数学Ｂ２　中間テスト 解答例　2010年11月16日実施 担当：太田 克弘

1. 次の行列に逆行列があれば求めよ．

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

解答

$$\left(\begin{array}{cccccc} 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{①} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{②} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{④} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

① 第1行 $\leftrightarrow$ 第2行
② 第2行 $\leftarrow$ +第1行 $\times (-3)$，第3行 $\leftarrow$ +第1行 $\times (-2)$
③ 第1行 $\leftarrow$ +第2行 $\times (-1)$，第3行 $\leftarrow$ +第2行 $\times (-1)$
④ 第1行 $\leftarrow$ +第3行 $\times (-3)$，第2行 $\leftarrow$ +第3行 $\times 2$

よって $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする．

(1) 連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0$ の一般解を，行列の基本変形を用いて求めよ．

(2) 任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して，連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ には解があることを示せ．

解答 (1)

$$\left(\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{①} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{②} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{④} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{⑤} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

① 第1行 $\leftrightarrow$ 第3行
② 第2行 $\leftarrow$ +第1行 $\times (-3)$，第3行 $\leftarrow$ +第1行 $\times (-2)$
③ 第1行 $\leftarrow$ +第2行，第3行 $\leftarrow$ +第2行 $\times (-1)$
④ 第1行 $\leftarrow$ +第3行 $\times 4$，第2行 $\leftarrow$ +第3行 $\times 5$
⑤ 第2行 $\leftarrow \times(-1)$，第3行 $\leftarrow \times(-1)$

よって，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_0$ の解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ は，$x_3 = t$ とおいて，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と表される．

(2) (1) の計算により，$\mathrm{rank}\, A = 3$ であることがわかる．よって，$\mathrm{Im}\, A = \mathbb{R}^3$（$A$ によって定まる線形写像が全射）となるので，任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ に対し $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ となる $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ が存在することがいえる．

3. 次の行列式の値を求めよ．ただし，N には自分の学籍番号の一の位の数字を代入して計算すること．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 3 & N \end{vmatrix}$$

解答　N のまま計算してみる．

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & -4 \\ 2 & 0 & 3 & N \end{vmatrix} \overset{①}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -6 & 3 \\ -2 & 5 & 10 & -2 \\ 2 & -4 & -3 & N-2 \end{vmatrix} \overset{②}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 5 & N-6 \end{vmatrix} \overset{③}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & N-6 & 5 \end{vmatrix} = 45.$$

① 第2列 $\leftarrow$ +第1列 $\times (-2)$，第3列 $\leftarrow$ +第1列 $\times (-3)$，第4列 $\leftarrow$ +第1列 $\times (-1)$
② 第3列 $\leftarrow$ +第2列 $\times (-2)$，第4列 $\leftarrow$ +第2列
③ 第3列 $\leftrightarrow$ 第4列

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ とする．　(1) $\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ k \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\, A$ となるように定数 k の値を定めよ．

(2) $\begin{pmatrix} \ell \\ 2 \\ m \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, A$ となるように，定数 ℓ, m の値を定めよ．

解答 (1) $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ k \end{pmatrix}$ が解を持てばよい．

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 2 & -7 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & k \end{array}\right) \xrightarrow{①} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & k \end{array}\right) \xrightarrow{②} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-3 \end{array}\right)$$

① 第2行 $\leftarrow$ +第1行　　② 第3行 $\leftarrow$ +第2行

であるから，$k - 3 = 0$ すなわち $k = 3$ のときのみ解をもつ．

(2) $A\begin{pmatrix} \ell \\ 2 \\ m \\ 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$ であるから，連立１次方程式 $\begin{cases} \ell - 2 \qquad + 6 = 0 \\ -\ell \qquad - m + 3 = 0 \\ \qquad 2 + m - 9 = 0 \end{cases}$ を解けばよい．容易に $\ell = -4$, $m = 7$ を得る．

5. 次の行列式を求めよ．ただし，答えは完全に因数分解した形で与えること．

$$\begin{vmatrix} 2a & a & a+1 \\ a & a-2 & a \\ a+1 & -a & 2a \end{vmatrix}$$

解答

$$\begin{vmatrix} 2a & a & a+1 \\ a & a-2 & a \\ a+1 & -a & 2a \end{vmatrix} \overset{①}{=} \begin{vmatrix} 3a+1 & 0 & 3a+1 \\ a & a-2 & a \\ a+1 & -a & 2a \end{vmatrix} \overset{②}{=} \begin{vmatrix} 3a+1 & 0 & 0 \\ a & a-2 & 0 \\ a+1 & -a & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)(a-2)(3a+1).$$

① 第1行 $\leftarrow$ +第3行　　② 第3列 $\leftarrow$ +第1列 $\times (-1)$

6. $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & x & x \\ x & x & 1 \\ x & 1 & x \end{pmatrix}$ とする．

(1) $\mathrm{rank}\, X$ を求めよ．(答えは x の値に依存する．)

(2) $\mathrm{Ker}\, X$ の次元を求めよ．

(3) X を表現行列とする $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^4$ への線形写像の全射性，単射性について判定せよ．

解答 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & x & x \\ x & x & 1 \\ x & 1 & x \end{pmatrix} \xrightarrow{①} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & x+2 \\ x & 0 & 2x+1 \\ x & 1-x & 3x \end{pmatrix} = X'$$

① 第 2 列 $\leftarrow +$第 1 列 $\times (-1)$，第 3 列 $\leftarrow +$第 1 列 $\times 2$

(i) $x = 1$ のとき，

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{よって，} \mathrm{rank}\, X = 2.$$

② 第 2 列 $\leftrightarrow$ 第 3 列

(ii) $x \neq 1$ のとき，

$$X' \xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x+2 \\ x & 0 & 2x+1 \\ x & -1 & 3x \end{pmatrix} \xrightarrow{④} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & 0 & 2x+1 \\ x & -1 & 4x+2 \end{pmatrix} = X''$$

③ 第 2 列 $\leftarrow \times \frac{1}{x-1}$ ④ 第 3 列 $\leftarrow +$第 2 列 $\times (-x-2)$

$x = -1/2$ のとき，$X'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ より，$\mathrm{rank}\, X = 2$.

$x \neq -1/2$ のとき，$\mathrm{rank}\, X = \mathrm{rank}\, X'' = 3$.

総合して，$x = 1, -1/2$ のときは $\mathrm{rank}\, X = 2$, $x \neq 1, -1/2$ のときは $\mathrm{rank}\, X = 3$.

(2) $\dim \mathrm{Ker}\, X = (X \text{ の列数}) - \mathrm{rank}\, X = \begin{cases} 1 & x = 1, -1/2 \text{ のとき} \\ 0 & x \neq 1, -1/2 \text{ のとき} \end{cases}$

(3) $\mathrm{rank}\, X$ は X の行数$(=4)$にはならないので，全射にはならない．$x \neq 1, -1/2$ のときは，$\mathrm{rank}\, X = (X \text{ の列数})$ となる（$\dim \mathrm{Ker}\, X = 0$ となる）ので，単射である．$x = 1, -1/2$ のときはそうならないので，単射でない．

7. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．

(1) 像空間 $\mathrm{Im}\, B$ の次元と基底を求めよ．

(2) 核空間 $\mathrm{Ker}\, B$ の次元と基底を求めよ．

解答 (1)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{①} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{②} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

① 第 2 列 $\leftarrow +$第 1 列 $\times (-1)$，第 3 列 $\leftarrow +$第 1 列 $\times (-1)$，第 4 列 $\leftarrow +$第 1 列 $\times (-3)$，
第 5 列 $\leftarrow +$第 1 列
② 第 3 列 $\leftarrow +$第 2 列 $\times (-2)$，第 4 列 $\leftarrow +$第 2 列 $\times (-1)$，第 5 列 $\leftarrow +$第 2 列 $\times (-1)$
③ 第 4 列 $\leftarrow +$第 3 列，第 5 列 $\leftarrow +$第 3 列 $\times 2$

よって $\mathrm{Im}\, B$ の基底として，$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ がとれ，$\dim \mathrm{Im}\, B = 3$.

(2)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{④} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{⑤} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{⑥} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{⑦} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

④ 第 2 行 $\leftarrow +$第 1 行 $\times (-1)$
⑤ 第 1 行 $\leftarrow +$第 2 行 $\times (-1)$，第 3 行 $+$ 第 2 行 $\times (-1)$
⑥ 第 3 行 $\leftarrow \times(-1)$
⑦ 第 1 行 $\leftarrow +$第 3 行，第 2 行 $\leftarrow +$第 3 行 $\times (-2)$，第 4 行 $\leftarrow +$第 3 行

よって，$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ は，$x_4 = t_1, x_5 = t_2$ とおいて，$\boldsymbol{x} = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表される．よって $\mathrm{Ker}\, B$ の基底として，$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ がとれ，$\dim \mathrm{Ker}\, B = 2$.