慶應義塾大学試験問題　物理学D（一斉）

2016年1月22日（金）1時限（試験時間 50分）　問題用紙 回収不要

担当者　神成、木下、齊藤、高野

注意：とくに指示がない場合、答案には結果のみならず、それを導いた過程についても記すこと。また、万一与えられた条件だけでは解けない場合には、適当な量を定義したり，条件を明記した上で解いてよい。電気定数 ε_0、磁気定数 μ_0、真空中の光速 c の記号は断りなしに使ってよい。

問題 I 真空中に、半径 a の導体 (金属) の球と、内半径 b、外半径 d の導体 (金属) の球殻が、中心が共通になるように配置されている $(0 < a < b < d)$。この共通の中心を位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の原点とする。即ち、中心からの距離 $r = |\boldsymbol{r}|$ が $0 \leq r \leq a$ の領域と $b \leq r \leq d$ の領域が導体 (金属) である。中心からの距離 r が $a \leq r \leq b$ の領域は誘電体で満たされており、その誘電率は中心からの距離 r の関数として、$\varepsilon(r) = \bar{\varepsilon}\varepsilon_0 \left(\dfrac{b}{r}\right)^5$ で与えられている。ここで、$\bar{\varepsilon}$ は $\bar{\varepsilon} > 1$ を満たす定数である。外側の導体 (金属) の球殻が帯電していない状態 (全電荷 0) で、内側の導体 (金属) の球に Q の電荷を与える。

(1) 位置 $\boldsymbol{r}$ における電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$、電束密度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$、電気分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

(2) この系の静電エネルギー U_{E} を求めなさい。

(3) 誘電体の内側の表面上の位置 $\boldsymbol{r}(|\boldsymbol{r}| = a)$ における分極電荷面密度 $\omega_{\mathrm{P}}(r = a)$、誘電体の外側の表面上の位置 $\boldsymbol{r}(|\boldsymbol{r}| = b)$ における分極電荷面密度 $\omega_{\mathrm{P}}(r = b)$、誘電体内の位置 $\boldsymbol{r}$ における分極電荷密度 $\rho_{\mathrm{P}}(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

ヒント: スカラー場 $f(\boldsymbol{r})$、ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ に対し、

$$\mathrm{div}(f\boldsymbol{V}) = \nabla \cdot (f\boldsymbol{V}) = (\nabla f) \cdot \boldsymbol{V} + f\,\nabla \cdot \boldsymbol{V} = (\mathrm{grad} f) \cdot \boldsymbol{V} + f\,\mathrm{div}\boldsymbol{V}$$

問題 II 物質中で、電界を $\boldsymbol{E}$、電束密度を $\boldsymbol{D}$、磁束密度を $\boldsymbol{B}$、磁界を $\boldsymbol{H}$、真電荷密度を ρ_{t}、真電流密度を $\boldsymbol{i}_{\mathrm{t}}$ とする。

(1) 物質中のマクスウェル方程式を書きなさい。

(2) 物質が一様で、その誘電率 ε と透磁率 μ が一定の場合を考える。時刻 t、位置 $\boldsymbol{r}$ において $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0 f(\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{r} - vt)$、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{B}_0 f(\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{r} - vt)$ と表される平面電磁波を考える。ここで、$f(\xi)$ は2回以上微分可能な任意の関数、$\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{B}_0$ は定数ベクトル、$\hat{\boldsymbol{k}}$ は定数の単位ベクトル、v は定数である。これがマクスウェル方程式を満たすには、v はどのような値でなければならないか書きなさい。また、$\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{B}_0$、$\hat{\boldsymbol{k}}$、v の間にどのような関係がなければならないか書きなさい。いずれも解のみで良い。

(3) (2) の平面電磁波に対して、時刻 t、位置 $\boldsymbol{r}$ における電磁場のエネルギー密度 $u(\boldsymbol{r},t)$ とポインティングベクトル $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$ を求めなさい。解は ε、μ、$\boldsymbol{E}_0$、f、$\hat{\boldsymbol{k}}$ のみを用いて表しなさい。また、u、$\boldsymbol{S}$、v、$\hat{\boldsymbol{k}}$ の間の関係を書きなさい。

$\frac{1}{c}$

$\dfrac{1}{\mu \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}}$

$\dfrac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\varepsilon}}$