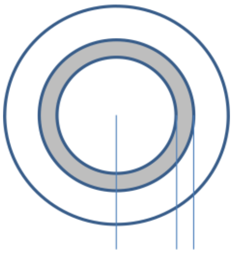
2008 年度物理 B 定期試験解答

問題 I

(1) $Q = \iiint_{\Omega} \rho(r) dV$



球殻状の体積要素を考え半径 0 から a まで積分すればよい。

$$Q = \int_0^a \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$= \int_0^a \frac{\lambda}{r^2} \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$= \int_0^a 4\pi\lambda dr$$

$$= 4\pi\lambda a$$

(2) 半径 r の球面にガウスの法則を適用する。

$r \le a$ のとき

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{4\pi\lambda r}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E(r) = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 r}$$

$a < r$ のとき

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^a \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{4\pi\lambda a}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E(r) = \frac{\lambda a}{\varepsilon_0 r^2}$$

(3) $r \le a$ のとき

$$\phi(r) = \int_r^a E(r) dr + \int_a^\infty E(r) dr$$

$$= \int_r^a \frac{\lambda}{\varepsilon_0 r} dr + \int_a^\infty \frac{\lambda a}{\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \ln\frac{a}{r} + \frac{\lambda}{\varepsilon_0}$$

$a < r$ のとき

$$\phi(r) = \int_r^\infty E(r) dr$$

$$= \int_r^\infty \frac{\lambda a}{\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= \frac{\lambda a}{\varepsilon_0 r}$$

(4) $U = \frac{1}{2}\int_0^a \rho(r)\phi(r) 4\pi r^2 dr$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a 4\pi\lambda \cdot \frac{\lambda}{\varepsilon_0}(\ln a - \ln r + 1) dr$$

$$= \frac{2\pi\lambda^2}{\varepsilon_0}\left[(\ln a + 1)a - a\ln a + a\right]$$

$$= \frac{4\pi\lambda^2 a}{\varepsilon_0}$$

(別解)

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_0^\infty E(r)^2 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_0^a E(r)^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_a^\infty E(r)^2 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_0^a \left(\frac{\lambda}{\varepsilon_0 r}\right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_a^\infty \left(\frac{\lambda a}{\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{2\pi\lambda^2 a}{\varepsilon_0} + \frac{2\pi\lambda^2 a}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{4\pi\lambda^2 a}{\varepsilon_0}$$

問題Ⅱ

(1) $\mathrm{div}\,\mathbf{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\rho=\begin{cases}2\varepsilon_0 A & (z>0)\\ 2\varepsilon_0 A & (z<0)\end{cases}$$

(2) 電荷面密度を ω とする。$z=0$ 面を面積 S の平面で挟み，ガウスの法則を適用する。

$$\iint E_{\mathrm{n}}dS'=\frac{1}{\varepsilon_0}\iint \omega dS'$$

平面に対し垂直な電界成分は E_z に等しいので，

$$2S\cdot E_0=\frac{1}{\varepsilon_0}\omega S$$

$$\omega=2\varepsilon_0 E_0$$

(3) $\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\,\phi$

$z>0$ のとき

$$\mathbf{E}(r)=(Ax+Ay,Ax+Ay,E_0)$$

$$-\mathrm{grad}\,\phi=(-2\alpha x-\beta y,-\beta x-2\gamma y,-\mu)$$

各成分を比較すると，

$$\alpha=-\frac{A}{2},\quad \beta=-A,\quad \gamma=-\frac{A}{2},\quad \mu=-E_0$$

$z<0$ のとき

$$\alpha=-\frac{A}{2},\quad \beta=-A,\quad \gamma=-\frac{A}{2},\quad \mu=E_0$$

問題Ⅲ

(1) (a) $I=\iint i_n dS=iS$

よって $i=\dfrac{I}{S}$

(b) $i=\dfrac{E}{\rho}$

よって $E(x)=\rho(x)i=\dfrac{\rho_0 Ix}{dS}$

(c) $\Delta V=\int_0^d E(x)dx=\left[\dfrac{\rho_0 Ix^2}{2dS}\right]_0^d=\dfrac{\rho_0 Id}{2S}$

(d) $R=\dfrac{\Delta V}{I}=\dfrac{\rho_0 d}{2S}$

(2) (a) キルヒホッフの第 2 法則から

$$RI_2(t)+rI_1(t)=V$$

$$\frac{Q(t)}{C}+rI_1(t)=V$$

(どちらかの式の代わりに $RI_2(t)=\dfrac{Q(t)}{C}$ としてもよい)

電荷保存則から

$$\iint i_{\mathrm{n}}dS=-\frac{dQ}{dt}$$

$$\therefore\ -I_1(t)+I_2(t)=-\frac{dQ(t)}{dt}$$

(b) $Q(0)=0$

または

$$\begin{cases}I_2(0)=0\\ I_1(0)=\dfrac{V}{r}\end{cases}$$

問題Ⅳ

(1) $\mathbf{r}_{\mathrm{p}}=(0,0,z),\quad \mathbf{r}=(a,0,0)$

$$Id\mathbf{s}=(0,Ids,0)$$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{p}}-\mathbf{r}=(-a,0,z)$$

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}}(zIds,0,aIds)=\frac{\mu_0 Ids}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}}(z,0,a)$$

(2) 対称性から x,y 成分は打ち消しあう。

よって $\mathbf{B}$ は z 方向を向いている。

z 成分は円周上のどこからの寄与も同じなので，

$$B_z=\frac{\mu_0 Ia}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}}\cdot 2\pi a=\frac{\mu_0 Ia^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}$$

問題Ｖ

アンペールの法則を半径 r の円周に適用する。

$$\oint B_t ds = \mu_0 I$$

$$B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 I(r)$$

ただし $I(r)$ は円周を貫く電流である。

$$\therefore \quad B(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r}$$

電流密度は

$$i = \frac{I}{\pi b^2 - \pi a^2} = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}$$

よって

$$I(r) = \begin{cases} 0 & (r \le a) \\ I\dfrac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} & (a \le r \le b) \\ I & (b \le r) \end{cases}$$

したがって

$$B(r) = \begin{cases} 0 & (r \le a) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\dfrac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} & (a \le r \le b) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & (b \le r) \end{cases}$$