担当教員：坂内 健一　研究室：矢上 36 棟 206A　E-mail:bannai@math.keio.ac.jp

中間試験

June 16, 2010　http://www.math.keio.ac.jp/~bannai/

基礎問題

問題 1. 次の関数について、導関数（微分）df/dx を求めよ。

(1) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)}$　(2) $f(x) = x(1-\log x)^2$

(3) $f(x) = \arcsin(x)$

問題 2. 次の極限を計算せよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{3^x-1-(\log 3)x}{x^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\arctan(x)-x}{x^3}$　(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2+x-e^x-\cos x}{\sin x(1-\cos x)}$

以上の問題について、導出過程は書かなくて良い。答えは必ず見直しましょう。

標準問題

問題 3. 次の関数の $x=0$ での Taylor 展開（Maclaurin 展開）を計算せよ。

(1) $f(x) = x^2\sin x$　(2) $f(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$

また、次の関数の $x=0$ での Taylor 展開を 4 次の項（x^4 の係数）まで計算せよ。

(3) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1-x^3}$　(4) $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)(1-2x)}$

問題 4. 次の関数 $f(x)$ を $x=0$ で 5 次の項まで Taylor 展開せよ。これを用いて $f(x)$ は $x=0$ で極値となるかどうか判定せよ。極値となる場合は極大値か極小値か答えよ。

$$f(x) = e^x + \log(1-x) + \frac{1}{6}x^3$$

問題 5. 次の $\mathbb{R}^2$ 上の 2 変数関数 $f(x,y)$ が $(x,y)=(0,0)$ で連続かどうか判定せよ。

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

証明問題

問題 6. $A\subset\mathbb{R}$ として、点 $a\in A$ とする。

(1) 関数 $f: A\to\mathbb{R}$ が点 $a\in A$ で連続であることの定義を、ε-δ 論法を用いて書け。

(2) 2 つの関数 $f,g: A\to\mathbb{R}$ が $a\in A$ で連続であれば、$f+g: A\to\mathbb{R}$ も連続となることを、ε-δ 論法を用いて証明せよ。