LINEAR ALGEBRA

POWERED BY MAPHYCS

Contents

Date: January 20, 2018.

Part 1. ベクトル空間

1. アーベル群, 左 K 加群

Def. 1.1. アーベル群 [abelian group]
集合 A が演算 $*$ について以下の性質を持つとき, A を演算 $*$ についてアーベル群 **[abelian group]** または可換群 **[commutative group]** であるという.
(1) 交換律
$$a, b \in A \Rightarrow a * b = b * a$$
(2) 結合律
$$a, b, c \in A \Rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$$
(3) 単位元の存在
$$\exists 1 \in A, \forall a \in A, a * 1 = a$$
(4) 逆元の存在
$$\exists - a \in A, a * (-a) = 1$$

Def. 1.2. 左 K 加群
集合 M がアーベル加群で, K を環として以下の性質を満たすとき, M は左 K 加群 **[left K-module]** という.
(1) 分配法則
$$\lambda \in K \wedge x, y \in M \Rightarrow \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$
$$\lambda \in K \wedge x \in M \Rightarrow (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$
(2) 結合律
$$\lambda, \mu \in K \wedge x \in M \Rightarrow (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$$
(3) K の単位元との関係
$$x \in M \Rightarrow 1_K x = x$$
ただし 1_K は K の乗法単位元.

2. ベクトル空間

Def. 2.1. ベクトルの公理
K を体とする. 集合 V について,
$$x, y \in V \Rightarrow x + y \in V$$
$$\lambda \in K \wedge x \in V \Rightarrow \lambda x \in V$$
が成り立ち, 左 K 加群であるような集合 V を体 K 上のベクトル空間 **[vector space]** という. ベクトル空間 V の元をベクトル **[vector]** といい, 体 K の元をスカラー **[scalar]** という.

ベクトル・スカラーの順の積は定義されない.

Prop. 2.1. ベクトル空間の加群としての性質
$x \in V$ として
(1) V の零元 0_V は唯一つ存在する.
(2) x の加法の逆元 $-x \in V$ がただ一つ存在する.
(3) $-(-x) = x$.

Prf. 1. (1) $0, 0'$ が共に V の零元だと仮定する. 仮定と零元の定義から,
$$0 = 0 + 0' = 0'$$

$$\therefore 0 = 0'.$$

□

(2) $y, y' \in V$ を共に $x \in V$ の逆元と仮定する. 仮定と逆元の性質, 結合法則から,

$$y = y + 0_V = y + (x + y') = (y + x) + y' = 0_V + y' = y'$$

$$\therefore y = y'.$$

□

(3) $-(-x)$ は $-x$ の逆元である. また,

$$x + (-x) = 0_V$$

だから, x も $-x$ の逆元である. 従って逆元の一意性から,

$$-(-x) = x.$$

□

Def. 2.2. 3 つ以上のベクトルの和
結合律より, $x, y, z \in V$ とすると

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

だから, これらをまとめて

$$x + y + z \tag{2.1}$$

と書く. 同様に 3 つ以上のベクトルの和も演算の順序に関わらず

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \tag{2.2}$$

と書く. また, これを省略して

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2.3}$$

と書く.

Prop. 2.2. ベクトル空間の左 K 加群としての性質
$\lambda \in K, x \in V$ として

$$0_K x = \lambda 0_V = 0_V \tag{2.4}$$

$$\lambda x = 0_V \Rightarrow \lambda = 0_K \vee x = 0_V \tag{2.5}$$

$$\lambda(-x) = (-\lambda)x = -\lambda x \tag{2.6}$$

$$(-\lambda)(-x) = \lambda x \tag{2.7}$$

$$(-1_K)x = -x \tag{2.8}$$

Prf. 2. (1)

$$0_K x = (0_K + 0_K)x = 0_K x + 0_K x$$

両辺に $-0_K x \in V$ を加えて,

$$\therefore 0_K x = 0_V.$$

また,

$$\lambda 0_V = \lambda(0_V + 0_V) = \lambda 0_V + \lambda 0_V$$

$$\lambda 0_V = 0_V$$

$$\therefore 0_K x = \lambda 0_V = 0_V.$$

(2)

$$\lambda x = 0_V \tag{2.9}$$

を仮定する. $\lambda = 0_K$ のとき,

$$\lambda = 0_K \lor x = 0_V.$$

$\lambda \neq 0_K$ のとき, eq. (2.9) の両辺に右から λ^{-1} をかけると,

$$x = 0_V$$

$$\therefore \lambda = 0_K \lor x = 0_V.$$

以上より,

$$\lambda x = 0_V \Rightarrow \lambda = 0_K \lor x = 0_V.$$

□

(3)

$$\lambda x + \lambda(-x) = \lambda(x + (-x)) = \lambda 0_V = 0_V$$

$$\therefore \lambda(-x) = -\lambda x.$$

また,

$$\lambda x + (-\lambda)x = (\lambda + (-\lambda))x = 0_K x = 0_V$$

$$\therefore (-\lambda)x = -\lambda x.$$

以上より,

$$\lambda(-x) = (-\lambda)x = -\lambda x.$$

□

(4)

$$(-\lambda)(-x) + (-\lambda x) = (-\lambda)(-x) + (-\lambda)x = (-\lambda)(-x + x) = -\lambda 0_V = 0_V.$$

逆元の一意性から

$$(-\lambda)(-x) = \lambda x.$$

□

(5)

$$(-1_K)x = -1_K x.$$

ベクトルの公理から

$$1_K x = x.$$

$$\therefore (-1_K)x = -x.$$

□

Def. 2.3. 部分ベクトル空間 [linear subspace]
V の部分集合 W が K 上のベクトル空間となるとき, W を V の**部分ベクトル空間 [vector subspace]** という.

Prop. 2.3. W が V の部分ベクトル空間であることの必要十分条件.

$$W \text{ が } V \text{ の部分ベクトル空間} \Leftrightarrow \begin{cases} W \subset V \\ x, y \in W \Rightarrow x + y \in W \\ \lambda \in K \land x \in W \Rightarrow \lambda x \in W \end{cases}$$

Prf. 3. $(\Rightarrow)W$ は V の部分ベクトル空間であると仮定する. 定義より

$$\begin{cases} W \subset V \\ x, y \in W \Rightarrow x + y \in W \\ \lambda \in K \wedge x \in W \Rightarrow \lambda x \in W \end{cases}$$

よって $\Rightarrow$ は示せた.
$(\Leftarrow)$

$$\begin{cases} W \subset V \\ x, y \in W \Rightarrow x + y \in W \\ \lambda \in K \wedge x \in W \Rightarrow \lambda x \in W \end{cases}$$

を仮定すると,

$$\begin{cases} x, y \in W \Rightarrow x + y \in W \\ \lambda \in K \wedge x \in W \Rightarrow \lambda x \in W \end{cases}$$

であり, 任意の $x \in W$ は $x \in V$ でもあるから W の任意の元に関して交換律, 結合律が成り立つ. 零元は $0_W = 0_K x = 0_V \in W$, 逆元は $-x = (-1_K)x$ で定まるので, W は加法に関してアーベル群である. また, $\lambda, \mu \in K \wedge x, y \in W$ として, $x, y \in V$ だから, W は左 K 加群の定義を満たす. 従って W は K 上のベクトル空間かつ $W \subset V$ なので V の部分ベクトル空間である. □

Prop. 2.4. W が V の部分ベクトル空間であることの必要十分条件.
V をベクトル空間として

$$W \text{ が } V \text{ の部分ベクトル空間} \Leftrightarrow \begin{cases} W \subset V \\ \lambda_1, \lambda_2 \in K \wedge x_1, x_2 \in W \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in W \\ 0_V \in W \end{cases}$$

Prf. 4. Proposition 2.3 から,

$$\begin{cases} x, y \in W \Rightarrow x + y \in W \\ \lambda \in K \wedge x \in W \Rightarrow \lambda x \in W. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \in K \wedge x_1, x_2 \in W \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in W. \\ 0 \in W \end{cases}$$

を示せばよい.
$(\Rightarrow)$

$$\lambda_1, \lambda_2 \in K \wedge x_1, x_2 \in W$$

を仮定すると,

$$\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2 \in W$$
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in W$$
$$\therefore \lambda_1, \lambda_2 \in K \wedge x_1, x_2 \in W \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in W.$$

また, W はベクトル空間なので, $0_W \in W$ である. $x, -x \in W$ について $x, -x \in V$ だから, ベクトルの公理から

$$0_W = x + (-x) = 0_V.$$

従って

$$\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \in K \wedge x_1, x_2 \in W \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in W \\ 0_V \in W \end{cases}$$

が成り立つので $\Rightarrow$ は示せた.
$(\Leftarrow)$

$$\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \in K \wedge x_1, x_2 \in W \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in W \\ 0_V \in W \end{cases}$$

を仮定する. $x, y \in W$ とすると, 仮定から

$$1_K x + 1_K y \in W$$

$$x + y \in W$$

$$\therefore x, y \in W \Rightarrow x + y \in W.$$

また, $\lambda \in K, x \in W$ とすると, 仮定から,

$$\lambda x + 0_K 0_V \in W$$

$$\lambda x \in W$$

$$\therefore \lambda \in K \wedge x \in W \Rightarrow \lambda x \in W$$

以上より,

$$\begin{cases} x, y \in W \Rightarrow x + y \in W \\ \lambda \in K \wedge x \in W \Rightarrow \lambda x \in W \end{cases}$$

従って $\Leftarrow$ も示せた. □

Prop. 2.5. W が V の部分ベクトル空間であることの必要十分条件

$$W \text{ が } V \text{ の部分ベクトル空間} \Leftrightarrow \begin{cases} W \subset V \\ \lambda_1, \lambda_2 \in K \wedge x_1, x_2 \in W \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in W \\ W \neq \emptyset \end{cases}$$

Prf. 5. Proposition 2.4 より,

$$\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \in K \wedge x_1, x_2 \in W \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in W \\ 0_V \in W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \in K \wedge x_1, x_2 \in W \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in W \\ W \neq \emptyset \end{cases}$$

を示せばよい.
($\Rightarrow$)

$$\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \in K \wedge x_1, x_2 \in W \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in W \\ 0_V \in W \end{cases}$$

を仮定する. $0_V \in W$ から $W \neq \emptyset$ なので $\Rightarrow$ は示せた.
($\Leftarrow$)

$$\begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \in K \wedge x_1, x_2 \in W \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in W \\ W \neq \emptyset \end{cases}$$

を仮定する. $W \neq \emptyset$ なので $x \in W$ となる x が存在する. 仮定より,

$$0_K x + 0_K x = 0_V \in W.$$

従って $\Leftarrow$ も示せた. □

3. 線型結合と生成する部分ベクトル空間

Cor. 3.1. ベクトルの線形結合もベクトル

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K \wedge x_1, x_2, \ldots, x_n \in V \Rightarrow \sum_i \lambda_i x_i \in V \tag{3.1}$$

Def. 3.1. 線形結合
$\lambda_1, \dots \lambda_n \in K \wedge x_1, \dots, x_n \in W$ として

$$x = \sum_i \lambda_i x_i \tag{3.2}$$

を $x_1, \dots, x_n$ の**線形結合 [linear combination]** という.

Def. 3.2. 生成する部分ベクトル空間
$S \subset V$ の線形結合の集合

$$\mathcal{L}(S) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in K, a_i \in S \right\} \tag{3.3}$$

を S の**生成する部分ベクトル空間 [spanned set]** といい, S を $\mathcal{L}(S)$ の**生成系 [generating set]** という.

Prop. 3.1. 諸定理
(1) $W_a (a \in A) : V$ の部分ベクトル空間 $\Rightarrow \bigcap_{a \in A} W_a : V$ の部分ベクトル空間
(2) $S \subset V$ として $\mathcal{L}(S)$ は V の部分ベクトル空間
(3) $\mathcal{L}(S)$ は S を含む最小の部分ベクトル空間

Prf. 6. (1) W_a は V の部分集合と仮定する. $W := \bigcap_{a \in A} W_a : V$ とおく. Proposition 2.4 から,

$$W \subset V.$$
$$0_V \in W_a$$
$$\therefore 0_V \in W.$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in K \wedge x_1, x_2 \in W$ とすると,

$$\forall a \in A, x_1, x_2 \in W_a$$
$$\forall a \in A, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in W_a$$
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in W$$
$$\therefore \lambda_1, \lambda_2 \in K \wedge x_1, x_2 \in W \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in K \wedge x_1, x_2 \in W$$

従って, Proposition 2.4 から W は V の部分ベクトル空間だから示せた. □

(2) $S \subset V \wedge W := \mathcal{L}(S)$ とする. $x \in W$ は

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \lambda_i \in K, a_i \in S$$

で表されるから Corollary 3.1 より $x \in V$ なので $W \subset V$. また, $y \in W$ とすると

$$y = \sum_{i=1}^{m} \mu_i a'_i, \mu_i \in K, a'_i \in W$$

で表される. $\lambda, \mu \in K$ とすると,

$$\lambda x + \mu y = \lambda\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda\lambda_n a_n + \mu\mu_1 a'_1 + \cdots + \mu\mu_n a'_n.$$

$\mathcal{L}(S)$ の定義より $\lambda x + \mu y \in W$ だから

$$x, y \in W \wedge \lambda, \mu \in K \Rightarrow \lambda x + \mu y \in W$$

また,

$$0_V = \sum_{i=1}^{n} 0_K a_i \in W$$

以上より Proposition 2.4 から W は部分ベクトル空間. □

(3) W を V の部分ベクトル空間として,

$$S \subset W \Rightarrow \mathcal{L}(S) \subset W$$

を示せばよい. $S \subset W$ を仮定する. $x \in \mathcal{L}(S)$ とすると,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \lambda_i \in K, a_i \in S$$

と表せる. Corollary 3.1 より, $x \in W$ だから

$$\mathcal{L}(S) \subset W$$
$$\therefore S \subset W \Rightarrow \mathcal{L}(S) \subset W.$$

□

Prop. 3.2. 張る部分空間と列基本変形
生成する部分空間の生成系 $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ に列基本変形を施しても $\mathcal{L}(S)$ は不変.

$$\begin{cases} \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_n) = \mathcal{L}(a_1, \ldots, \lambda a_k, \ldots, a_n), \lambda \in K/\{0_K\} \\ \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_l, \ldots, a_n) = \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k + \lambda a_l, \ldots, a_l, \ldots, a_n), \lambda \in K \\ \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_l, \ldots, a_n) = \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_l, \ldots, a_k, \ldots, a_n) \end{cases} \tag{3.4}$$

4. 和空間

Def. 4.1. 和空間 [sum space]
W_1, W_2 を V の部分ベクトル空間として次のような集合

$$\{x_1 + x_2 | x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\} \tag{4.1}$$

を W_1, W_2 の**和空間 [sum space]** といい, $W_1 + W_2$ で表す.

Prop. 4.1. 生成する部分空間と和空間
W_1, W_2 を V の部分ベクトル空間とすると $\mathcal{L}(W_1 \cup W_2) = W_1 + W_2$

Prf. 7. $x \in \mathcal{L}(W_1 \cup W_2)$ とすると,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, \lambda_i \in K, a_i \in W_1 \cup W_2.$$
$$a_i \in W_1 \cup W_2 \Leftrightarrow a_i \in W_1 \vee a_i \in W_2$$
$$\therefore x = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_{p(i)} a_{p(i)}}_{W_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{l} \lambda_{q(i)} a_{q(i)}}_{W_2}$$

となるから

$$x \in W_1 + W_2$$
$$\therefore \mathcal{L}(S) \subset W_1 + W_2$$

また, $x \in W_1 + W_2$ とすると,

$$x = x_1 + x_2, x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$$

$x_1, x_2 \in W_1 \cup W_2$ だから,

$$x = x_1 + x_2 \in \mathcal{L}(W_1 \cup W_2).$$

従って

$$W_1 + W_2 \subset \mathcal{L}(W_1 \cup W_2).$$

以上より

$$\mathcal{L}(W_1 \cup W_2) = W_1 + W_2.$$

□

Prop. 4.2. 3 つ以上の部分ベクトル空間の和空間
W_1, W_2, W_3 をそれぞれ V の部分ベクトル空間とすると結合法則

$$(W_1 + W_2) + W_3 = W_1 + (W_2 + W_3) \tag{4.2}$$

以上よりが成り立つ.

Prf. 8.

$$x \in (W_1 + W_2) + W_3$$

を仮定する. 定義より,

$$x = x_{12} + x_3 \wedge x_{12} \in W_1 + W_2 \wedge x_3 \in W_3$$

$$x = x_1 + x_2 + x_3 \wedge x_1 \in W_1 \wedge x_2 \in W_2 \wedge x_3 \in W_3.$$

逆に

$$x = x_1 + x_2 + x_3 \wedge x_1 \in W_1 \wedge x_2 \in W_2 \wedge x_3 \in W_3.$$

を仮定すると, $x \in (W_1 + W_2) + W_3$. 従って

$$x \in (W_1 + W_2) + W_3 \Leftrightarrow x = x_1 + x_2 + x_3 \wedge x_1 \in W_1 \wedge x_2 \in W_2 \wedge x_3 \in W_3.$$

同様に

$$x \in W_1 + (W_2 + W_3) \Leftrightarrow x = x_1 + x_2 + x_3 \wedge x_1 \in W_1 \wedge x_2 \in W_2 \wedge x_3 \in W_3.$$

すなわち

$$x \in (W_1 + W_2) + W_3 \Leftrightarrow x \in W_1 + (W_2 + W_3)$$

$$\therefore (W_1 + W_2) + W_3 = W_1 + (W_2 + W_3)$$

□

Def. 4.2. 3 つ以上の部分ベクトル空間の和空間
W_1, W_2, W_3 を V の部分ベクトル空間とすると

$$(W_1 + W_2) + W_3 = W_1 + (W_2 + W_3)$$

が成り立つのでこれらをまとめて

$$W_1 + W_2 + W_3 \tag{4.3}$$

で表す. 同様に 3 つ以上の部分ベクトル空間の和集合を

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_n \tag{4.4}$$

で表す.

Prop. 4.3. 3 つ以上の部分ベクトル空間の和空間
$W_1, W_2, \ldots, W_n$ をそれぞれ V の部分ベクトル空間とすると,

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_n = \left\{ x \,\middle|\, x = \sum_{i=1}^{n} x_i \wedge x_i \in W_i \right\} \tag{4.5}$$

Prf. 9. 数学的帰納法による. $n = 2$ のときは和空間の定義から明らか. $n = k$ のとき $W_1, \ldots, W_k$ を V の部分ベクトル空間として

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_k = \left\{ x \,\middle|\, x = \sum_{i=1}^{k} x_i \wedge x_i \in W_i \right\}$$

が成り立つと仮定すると, $n = k + 1$ のとき, $W_1, \ldots, W_{k+1}$ を V の部分ベクトル空間として $x \in W_1 + W_2 + \cdots + W_{k+1}$ とすると

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}.$$

従って

$$x \in \left\{ x \middle| x = \sum_{i=1}^{k+1} x_i \land x_i \in W_i \right\}$$

逆に, $x \in \left\{ x \middle| x = \sum_{i=1}^{k+1} x_i \land x_i \in W_i \right\}$ を仮定すると

$$x \in (W_1 + \cdots + W_k) + W_{k+1}$$

だから,

$$x \in W_1 + W_2 + \cdots + W_{k+1} \Leftrightarrow x \in \left\{ x \middle| x = \sum_{i=1}^{k+1} x_i \land x_i \in W_i \right\}$$

$$\therefore W_1 + W_2 + \cdots + W_{k+1} = \left\{ x \middle| x = \sum_{i=1}^{k+1} x_i \land x_i \in W_i \right\}$$

□

5. 直積ベクトル空間

Def. 5.1. 直積ベクトル空間
体 K 上の部分ベクトル空間 W_1, W_2 の直積集合

(5.1) $$W_1 \times W_2 = \{\langle x_1, x_2 \rangle | x_1 \in W_1 \land x_2 \in W_2\}$$

これに和とスカラー倍を以下のように定義したものを直積ベクトル空間という.

(5.2) $$\langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle = \langle x_1 + y_1, x_2 + y_2 \rangle$$

(5.3) $$\lambda \langle x_1, x_2 \rangle = \langle \lambda x_1, \lambda x_2 \rangle$$

Cor. 5.1. 直積ベクトル空間はベクトル空間

6. 直和

Def. 6.1. 直和 [direct sum]
ベクトル空間 V の部分ベクトル空間 $W_1, \ldots, W_n$ に対して V の任意の元 x が

(6.1) $$x = x_1 + \cdots + x_n (x_1 \in W_1, \ldots, x_n \in W_n)$$

と一意的に表されるとき V を $W_1, \ldots, W_n$ の**直和 [direct sum]** といい,

(6.2) $$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$$

または

(6.3) $$V = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$$

で表す.

Prop. 6.1. V が W_1, W_2 の直和であることの必要十分条件

(6.4) $$V = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow \begin{cases} V = W_1 + W_2 \\ W_1 \cap W_2 = \{0_V\} \end{cases}$$

Prf. 10. ($\Rightarrow$) V をベクトル空間, W_1, W_2 をその部分ベクトル空間として $V = W_1 \oplus W_2$ を仮定する. $x \in V$ とすると,

$$x = x_1 + x_2, x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$$

と一意的に表されるので,

$$x \in W_1 + W_2$$

$$\therefore x \in V \Rightarrow x \in W_1 + W_2$$

また, V はベクトル空間だから

$$x \in W_1 + W_2 \Rightarrow x \in V$$

従って

$$V = W_1 + W_2$$

また, $x \in W_1 \wedge x \in W_2$ を仮定すると,

$$x = x_1 + 0_V = 0_V + x_2, x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$$

と書ける. 直和の定義から x の $x = x_1 + x_2$ の形の表示の仕方は一意なので $x_1 = 0_V, x_2 = 0_V$. 従って

$$x \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow x = 0_V$$

$$\therefore W_1 \cap W_2 = \{0_V\}.$$

よって $\Rightarrow$ は示せた.
($\Leftarrow$)

$$\begin{cases} V = W_1 + W_2 \\ W_1 \cap W_2 = \{0_V\} \end{cases}$$

を仮定する. $x \in V$ とすると, 仮定より

$$x = x_1 + x_2, x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$$

と書ける.

$$x = x_1' + x_2', x_1' \in W_1, x_2' \in W_2$$

とすると

$$0_V = (x_1 - x_1') + (x_2 - x_2')$$

$$x_1 - x_1' = x_2' - x_2$$

$x_1 - x_1' \in W_1 \wedge x_2' - x_2 \in W_2$ だから

$$x_1 - x_1' = x_2' - x_2 \in W_1 \cap W_2.$$

仮定より

$$x_1 - x_1' = x_2' - x_2 = 0_V.$$

従って

$$x_1 = x_1', x_2' = x_2$$

だから任意の $x \in V$ は $x = x_1 + x_2, x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$ と一意的に表されるので

$$V = W_1 \oplus W_2.$$

よって $\Leftarrow$ も示せた. □

Prop. 6.2. 直和の結合法則
W_1, W_2, W_3 を V の部分ベクトル空間として

$$(W_1 \oplus W_2) \oplus W_3 = W_1 \oplus (W_2 \oplus W_3) \tag{6.5}$$

Prf. 11. $x \in (W_1 \oplus W_2) \oplus W_3$ とする. 直和の定義から

$$x = x_{12} + x_3, x_{12} \in W_1 \oplus W_2, x_3 \in W_3$$

と一意的に表せる. x_{12} も $x_{12} = x_1 + x_2, x_1 \in W_1, x_2 \in W_2$ と一意的に表せるので結局 x は

$$x = x_1 + x_2 + x_3, x_1 \in W_1, x_2 \in W_2, x_3 \in W_3$$

と一意的に表される.

Prop. 6.3. V が $W_1, \ldots W_n$ の直和であることの必要十分条件

(6.6)
$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i \Leftrightarrow \begin{cases} V = W_1 + \cdots + W_n \\ \forall i = 1, \ldots, n; (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_n) \cap W_i = \{0\} \end{cases}$$

Prf. 12.

Part 2. 線形写像

7. 線形写像

Def. 7.1. 線形写像

体 K 上のベクトル空間 V, W についての写像 $f : V \to W$ が次の性質を同時に満たすとき, f は線形写像である.

(1) $f(x + y) = f(x) + f(y)(x, y \in V)$
(2) $f(\lambda x) = \lambda f(x)(\lambda \in K, x \in V)$

Prop. 7.1. 線形写像 $f : V \to W$ について次が成り立つ.

$$\begin{cases} f(0_V) = 0_W \\ f\left(\sum_i^n \lambda_i x_i\right) = \sum_i^n \lambda_i f(x_i) \end{cases}$$

Prop. 7.2. 次が成り立つ

(1) 恒等写像 $1_V : V \to V$ は線形写像.
(2) $f : V_1 \to V_2, g : V_2 \to V_3$ が線形写像ならば, 合成写像 $g \circ f : V_1 \to V_3$ も線形写像.

8. 像と核

Prop. 8.1. 線形写像 $f : V \to W$ について次が成立する.

(1) V' を V の部分ベクトル空間とすると, $f(V')$ は部分ベクトル空間
(2) W' を W の部分ベクトル空間とすると, $f^{-1}(W')$ は部分ベクトル空間.

Def. 8.1. 像と核

線形写像 $f : V \to W$ について

(1) f の値域

(8.1)
$$\mathrm{Im} f := \{f(x) | x \in V\}$$

を f の**像空間 [image]** という.

(2) f の解空間

$$\mathrm{Ker} f := \{x | f(x) = 0\} \tag{8.2}$$

を f の核 **[kernel]** という.

9. 同型写像

Def. 9.1. 同型写像線形写像 $f : V \to W$ に対して,

$$\begin{cases} f \circ g = 1_V : V \to V & (9.1) \\ g \circ f = 1_W : W \to W & (9.2) \end{cases}$$

を満たす線形写像 $g : W \to V$ が存在するとき, f を同型写像といい,

$$f : V \approx W \tag{9.3}$$

と表す.

Prop. 9.1. 線形写像 $f : V \to W$ について次は同値
(1) f は同型写像.
(2) f は全単射でその逆写像 f^{-1} も全単射.
(3) f は全単射.

Prop. 9.2. (1) 線形写像 $f : V \to W$ が単射であることの必要十分条件は $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ となることである.
(2) 線形写像 $f : V \to W$ が同型写像となることの必要十分条件は $\mathrm{Ker} f = \{0\} \wedge \mathrm{Im} f = W$ となることである.

Prop. 9.3. (1) $1_V : V \to V$ は同型写像.
(2) $f : V \to W$ が同型写像なら, その逆写像 $f^{-1} : W \to V$ も同型写像.

Def. 9.2. 同型なベクトル空間
2 つのベクトル空間 V, W に対して同型写像 $f : V \approx W$ が存在するとき, V と W は同型であるといい, この関係を

$$V \approx W \tag{9.4}$$

と表す.

Prop. 9.4. 同型関係は同値関係.

10. 商ベクトル空間

Def. 10.1. W を V の部分ベクトル空間とする. $x, y \in V$ に対して,

$$y - x \in W \tag{10.1}$$

が成り立つとき,

$$x \equiv y \mod W \tag{10.2}$$

と定義する.

Lem. 10.1.

$$x \equiv y \mod W \tag{10.3}$$

という関係は V の同値関係である.

Lem. 10.2. (1)

$$x \equiv x' \mod W \land y \equiv y' \mod W \Rightarrow x + y \equiv x' + y' \mod W \tag{10.4}$$

(2)

$$\lambda \in K \land x \equiv x' \mod W \Rightarrow \lambda x \equiv \lambda x' \mod W \tag{10.5}$$

11. 準同型定理

Part 3. 基底と次元

Def. 11.1. 線形関係

$a_1, \ldots, a_n \in V$ に対して,

$$c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = 0 \tag{11.1}$$

を線形関係という.

$$c_1 = \cdots = c_n = 0 \tag{11.2}$$

のときを自明な線形関係という. それ以外のとき, つまり

$$\exists i, c_i \neq 0 \tag{11.3}$$

のときを非自明な線形関係という.

Def. 11.2. 線形独立・線形従属

ベクトルの組 $a_1, \ldots, a_n$ の線形関係

$$c_1 a_1 + \cdots + c_n a_n = 0 \tag{11.4}$$

に関して, 非自明な線形関係が存在しないとき, $a_1, \ldots, a_n$ は線形独立であるといい, 非自明な線形関係が存在するとき, $a_1, \ldots, a_n$ は線形従属であるという.

Def. 11.3. 有限次元と無限次元

ベクトル空間 V の n 個の元の組 $a_1, \ldots, a_n$ で線形独立なものが存在し, 任意の $n+1$ 個の元の組が線形従属のとき, V は有限次元ベクトル空間でその次元は n であるといい,

$$\dim V = n \tag{11.5}$$

と書く. また任意の自然数 n に対し線形独立な組 $a_1, \ldots, a_n$ が存在するとき, V は無限次元ベクトル空間で, このことを

$$\dim V = \infty \tag{11.6}$$

で表す.

Def. 11.4. 基底

$\mathcal{B} = b_1, \ldots, b_n$ に対し, $V = \mathcal{L}(\mathcal{B})$ かつ $b_1, \ldots, b_n$ が線形独立のとき $\mathcal{B}$ を V の基底という.

Prop. 11.1. $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ が V の基底になることの必要十分条件

$\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ が V の基底となるための必要十分条件は V の任意の元が

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i, \lambda_i \in K \tag{11.7}$$

の形に一意的に表されることである. すなわち

$$\begin{cases} x \in V \Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i & (11.8) \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i b_i \Rightarrow \lambda_i = \lambda'_i & (11.9) \end{cases}$$

Def. 11.5. 座標
$\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ が V の基底であるとき, V の元 x は線型結合

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i, \lambda_i \in K \tag{11.10}$$

で一意的に表せる. この係数の組 ${}^t[\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \in K^n$ を x の $\mathcal{B}$ に関する**座標 [coordinates]** という.

Cor. 11.1. V の元を基底 $\mathcal{B}$ に関する座標に対応させる写像

$$\phi : x \mapsto^t [\lambda_1, \ldots, \lambda_n] \tag{11.11}$$

は同型写像である.

12. 基底と次元に関する諸性質

13. 部分ベクトル空間と次元・補空間

14. 線形写像と次元

15. 線形写像の行列表示

Def. 15.1. 行列
$T_n = \{1, \ldots, n\}$ として写像 $a : T_n \times T_m \to K$ を縦と横に並べたもの

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{15.1}$$

を**行列 [matrix]** といい, a_{ij} をその行列の**要素 [element]** という.

V, W を有限次元ベクトル空間とする. $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}, \mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_m\}$ をそれぞれ V, W の基底とし, $f : V \to W$ を線形写像とする. V の任意の元 x は

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i a_i, \mu_i \in K \tag{15.2}$$

で表される. また, $f(a_j) \in W$ は

$$f(a_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{iaj} b_i, a_{ij} \in K \tag{15.3}$$

で表される. 従って f の線形性から

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^j f(a_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a^i_j \lambda^j b_i \tag{15.4}$$

が成り立つ. $f(x) \in W$ なので

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i b_i \tag{15.5}$$

と表されるので, $f(x)$ の $\mathcal{B}$ における座標は

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j \lambda^j \tag{15.6}$$

となる. この a^i_j を縦と横に並べたもの

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{15.7}$$

を f の表現行列という.

Def. 15.2. 行列の積
有限次元ベクトル空間から

16. 有限次元ベクトル空間

Part 4. 計量ベクトル空間

Def. 16.1. 内積空間
体 $K(=\mathbb{C},\mathbb{R})$ 上の線形空間 $\mathcal{H}$ に次の性質を満たす二項演算 $(,)_{\mathcal{H}} : \mathcal{H}^2 \to K$, すなわち**内積 [inner product]** が定義されているとき, これを体 K 上の**内積空間 [inner product space]** または**前ヒルベルト空間 [pre-Hilbert space]** という.
正値性

$$\psi \in \mathcal{H} \Rightarrow (\psi,\psi)_{\mathcal{H}} > 0 \tag{16.1}$$

正定値性

$$\psi \in \mathcal{H} \wedge (\psi,\psi)_{\mathcal{H}} = 0 \Rightarrow \psi = 0 \tag{16.2}$$

線形性

$$\psi,\phi_1,\phi_2 \in \mathcal{H} \wedge \alpha,\beta \in K \Rightarrow (\psi,\alpha\phi_1+\beta\phi_2)_{\mathcal{H}} = \alpha(\psi,\phi_1)+\beta(\psi,\phi_2) \tag{16.3}$$

対称性

$$\psi,\phi \in \mathcal{H} \Rightarrow (\psi,\phi)_{\mathcal{H}} = (\phi,\psi)^*_{\mathcal{H}} \tag{16.4}$$

17. ノルムと各不等式

Def. 17.1. ノルム [norm]
体 K 上の内積空間 $\mathcal{H}$ の元 $\psi \in \mathcal{H}$ に対して

$$\|\psi\| := \sqrt{(\psi,\psi)} \tag{17.1}$$

をノルムという.

Prop. 17.1. シュワルツの不等式
内積空間の 2 元 $\psi,\phi \in \mathcal{H}$ に関し,

$$\|\psi\|\|\phi\|\| \geq |(\psi,\phi)| \tag{17.2}$$

が成り立つ.

Prf. 13. $\psi, \phi \in \mathcal{H} \wedge t \in \mathbb{R}$ として

$$\|\psi + t\phi\|^2 \geq 0$$
$$(\psi + t\phi, \psi + t\phi) = \|\psi\|^2 + 2t\mathrm{Re}((\psi, \phi)) + t^2\|\phi\|^2 \geq 0$$

この等式が任意の t で成り立つための必要十分条件は, 右辺の t に関する二次関数の判別式を D として

$$\frac{D}{4} = \left\{\frac{(\psi, \phi) + (\phi, \psi)}{2}\right\}^2 - \|\psi\|^2\|\phi\|^2 \leq 0$$
$$\therefore \|\psi\|\|\phi\| \geq |(\psi, \phi)|.$$

□

Prop. 17.2. 三角不等式
体 K 上の内積空間 $\mathcal{H}$ の２つのベクトル $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ に関して次が成り立つ.

(17.3)
$$\|\psi + \phi\| \leq \|\psi\| + \|\phi\|$$

これは三角不等式と呼ばれる.

Prf. 14. $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ について,

$$\begin{aligned} &(\|\psi\| + \|\phi\|)^2 - \|\psi + \phi\|^2 \\ = &\|\psi\|^2 + 2\|\psi\|\|\phi\| + \|\phi\|^2 - \|\psi\|^2 - 2\mathrm{Re}((\psi, \phi)) - \|\phi\|^2 \\ = &2(\|\psi\|\|\phi\| - \mathrm{Re}((\psi, \phi))). \end{aligned}$$

と書ける.

$$\mathrm{Re}((\psi, \phi)) \leq |(\psi, \phi)| \leq \|\psi\|\|\phi\|$$

だから,

$$(\|\psi\| + \|\phi\|)^2 - \|\psi + \phi\|^2 \geq 0$$
$$\therefore \|\psi + \phi\| \leq \|\psi\| + \|\phi\|.$$

□

18. 距離

Def. 18.1. 距離関数
ベクトル $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ の距離を

(18.1)
$$d(\psi, \phi) := \|\psi - \phi\|$$

で定義する.

19. 完備性とヒルベルト空間

Def. 19.1. 点列と極限
自然数の集合 $\mathbb{N}$ から内積空間 $\mathcal{H}$ への写像 $\psi : n \mapsto \psi_n$ を点列といい,

(19.1)
$$\{\psi\}_{n=1}^{\infty}$$

で表す.

(19.2)
$$\lim_{n\to\infty}(\psi_n, \psi) = 0$$

を満たすとき, ψ_n は ψ に収束するといい,

(19.3)
$$\psi_n \to \psi$$

と書く. この ψ を点列の極限 [limit] という. 収束する点列を収束列 **[convergent sequence]** という.

Def. 19.2. コーシー列 [Cauchy sequence]
$\mathcal{H}$ の点列 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ のうち,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n, m > N \Rightarrow d(\psi_n, \psi_m) < \varepsilon \tag{19.4}$$

を満たすような点列をコーシー列あるいは基本列 [fundamental sequence] という.

Def. 19.3. ヒルベルト空間 [Hilbert space]
内積空間 $\mathcal{H}$ の任意のコーシー列が収束するとき, $\mathcal{H}$ はヒルベルト空間という.

20. 正規直交系

Def. 20.1. クロネッカーのデルタ [Kronecker delta]
次式で定義される写像 $\delta_{ij} : \mathbb{N}^2 \to \{0, 1\}$ を**クロネッカーのデルタ [Kronecker delta]** という.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{20.1}$$

Def. 20.2. 正規直交系 [orthonormal system]
内積空間 $\mathcal{H}$ のベクトルの集合 $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ において,

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} \tag{20.2}$$

が成り立つとき $\mathcal{B}$ を**正規直交系 [orthonormal system]** という. ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタである.

21. グラム・シュミットの直交化法

Thm. 21.1. グラム・シュミットの直交化法 *[Gram-Schmidt orthonormalization]*
線形独立な系 $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ が内積空間 $\mathcal{H}$ の基底のとき,

$$u_i := b_i - \frac{\langle b_j, u_1 \rangle}{\langle u_i, u_1 \rangle} b_1 - \cdots - \frac{\langle b_j, u_{i-1} \rangle}{\langle u_i, u_{i-1} \rangle} b_{i-1} \tag{21.1}$$

とすれば,

$$u_i \neq 0_{\mathcal{H}}, \langle u_i, u_j \rangle = \|u_i\|^2 \delta_{ij} \tag{21.2}$$

が成り立ち, $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ に対し

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}) = \mathcal{L}(\mathcal{U}) \tag{21.3}$$

が成り立つ. すなわち $\mathcal{U}$ もまた V の基底である. また $\mathcal{U}$ を

$$e_i := \frac{u_i}{\|u_i\|} \tag{21.4}$$

直交化すれば, 正規直交基底 $\mathcal{E} = \{e_1 \ldots, e_n\}$ が得られる.

Prf. 15.

22. 直交行列

Def. 22.1. 直交行列
次の等式を満たすような行列 T を直交行列という.

$$T^t T = {}^t T T = I \tag{22.1}$$

Part 5. 行列式

23. 置換

Def. 23.1. 置換 [permutation]
$X = \{1, \ldots, n\}$ から X への全単射

$$\sigma : X \to X \tag{23.1}$$

を n 次の**置換 [permutation]** といい,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{23.2}$$

と書く.

24. 行列式

Def. 24.1. 行列式

Part 6. 固有値・固有ベクトル・対角化

Def. 24.2. 固有値・固有ベクトル A を行列, x をベクトルとして

$$Ax = \lambda x, \lambda \in K \tag{24.1}$$

となるとき, λ を**固有値 [eigenvalue]**, x を**固有ベクトル [eigenvector]** という.

Part 7. エルミート行列・ユニタリー行列

Def. 24.3. 複素転置行列
複素行列 A に対しその複素転置行列を

$$A^\dagger := \bar{A}^* \tag{24.2}$$

で表す.

Def. 24.4. エルミート行列
正方行列 A が

$$A = A^\dagger \tag{24.3}$$

を満たすとき A を**エルミート行列 [Hermitian matrix]** という.

Prop. 24.1. エルミート行列の固有値は実数.

$$Ax = \lambda x \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \tag{24.4}$$

Def. 24.5. ユニタリー行列
正方行列 U が

$$U^\dagger U = {}^\dagger UU = I \tag{24.5}$$

を満たすとき U を**ユニタリー行列 [unitary matrix]** という.

Part 8. 線形常微分方程式

Def. 24.6. 斉次微分方程式

$$\frac{d^n f}{dx^n} + \cdots + \frac{df}{dx} = 0 \tag{24.6}$$

の形の微分方程式を斉次微分方程式という.

Def. 24.7. 非斉次微分方程式

$$\frac{d^n f}{dx^n} + \cdots + \frac{df}{dx} = b(x) \tag{24.7}$$

の形の微分方程式を非斉次微分方程式という.

References

[1] 白岩謙一. 基礎課程 線形代数入門. 初版, サイエンス社, 1976, 244p.
[2] 斎藤正彦. 基礎数学 1 線形代数入門. 初版, 東京大学出版会, 1966, 274p.
[3] 新井朝雄. ヒルベルト空間と量子力学. 改訂増補版, 共立出版株式会社, 2014, 338p.
[4] 慶應義塾大学数理科学科. 数学 2・数学 4. 第 2 版, 学術図書出版社, 2016, 264p.