ANALYSIS

NAOKI YANO

Contents

Part 1. 実数と連続

1. 実数の公理

Def. 1.1. 加群

(1) 交換律

$$a + b = b + a.$$

(2) 結合律

$$(a + b) + c = a + (b + c) \tag{1.1}$$

(3) 零元の存在

$$\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = a. \tag{1.2}$$

(4) 逆元の存在

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists - a \in \mathbb{R}, a + (-a) = 0 \tag{1.3}$$

Date: January 20, 2018.

Part 2. 微分法

Part 3. 積分法

2. 逆三角関数

Def. 2.1. 逆三角関数

$$x = \sin y, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \tag{2.1}$$

には逆関数が存在して, これを

$$y = \mathrm{Sin}^{-1} x, -1 \leq x \leq 1 \tag{2.2}$$

と書く. また

$$x = \cos y, 0 \leq y \leq \pi \tag{2.3}$$

にも逆関数が存在して,

$$y = \mathrm{Cos}^{-1} x, -1 \leq x \leq 1 \tag{2.4}$$

と書く.

Prop. 2.1. 逆三角関数の表示

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Sin}^{-1} x + \text{const.} \tag{2.5}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\mathrm{Cos}^{-1} x + \text{const.} \tag{2.6}$$

Def. 2.2.

$$x = \tan y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \tag{2.7}$$

$$y = \mathrm{Tan}^{-1} x, -\infty < x < \infty \tag{2.8}$$

Prop. 2.2.

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \mathrm{Tan}^{-1} x + \text{const.} \tag{2.9}$$

3. 有理関数

Def. 3.1.

$$R() \tag{3.1}$$

4. 多変数関数の積分

5. 累次積分

6. 広義積分

7. 変数変換

Def. 7.1. ヤコビ行列式

$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ と変数変換したときのヤコビ行列式は

$$J(u, v) = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{7.1}$$

Def. 7.2. 変数変換
$x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ と変数変換したとき

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) J(u, v) du dv$$

8. 体積

9. 質量と重心

10. 慣性モーメント

11. 曲面積

Thm. 11.1. 曲面積
$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への写像を

$$f : \mathcal{D} \to \mathbb{R} \tag{11.1}$$

として

$$\mathcal{A} = \{(x, y, z) | (x, y) \in \mathcal{D}, z = f(x, y)\} \tag{11.2}$$

で表される曲面の面積は

$$S = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy \tag{11.3}$$

で表される.

Prf. 1.

Prop. 11.1. 曲面の法線ベクトル
曲面

$$\mathcal{D} : f(x, y, z) = \text{const.}$$

上の点 (x, y, z) における法線ベクトルは

$$\nabla f(x, y, z) \tag{11.4}$$

である.

12. ベクトル解析

Def. 12.1. スカラー場
ベクトルからスカラーへの写像を

$$f : V \to K \tag{12.1}$$

としたとき, 組み合わせ

$$(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \tag{12.2}$$

をスカラー場という.

Def. 12.2. ベクトル場ベクトルからベクトルへの写像を

$$f : V \to V \tag{12.3}$$

としたとき, 組み合わせ

$$(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \tag{12.4}$$

をベクトル場という.

Def. 12.3. 微分演算子ベクトル (ナブラ)

$$\nabla := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{12.5}$$

Def. 12.4. 勾配 [gradient]

$$\nabla f \tag{12.6}$$

Def. 12.5. 発散

$$\nabla \cdot f \tag{12.7}$$

Def. 12.6. 回転

$$\nabla \times f \tag{12.8}$$

13. 線積分・面積分と積分定理

Def. 13.1. 曲線

Def. 13.2. 線積分

Def. 13.3. 面積分

14. グリーン [Green] の定理

$$\oint_\Gamma f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = \iint_D \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) \tag{14.1}$$

15. ガウス [Gauss] の定理

$$\iiint_V \mathrm{div} \boldsymbol{f} dv = \iint_A \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{15.1}$$

16. ストークス [Stokes] の定理

$$\iint_A \mathrm{rot} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n} dS = \oint_{\partial A} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{16.1}$$

References

[1] 杉浦光夫. 解析入門 I. 初版, 東京大学出版会, 1980, 428p.