2008年度物理B定期試験　解答

問題 I

微分型のガウスの法則 $divE = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ を使います。ここで、電荷の分布が x,y に依存いないから、z のみの関数になります。

$$\frac{\alpha E}{\alpha z} = \frac{\beta z}{\epsilon_0}$$

E を z に関して積分すると、

$$E = \frac{\beta}{\varepsilon_0}\int_o^z \beta z dz$$

z と a の関係を考えると、内部と外部を分けて計算します。

$$A = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\beta}{\epsilon_0}z^2 & z < a \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\beta}{\epsilon_0}a^2 & z > a \end{cases}$$

のようになります。

問題 II

(1)

ここでまずはガウス　$\iint Eds = \dfrac{Q}{\epsilon_0}$ の法則を使います。代入すると、$E \cdot 2\pi hr = \dfrac{Q}{\epsilon_0}$ になります。さらに変換すると

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 hr}$$

(2)

電位差は電界 E を積分することによって得られます。

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b E dr \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\int_a^b \frac{1}{r}dr \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\ln\frac{b}{a} \end{aligned}$$

電気容量は$C = Q/V$によって計算できます。

$$C = Q/V = \frac{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\ln\frac{b}{a}}{Q} = \frac{\ln b - \ln a}{2\pi\epsilon_0 h}$$

(3)

$I = \frac{V}{R} = \frac{Q}{CR}$ に $I = -\frac{dQ}{dt}$ を代入すると、

$$-\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{CR}$$
$$-dQ = Q\frac{1}{CR}dt$$
$$-Idt = Q\frac{1}{CR}dt$$

両辺に同時にdtの項を消し、さらに両辺に同時に微分すると

$$-dI = I\frac{1}{CR}dt$$

整理しますと

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{CR}dt$$

積分しますと

$$\ln I = -\frac{t}{CR} + A$$

さらに変形しますと

$$I = A'e^{-t/CR}$$

ここで、初期値$I_0 = V/R = Q/CR$を代入します

$$I = \frac{Q}{CR}e^{-t/CR}$$

問題 III

(1)

$\mathbf{E} = -grad\phi$を代入すると、

$$\mathbf{E} = -grad\phi = -(\frac{\alpha}{\alpha x}, \frac{\alpha}{\alpha y}, \frac{\alpha}{\alpha z})\phi = -(2Ax + b, 2Ay, 2Az)$$

(2)

$divE = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ を (1) の結果に代入して、電荷密度が以下のようになります。

$$\rho = \epsilon_0(\frac{\alpha}{\alpha x} + \frac{\alpha}{\alpha y} + \frac{\alpha}{\alpha z})E = -6\epsilon_0 A$$

総電荷が

$$Q = \iiint \rho dV = -6\pi A\epsilon_0 \frac{4}{3} r|_0^3 = -8\pi A\epsilon_0 a^3$$

となります。

(3)

まず、球内と球外の２つの場合で電界を考えると、ガウスの法則を適します。

$$r < a, \iint E_{in} ds = \frac{\iiint_0^r 6\epsilon_0 A dV}{\epsilon_0} \rightarrow E_{in} = -2Ar$$

$$r > a, \iint E_{out} ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E_{out} = -2Aa^3/r^2$$

電界を積分して、電位を表す。

$$\begin{aligned}
\phi_{(r)} &= \int_\infty^a E_{out} dr + \int_a^r E_{in} dr \\
&= 2Aa^3 \int_\infty^a r^{-2} dr + 2A \int_a^r r dr \\
&= 2Aa^2 + A(r^2 - a^2) \\
&= Aa^2 + Ar^2
\end{aligned}$$

また、$B = 0$ から、$\phi_{(r)} = Ar^2 + C$ になります。上の計算と比較すると、$\phi_0 = C = Aa^2$ になり、

$$C = Aa^2$$

となります。

(4)

静電エネルギーを以下のように計算します。

$$U = \iiint \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

内部と外で分けて、代入しますと

$$\begin{aligned}
&= \int_\infty^a \frac{1}{2}\epsilon_0 (-2Aa^3/r^2)^2 4\pi r^2 dr + \int_a^0 \frac{1}{2}\varepsilon_0 (-2Ar)^2 4\pi r^2 dr \\
&= 8\pi\epsilon_0 A^2 a^6 \cdot -(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{a}) + 8\pi\epsilon_0 A^2 \frac{1}{5} \cdot (a^5 - 0) \\
&= \frac{48}{5}\pi\epsilon_0 A^2 a^5
\end{aligned}$$

問題 IV

(1)

$E = V/l$ と $\mathbf{i} = \sigma E$ を連立して、

$$\mathbf{i} = \lambda r V/l$$

積分すると、電流が

$$I = \iint_0^a \lambda rV/l ds = \frac{2\pi\lambda V}{l}\iint_0^a r^2 dr = \frac{2\pi\lambda Va^3}{3l}$$

のようにあらわす。

(2)

アンペールの法則によると、$\oint B_t ds = \mu_0 I$。(1) で計算された I の値を中と外の 2 つの場合で計算してみると、

$$\begin{cases} r > a, \quad 2\pi rB = \dfrac{2\pi\mu_0\lambda Va^3}{3l} \rightarrow \quad B = \dfrac{\mu_0\lambda Va^3}{3lr} \\ r < a, \quad 2\pi rB = \dfrac{2\pi\mu_0\lambda Vr^3}{3l} \rightarrow \quad B = \dfrac{\mu_0\lambda Vr^2}{3l} \end{cases}$$

のようになります。