No.

Date

4. $\varphi_x(x,y) = 2(x-1)$, $\varphi_y(x,y) = 2(y-1)$ ($\varphi = (x-1)^2+(y-1)^2-1$ とおいた)
より、$\varphi_x(a,b) = \varphi_y(a,b) = \varphi(a,b) = 0$ を満たす
点 (a,b) は存在しない。
また、$F(x,y,\lambda) = xy+x+y+\lambda((x-1)^2+(y-1)^2-1)$ とおく。

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = y+1+2\lambda(x-1) = 0 & \text{—①} \\ F_y(x,y,\lambda) = x+1+2\lambda(y-1) = 0 & \text{—②} \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = (x-1)^2+(y-1)^2-1 = 0 & \text{—③} \end{cases}$$

①×$(y-1)$ − ②×$(x-1)$ より

$y^2-x^2=0$ ∴ $y=\pm x$

よって、③ より

$2(x-1)^2-1=0$ または $2x^2+1=0$

よって $(x,y) = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

また ①,② より $(x,y) = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, -\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, -\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$ のときは
λ が決定されないので不適。
また、$\varphi(x,y)$ は明らかに円であるので、
$f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7+4\sqrt{2}}{2}$ $f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7-4\sqrt{2}}{2}$
よって、最大値 $\frac{7+4\sqrt{2}}{2}$ 最小値 $\frac{7-4\sqrt{2}}{2}$ //

5. $x+y+z=1$ より $z = 1-y-x$ —①
これを $x+2y+3z$ に代入して、

$x+2y+3-3y-3x = -2x-y+3 = 0$

∴ $y = 3-2x$

①に代入して $z = x-2$
よって、$x^2+y^2+z^2 = x^2+9-12x+4x^2+x^2-4x+4$
$= 6x^2-16x+13$
$= g(x)$ とおく。

$g'(x) = 12x-16$
$= 4(3x-4)$

$g''(x) = 12 > 0$ より $x=\frac{4}{3}$ は極小値。
このとき $g\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{3} - \frac{64}{3} + 13 = \frac{7}{3}$
また、$y = 3-\frac{4}{3}\cdot 2 = \frac{1}{3}$
$z = \frac{4}{3}-2 = -\frac{2}{3}$
よって、極小値 $\frac{7}{3}$ $(x,y,z) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ //

6. 両辺 x で偏微分して、

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} + 1 + 3\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$(2z+3)\frac{\partial z}{\partial x} = -(2x+1)$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x+1}{2z+3} \quad //$$

さらに両辺 y で偏微分して、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2(2x+1)}{(2z+3)^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{—①}$$

また、与式を y で偏微分して、

$$2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} + 2 + 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2(y+1)}{2z+3}$$

これを ①に代入して、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2(2x+1)}{(2z+3)^2}\cdot -\frac{2(y+1)}{2z+3}$$

$$= -\frac{4(2x+1)(y+1)}{(2z+3)^3} \quad //$$