Date . . No.

3) $P^{-1}XP = \begin{bmatrix} \frac{5+\sqrt{17}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{17}}{2} \end{bmatrix}$ であるから

$$X^n = P(P^{-1}XP)^n P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1+\sqrt{17} & 1-\sqrt{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)^n \end{bmatrix} \frac{1}{8\sqrt{17}} \begin{bmatrix} \sqrt{17}-1 & 4 \\ \sqrt{17}+1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{17}-1}{2\sqrt{17}}\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{17}+1}{2\sqrt{17}}\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)^n & \frac{2}{\sqrt{17}}\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)^n - \frac{2}{\sqrt{17}}\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)^n \\ \frac{2}{\sqrt{17}}\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)^n - \frac{2}{\sqrt{17}}\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)^n & \frac{\sqrt{17}+1}{2\sqrt{17}}\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)^n - \frac{1-\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)^n \end{bmatrix}$$

よって

$$(a, X^n a) = \left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)^n \left(\frac{\sqrt{17}+1}{2\sqrt{17}}x^2 + \frac{4}{\sqrt{17}}x + \frac{\sqrt{17}-1}{2\sqrt{17}}\right) + \left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)^n \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2\sqrt{17}}x^2 - \frac{\sqrt{17}+1}{2\sqrt{17}}\right)$$

ここで $\sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25}$ より $0 < \frac{5-\sqrt{17}}{2} < \frac{1}{2}$ —— ①

$(1<)\ \frac{3}{2} < \frac{2+\sqrt{17}}{2}$ —— ②

①②より 求める条件は

$$\frac{\sqrt{17}+1}{2\sqrt{17}}x^2 + \frac{4}{\sqrt{17}}x + \frac{\sqrt{17}-1}{2\sqrt{17}} = 0 \iff x = \frac{1-\sqrt{17}}{4} \ //$$

[6] 1) Aの固有方程式 $f_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$

よってAの固有値は $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

λ_1, λ_2に対応する固有ベクトルを p_1, p_2とすると

$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ p_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

よって求める基本行列 $\Phi(t)$ は $[e^{\lambda_1 t}p_1, e^{\lambda_2 t}p_2] = \begin{bmatrix} e^t & 3e^{2t} \\ -e^t & -4e^{2t} \end{bmatrix}$ //

2) 1)の同次方程式の一般解を $x_0(t)$ とすると

$$x_0(t) = \Phi(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t + 3c_2 e^{2t} \\ -c_1 e^t - 4c_2 e^{2t} \end{bmatrix}$$

2)の非同次方程式の一つの解を $x_1(t)$ として、

$x_1(t) = u(t)\Phi(t)$ の形で求める。