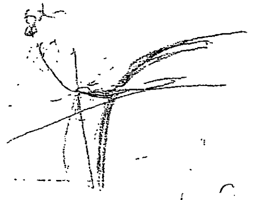
1. (1) $\lim_{x\to 0} \log f(x) = \lim_{x\to 0} x\log x$

$= \lim_{y\to\infty} -\frac{\log y}{y}$

$= \lim_{y\to\infty} -\frac{1}{y}$

$= 0$



∴ $\log x^x = 0$ から $\lim_{x\to 0} x^x = 1$ //

(2) $\log f(x) = x\log x$

∴ $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1+\log x$ ∴ $f'(x) = x^x(1+\log x)$

よって $\lim_{x\to 0} xf'(x) = \lim_{x\to 0} x^x(x+x\log x)$

$= \lim_{x\to 0}(x+x\log x)$ (∵(1)より)

$= 0$ (∵(1)) //

2. $f'(x)=3x^2$ より

$(x+h)^3 = x^3+3(x+\theta h)^2 h$

$\cancel{x^3}+\cancel{3x^2h}+3xh^2+h^3 = \cancel{x^3}+\cancel{3x^2h}+6\theta h^2 x+3\theta^2 h^3$

∴ $3x+h = 6\theta x+3\theta^2 h$

i) $x=0$のとき

$h = 3\theta^2 h$

∴ $\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (∵ $0<\theta<1$)

よってこのとき

$\lim_{h\to 0}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ii) $x\neq 0$のとき

$3h\theta^2+6x\theta-(3x+h)=0$

∴ $\theta = \frac{3x+h}{6x} - \frac{3h\theta^2}{6x}$

ここで $|3h\theta^2|<|3h|$ であるから.

$\lim_{h\to 0}\theta = \frac{3x}{6x}$

$= \frac{1}{2}$

以上より、

$x=0$のとき $\frac{1}{\sqrt{3}}$

$x\neq 0$のとき $\frac{1}{2}$ //

3. (1) $f_x = 3x^2-3ay$

$f_y = 3y^2-3ax$

$a\neq 0$として $\begin{cases} x^2-ay=0 \\ y^2-ax=0 \end{cases}$ ∴ $x=0, a$ $y=0, a$

$a=0$のとき $x=y=0$

よって、停留点は $(0,0), (a,a)$ //

(2) $f_{xx}=2x$ $f_{xy}=-a$ $f_{yy}=2y$

点$(0,0)$において、

$f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2 = -a^2<0$

よって、点$(0,0)$は鞍点より (a,a)が極大点になればよい。

点(a,a)において

$f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2 = 4a^2-a^2 = 3a^2>0$

よって、極大値を持つ条件は、$2a \not< 0$ i.e. $a \not< 0$ …①

また、$f(a,a) = a^2 = 2$ ∴ $a=\pm\sqrt{2}$

よって、これと①とより

$a=\sqrt{2}$ //