符号が反対で大きさが同じであるとする。このとき解答欄の図の指定した点 1,2,3,4,5 でのポインティングベクトルの方向を矢印 (→, ⊙, ⊗) などを用いて描きなさい。

図 (a)　　図 (b)

[III] 図のように長さ ℓ、断面積 S、透磁率 μ の強磁性体の鉄心2個から作った円環状の電磁石がある。この間には幅 d の空気間隔があいている。鉄心1には N_1 回コイルが、鉄心2には N_2 回コイルが巻いてある。磁力線のゆがみは無視できるものとする. また空気の透磁率は真空と同じと考えてよい。

$(N_1 + N_2)I = H\ell$



$B = \frac{\mu}{2\ell}(N_1 + N_2)I$

(1) コイル1とコイル2にそれぞれ同じ大きさの電流 I を、図に示す矢印の方向に流した。2つの空気間隔でできる磁束密度の大きさを求めなさい。

(2) この2つのコイルの間の相互インダクタンスを求めなさい。（相互インダクタンスとは一方のコイルに電流を流したとき、他方のコイルを貫く磁束の総量を、流した電流で割った量であることを思い出そう。）

$S \frac{\mu}{2\ell} N_1 \quad N_2 = \Phi_1$

[IV] 図 (c) に示すように半径 a の球面の電極のまわりに、半径 b まで誘電率 ε の誘電体が囲んでいる。図 (d) では、その外に共通の中心を持つ半径 c の球面の電極が囲んでいる。両方の場合に中心からの距離を r と記す。

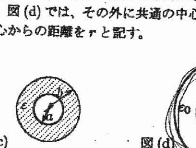


図 (c)　　図 (d)

$a \leq b \quad b \leq c$

(1) 図 (c) において、真ん中の球面電極に電荷 Q を与えた。このとき中心からの距離 r, $(a \leq r \leq b)$ における、電界 E および電束密度 D の大きさを求めなさい。さらに誘電体の $r = b$ の表面に現れる分極電荷の総量を求めなさい。

(2) 図 (d) はコンデンサーと考えることができる。これの電気容量を求めなさい。

2つでとめて

$Q = \iint D\, dv$

$V = \int \frac{Q}{\varepsilon 4\pi r^2} dr$　　$Q = \pi r^2 D$

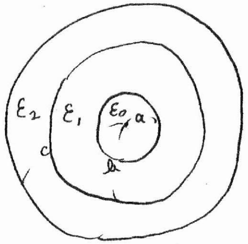
$\varepsilon E = \frac{Q}{\varepsilon 4\pi r^2}$　$\frac{Q}{4\pi r^2} = D$　　$\frac{Q}{\varepsilon 4\pi r^2} = E$

$Q = CV$

$C = \frac{Q}{V}$

平成18年 物理D.

[I]



(1) $a<r<b$ では半径 r の球面で考えて

$$\iint D\,ds = Q$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}$$

$b<r<c$ では同様に

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}$$

(2) $V_{ac} = -\int_a^c E\,dr$

$$= -\int_a^b E\,dr - \int_b^c E\,dr$$

$$= -\left\{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\left(-\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)\right\}$$

$C = \left|\frac{Q}{V_{ac}}\right|$ より

$$C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$$

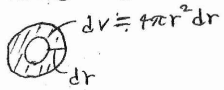
($a<b<c$ より
これは必ず正の値)

(3) $a<r<b$ に U_{ab}
$b<r<c$ に U_{bc} のエネルギーが蓄えられているとして

$$U_{ab} = \iiint \frac{1}{2}\varepsilon_1 E^2\,dv$$

$$= \int_a^b \frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}\right)^2\cdot 4\pi r^2\,dr$$

(v の積分を r に置換



)

$$\therefore U_{ab} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

同様に $U_{bc} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_1}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$

$b=2a$, $c=3a$ のとき

$$\frac{U_{bc}}{U_{ab}} = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{2a}}{\frac{1}{2a}-\frac{1}{3a}} = \frac{1}{3}$$

[II]

$$S = \frac{1}{\mu_0}E\times B$$

$$= \frac{1}{\mu_0 c}f^2(x-ct)\,e_x$$

また

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

$$= \frac{1}{2}f^2(x-ct)\left(\varepsilon_0+\frac{1}{\mu_0 c^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2c}\left(c\varepsilon_0+\frac{1}{\mu_0 c}\right)f^2(x-ct)$$

$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ より

$$u = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,f^2(x-ct)$$

$$= \frac{1}{c}|S| \iff cu = S$$

エネルギーが空間を光速で伝わることが分かる

[III]

$$\mathrm{rot}\,B = \mu_0 i + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$$

マクスウェル・アンペールの法則

$$\mathrm{rot}\,E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

ファラデーの法則

$$\mathrm{div}\,E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

静磁場のガウスの法則

$$\mathrm{div}\,B = 0$$

静磁場のガウスの法則

[IV]

(1) $J = \chi_m H$

$$B = \mu_0 H + J$$

$$= \mu_0 H + (-\mu_0)H$$

$$= 0$$

(2) $H = H_{ex} + H_d$

$$H_d = -N\frac{J}{\mu_0}$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\chi_m}{\mu_0}H$$

$$\therefore H - H_d = H_{ex}$$

$$H\left(1+\frac{1}{3}\frac{\chi_m}{\mu_0}\right) = H_{ex}$$

$$H\left(1-\frac{1}{3}\right) = H_{ex}$$

$$H = \frac{3}{2}H_{ex}$$

$$\therefore J = \chi_m H$$

$$= -\frac{3}{2}\mu_0 H_{ex}$$

$$\therefore \omega_n = J\cdot n$$

$$= -\frac{3}{2}\mu_0 H_{ex}\cos\theta$$

2007 1/26 物理D

[I]

(1) $\Delta\phi(r) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$

$\left(\begin{array}{l} E = -\mathrm{grad}\,\phi(r) \\ \mathrm{div}\,E = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} \end{array} \right.$ から導出可 $\Big)$

$$\oint E(r)ds = -\phi(r)$$

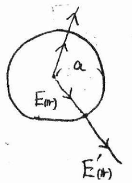
(2) $r \leq a$ では

$$\rho(r) = -\varepsilon_0 \Delta\phi(r)$$
$$= -\varepsilon_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(r) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(r) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi(r)\right)$$
$$= -\varepsilon_0(2\lambda + 2\lambda + 2\lambda)$$
$$= -6\lambda\varepsilon_0$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r},\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},\ \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$r > a$ では下図

$$E(r) = -\mathrm{grad}(\lambda r^2)$$



$$= -\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix}\left(\frac{\partial \lambda r^2}{\partial r}\right)$$
$$= -\frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}(2\lambda r)$$
$$= -2\lambda \boldsymbol{r}$$

$\Bigg($ $4\pi r^2 E = \frac{4}{3}\pi r^3(-6\lambda\varepsilon_0)/\varepsilon_0$

$E = -2\lambda r$

でも可 $\Bigg)$

$$E'(r) = -\mathrm{grad}\left(\frac{\lambda a^3}{r}\right)$$
$$= -\frac{\boldsymbol{r}}{r}\left(-\frac{\lambda a^3}{r^2}\right)$$
$$= \frac{\lambda a^3}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$\iint E'(r) = \frac{Q_{内} + Q_{外}}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 \cdot \frac{\lambda a^3}{r^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3(-6\lambda\varepsilon_0) + Q_{外}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{外} = 14\pi\lambda\varepsilon_0 a^3$$

($Q_{内}$とは $r \leq a$ にある総電荷

$Q_{外}$とは $r > a$ にある総電荷)

↑

(考える半径rの閉曲面内に含まれる)

$$\rho_{外} = \frac{Q_{外}}{\frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3)}$$
$$= \frac{21\lambda\varepsilon_0 a^3}{2(r^3 - a^3)}$$

[II]

(1) 0にある電荷$Q(t)$とする

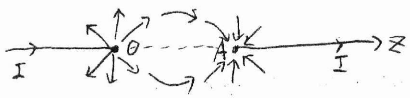
$$\iint E\,dS = Q(t)/\varepsilon_0$$

$$E = \frac{Q(t)}{4\pi r^2\varepsilon_0} \text{ より}$$

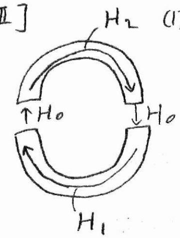
$$i_d = \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$$
$$= \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial Q(t)}{\partial t}$$
$$= \frac{I}{4\pi r^2}$$

$$I_d = \iint i_d\,ds$$
$$= I \quad (当然)$$

(2) 問題がないので
イメージで
空間を伝わり
0からは湧き出し
Aでは吸われる



[III]



(1) H_0, H_1, H_2 を図のようにおく

$$\oint H = N_1 I + N_2 I$$

$$H_1 l + H_0 d + H_2 l + H_0 d = (N_1 + N_2)I$$

$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}$, $H_1 = \frac{B_1}{\mu}$, $H_2 = \frac{B_2}{\mu}$ とおくと

$B_0 = B_1 = B_2$ より $B_0 = B$ として

(∵境界条件より)

$$\frac{B}{\mu}2l + \frac{B}{\mu_0}2d = (N_1 + N_2)I$$

$$B = \frac{N_1 + N_2}{2}\left(\frac{l}{\mu} + \frac{d}{\mu_0}\right)^{-1} I$$

(2) N_1の方のみに I 流すとする

(1)と同様に

$$B = \frac{N_1}{2}\left(\frac{l}{\mu} + \frac{d}{\mu_0}\right)^{-1} I$$

$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{21} = BSN_2 \\ \Phi_{21} = L_{21} I \end{array} \right.$ より

$$L_{21} = \frac{N_1 N_2 S}{2}\left(\frac{l}{\mu} + \frac{d}{\mu_0}\right)^{-1} I$$

[IV]

(1) 半径rの球面で考えて $(a \leq r \leq b)$

$$\iint D\,ds = Q$$
$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$
$$\therefore E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$$P = D - \varepsilon_0 E$$
$$= \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{Q}{4\pi r^2}$$

いま、Q'の分極電荷が
$r = a$の表面に現れるとして
上記と同様の球面で考えて.

$$\iint P\,ds = -Q'$$
$$4\pi r^2 P = -Q'$$
$$Q' = -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)Q$$

これは $r = a$ に発生する分極電荷

$r = b$ には $-Q'$ の分極電荷が

発生するので

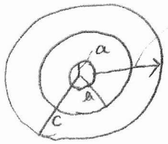
求める値 Q''は

$$Q'' = -Q' = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)Q$$

(2)

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \quad (a \leqq r \leqq b)$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (b \leqq r \leqq c)$$



Vの電位差とする

$$V = -\int_a^c E\,dr$$

$$= -\int_a^b E\,dr - \int_b^c E\,dr$$

$$= -\left\{\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)\right\}$$

$C = \left|\frac{Q}{V}\right|$ より

$$C = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$$

(これは $a<b<c$ より必ず正の値)