担当教員：坂内 健一　研究室：矢上 14 棟 443　E-mail:bannai@math.keio.ac.jp

中間試験

December 1, 2010　http://www.math.keio.ac.jp/~bannai/

基礎問題

問題 1. 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+1}$　(2) $\displaystyle\int 2xe^{x^2}dx$　(3) $\displaystyle\int \log(x)dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{(x^2-2x+3)}{(x^2-3)(x-1)}dx$　(5) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$　(6) $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$

導出過程は書かなくて良いです。答えの検算は必ずしましょう。

標準問題

問題 2. 次の不定積分を計算せよ。導出過程も説明せよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$　(2) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4}\,dx$

問題 3. 次の累次積分の順序を交換せよ。ただし $a>0$ を実数とする。

(1) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 f(x,y)dy$　(2) $\displaystyle\int_1^{e^a} dy \int_{\log(y)}^a f(x,y)dx$

問題 4. 実数 $a>0$ に対し、$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq a\}$ として、次の重積分を考える。

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$$

(1) 上の重積分を、極座標表示を用いて書き直せ。

(2) 上の重積分の値を求めよ。

問題 5. 次の広義重積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-9x^2-12xy-5y^2}\,dxdy$$

慶應義塾大学　OCR対応用紙

数字記入例 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
（OCR上では特に4と9の区別がしにくいので，4は上を閉じないこと）

学籍番号	
氏　名	

1 ページ
（ページ数は必ずご記入ください）

科目名	担当者
数学B1	坂内 健一
年　月　日（水）1 時限	学科(学門)　　年　組
	学科出席番号

注1 学籍番号は数字記入例を参照の上、丁寧に記すこと.
注2 左上にある黒い「基準マーク」付近には何も記さないこと.
注3 裏面を使用する場合には，矢印記号⇒の位置から書き始めること(天地を逆転させないこと).
注4 用紙が複数枚に及ぶ場合，氏名は全ての用紙に記入すること.

中間 カコモン

問1 (1) $\log(x-1)+C$ (2) $\sin x + C$ (3) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

(4) $\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C$ $(t = x+\sqrt{x^2+1})$ (5) $\frac{1}{2}e^{x^2}(x^2-1)+C$ (6) $-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)$

問2 (1) $\arctan x$ (2) $\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x$

($\int \frac{1}{x^2+1}dx$ の部分積分)

問3 (1) $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)\,dy$ (2) $\int_{-1}^{0} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy$

問4 (1) $\iint_{D'} r^3 \sin\theta(\sin\theta + \cos\theta)\,dr\,d\theta$ $D' = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid |r| \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

(2) $\frac{\pi}{4}$

問5 π

$y = r\sin\theta$

$x+y = r\cos\theta$

裏面に続く場合は⇒印の欄から書くこと。

(2009.10 A4-HT)

問1 (1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-1} = \log|x-1| + C$

(2) $\displaystyle\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

(3) $$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{dx}{(x+2)(x-2)}$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\log|x-2| - \log|x+2|\right) + C$$
$$\left(= \frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C\right)$$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

$\sqrt{x^2+1} = y$ とおく

$x^2+1 = y^2$

$x^2 - y^2 = -1$

$y = x + t$ とおく

$x^2 - (x+t)^2 = -1$

$-2xt - t^2 = -1$

$$x = -\frac{t^2-1}{2t}$$
$$dx = -\frac{2t\cdot 2t - 2(t^2-1)}{4t^2}\,dt$$
$$= -\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt$$
$$y = -\frac{t^2-1}{2t} + t$$
$$= \frac{t^2+1}{2t}$$

よって(与式) $$= \int \frac{2t}{t^2+1}\left(-\frac{t^2+1}{2t^2}\right)dt$$
$$= -\int \frac{1}{t}\,dt$$
$$= -\log|t| + C$$
$$= -\log|y-x| + C$$
$$= -\log\left|\sqrt{x^2+1} - x\right| + C$$
$$= \log\left|\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\right| + C$$
$$= \log\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$$

問1 (5) $\int x^3 e^{x^2}\, dx$

$x^2 = y$ とおくと　$x = \sqrt{y}$

$dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int y\sqrt{y}\, e^y \frac{dy}{2\sqrt{y}} \\
&= \frac{1}{2}\int y e^y dy \\
&= \frac{1}{2}\left(y e^y - \int e^y dy \right) \\
&= \frac{1}{2}\left(y e^y - e^y \right) + C \\
&= \frac{1}{2} e^{x^2}(x^2 - 1) + C
\end{aligned}
$$

(6) $\int e^{-x} \sin x\, dx$

$= -e^{-x}\cos x - \int e^{-x} \cos x\, dx$

$= -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\sin x\, dx$

よって

$2\int e^{-x}\sin x\, dx = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$

$\int e^{-x}\sin x\, dx = -\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x)$

問2 (1) $\int \frac{dx}{x^2+1}$

$x = \tan\theta$ とおく

$dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int \frac{1}{\tan^2\theta + 1} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \int d\theta \\
&= \theta \\
&= \arctan x
\end{aligned}
$$

(2) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

$x = \tan\theta$ とおく

$dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int \cos^2\theta\, d\theta \\
&= \int \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\, d\theta
\end{aligned}
$$

問2 (2)(続)

$$= \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2}$$

ここで $x = \tan\theta$ より

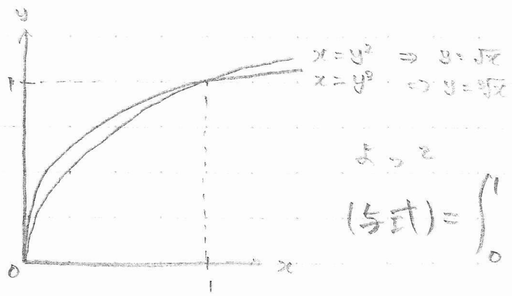
$$\cos^2\theta = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\cos 2\theta = \frac{2}{x^2+1} - 1 = \frac{1-x^2}{x^2+1}$$

$$\sin 2\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{x^2+1}\right)^2} = \frac{2x}{x^2+1}$$

よって (与式) $= \dfrac{x}{2(x^2+1)} + \arctan x$

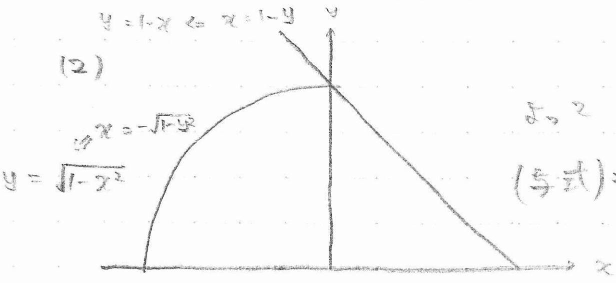
問3 (1)



よって

$$(与式) = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} f(x, y)\, dy$$

(2)



よって

$$(与式) = \int_{-1}^{0} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x,y)\, dy$$

問4　$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおく

$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r \leq 1\}$

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$$

よって

$$(与式) = \iint_D r\sin\theta (r\cos\theta + r\sin\theta) r \, dr d\theta$$

$$= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r^3 (\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta) d\theta$$

↲ ここで

$$= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r^3 \left(\frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{1-\cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

↲ ここで (1)

drとdθ可

$$= \int_0^1 \pi r^3 dr$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

↲ (2)

問5

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-2xy-2y^2} dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+y)^2-y^2} dx dy$$

$y = r\sin\theta$

$x + y = r\cos\theta$ とおく

$x = r(\cos\theta - \sin\theta)$

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$$

$$(与式) = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r \, d\theta$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^R 2\pi r e^{-r^2} dr$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[-\pi e^{-r^2} \right]_0^R$$

$$= \pi$$