慶應義塾大学試験問題用紙（日吉）

試験時間	~~50分~~	90分

平成 15 年 7 月 24 日（木）6 時限施行	理工 学部 学科 1 年 16 組		採点欄 ※
担当者名	数学 A1 担当者全員	学籍番号 6 0 3 1 3 3 0 9	103/105
科目名	数学 A1	氏名 竹下 覚	

とてもよくできています。

25

(1) $1+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = a_1\frac{1}{n} + a_2\frac{1}{n^2} + a_3\frac{1}{n^3} + \delta_n$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\delta_n}{n^3} = 0$ と表わすとき a_1, a_2, a_3 を求めなさい。

$1+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = 1 - n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ テイラー展開より

$= 1 - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \cdots\right)$

$= \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{4n^3} - \cdots$

ここで n^{-4} 次以上の項は $\frac{(n^{-4}\text{次以上の項})}{n^3} \to 0 \ (n\to\infty)$

なので、 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{4}$

(2) $e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1 + b_1\frac{1}{n} + b_2\frac{1}{n^2} + \epsilon_n\right)$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\epsilon_n}{n^2} = 0$ と表わすとき b_1, b_2 を求めなさい。

両辺の対数をとり、

$1 - n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(1 + b_1\frac{1}{n} + b_2\frac{1}{n^2} + \epsilon_n\right)$

(1)より、(左辺) $= \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + (n^{-3}\text{次以上の項})$

テイラー展開より

(右辺) $= b_1\frac{1}{n} + b_2\frac{1}{n^2} + \epsilon_n - \frac{1}{2}\left(b_1\frac{1}{n} + b_2\frac{1}{n^2} + \epsilon_n\right)^2 + (n^{-3}\text{次以上の項})$

$= b_1\frac{1}{n} + b_2\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}b_1^2\frac{1}{n^2} + (n^{-3}\text{次以上の項})$

$\therefore b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 - \frac{b_1^2}{2} = -\frac{1}{3}$ より

$b_2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{8} = -\frac{5}{24}$

$z = f(x,y)$ を $D = \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y+x>0,\ y-x>0\right\}$ 上の C^2 級関数とする。$2x = uv$, $4y = u^2+v^2$ とするとき、$\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$ を z の x, y に関する偏導関数と x, y で表わしなさい。

$\frac{\partial z}{\partial u} = f_x\frac{\partial x}{\partial u} + f_y\frac{\partial y}{\partial u} = f_x\frac{v}{2} + f_y\frac{u}{2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v}{2}f_x + \frac{u}{2}f_y\right)$

$= \frac{1}{2}f_x + \frac{v}{2}\left(f_{xx}\frac{\partial x}{\partial v} + f_{xy}\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{u}{2}\left(f_{yx}\frac{\partial x}{\partial v} + f_{yy}\frac{\partial y}{\partial v}\right)$

$= \frac{1}{2}f_x + \frac{v}{2}\left(f_{xx}\frac{u}{2} + f_{xy}\frac{v}{2}\right) + \frac{u}{2}\left(f_{xy}\frac{u}{2} + f_{yy}\frac{v}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}f_x + \frac{uv}{4}\left(f_{xx} + f_{yy}\right) + \left(\frac{u^2+v^2}{4}\right)f_{xy}$

$= \frac{1}{2}f_x + \frac{x}{2}\left(f_{xx} + f_{yy}\right) + y f_{xy}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} = \frac{1}{2}z_x + \frac{x}{2}\left(z_{xx} + z_{yy}\right) + y z_{xy}$

3. $f(x,y,z) = \sin x \sin z + e^y - z$ とおく。

23

(1) $f(x,y,z) = 0$ に対し $(x,y,z) = (0,0,1)$ の近くで陰関数 $z = g(x,y)$ が存在することを示しなさい。また $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ を x, y, z で表わしなさい。

$f(0,0,1) = e^0 - 1 = 0$

$f_z = \sin x\cos z - 1$, $f_z(0,0,1) = -1 \neq 0$

陰関数定理より、$(0,0,1)$ の近くで陰関数 $z = g(x,y)$ が唯一存在する。

15

$f_x = \sin z\cos x$　$f_y = e^y$ より

$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = \frac{-\sin z\cos x}{\sin x\cos z - 1} = \frac{\sin z\cos x}{1 - \sin x\cos z}$

$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z} = \frac{e^y}{1 - \sin x\cos z}$