No. H10-5
Date H11 7 11

6. $\varphi(x,y)=x^2-xy+y^2-1$
$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$
$=xy+\lambda(x^2-xy+y^2-1)$ とする.
$\varphi=\varphi_x=\varphi_y=0$を満たす点は存在しない。
$F_x=F_y=F_\lambda=0$より
$$\begin{cases} y+\lambda(2x-y)=0 & \cdots ① \\ x+\lambda(2y-x)=0 & \cdots ② \\ x^2-xy+y^2-1=0 & \cdots ③ \end{cases}$$
① ② から x, yを消去して
$(x-2y)y=(y-2x)x$
$x^2=y^2$ ... $x=y$ または $x=-y$.
i) $x=y$ のとき ③に代入して.
$x=\pm 1$　$(x,y)=(1,1),(-1,-1)$
このときの$f(x,y)$の値は
$f(1,1)=f(-1,-1)=1$
ii) $x=-y$ のとき, ③に代入して.
$x=\pm\frac{1}{\sqrt3}$　$(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)$
このときの$f(x,y)$の値は
$f\left(\frac{1}{\sqrt3},-\frac{1}{\sqrt3}\right)=f\left(-\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\right)=-\frac{1}{3}$

ところで, $\varphi(x,y)=0$は楕円を表し, 有界となるため.
上で求めた$f(x,y)$が最大値, 最小値のいずれかをとる。
∴ $(x,y)=(\pm1,\pm1)$ のとき 最大値は 1
∴ $(x,y)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt3},\mp\frac{1}{\sqrt3}\right)$のとき 最小値は $-\frac{1}{3}$ [複号同順] //

2 記号が多いので, 何で何を微分するか混乱しないようにしましょう。

(解). $\begin{cases} u=\log\sqrt{1+x^2} \\ v=e^x\sin y^2 \end{cases}$　$u_x=\frac{x}{1+x^2}$, $u_y=1$
$v_x=e^x\sin y^2$, $v_y=2ye^x\cos y^2$
よって
$g_x(x,y)=f_x(u,v)$
$=f_u u_x+f_v v_x$
$=\frac{x}{1+x^2}f_u+e^x\sin y^2\cdot f_v$ //
$g_y(x,y)=f_y(u,v)$
$=f_u u_y+f_v v_y$
$=f_u+2ye^x\cos y^2\cdot f_v$ //　(たぶん….)

3. 基本的な問題。因数分解に気付くかどうかがポイント。
$f(x,y)=8x^3-12x^2y+6xy^2-18xy+9y^2$
(1) $\begin{cases} f_x=24x^2-24xy+6y^2-18y=0 & \cdots ① \\ f_y=12xy+18y-12x^2-18x=0 & \cdots ② \end{cases}$
②より, $2xy+3y-2x^2-3x=0$.
$(y-x)(2x+3)=0$
故に, $y=x$ または $x=-\frac{3}{2}$
i) $x=-\frac{3}{2}$ のとき, ①に代入すると.
$y^2+3y+9=0$. yが虚数となるので不適.
ii) $y=x$ のとき, ①に代入すると.
$y(y-3)=0$
∴ $(x,y)=(0,0),(3,3)$ //

(2) $f_{xx}=48x-24y$, $f_{yy}=12x+18$, $f_{xy}=-24x+12y-18$
$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 48x-24y & -24x+12y-18 \\ -24x+12y-18 & 12x+18 \end{pmatrix}$
i) $(x,y)=(0,0)$のとき, $Hf(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & -18 \\ -18 & 18 \end{pmatrix}$
$\Delta=-18<0$ なので, 鞍点
ii) $(x,y)=(3,3)$のとき, $Hf(3,3)=\begin{pmatrix} 72 & -54 \\ -54 & 54 \end{pmatrix}$
$\Delta=18\times54>0$, $f_{xx}>0$より, 極小点 //