1 量化理論-導入-

これまでは、命題論理を考察してきたが、推論一般を形式化するには、命題論理だけでは不十分である。例えば、

$$\begin{array}{c}\text{全ての人間は哺乳類である} \\ \text{全ての哺乳類は四本足である} \\ \hline \text{全ての人間は四本足である。}\end{array}$$

これは正しい推論である。もし、この推論を命題論理を使って記号化しようとすれば、以下のようになるであろう。

$$P \land Q \supset R$$

(各列の文にはいかなる接続語句も現われていない。) しかし、明らかにこの文は恒真ではない。よって、われわれは命題論理で正しい推論を全て形式化できるわけではない。このため、「すべて」や「いくつかの」といった量に関わる表現-**量化表現**-を扱うような論理が必要になってくる。この目的のために考案されたのが**量化理論** quantification theory である。

1.0.1 述語と項

量化理論が真理関数理論と根本的に異なる点の一つはどのような言語を扱っているかということである。量化理論は、真理関数理論が基本単位として扱っていた要素文をさらにその部分へと分析する。 典型的な要素文としては、しかじかの対象がしかじかの性質を所有するということを述べているような要素文が挙げられる。例えば、

例. イチローは大リーガーである。

この例文は、「イチロー」という名前を持つ対象が「大リーガーである」という述語によって表わされる性質を持つということを述べている。

このように、要素文は名前と述語の部分に分けられる。これが、推論に関わる限りでの要素文の形式的構造を考えるにあたって、一番のポイントになる。

形式論理学の観点から言うと、あるいは推論の形式化の目的にとっては、要素文がどのような形式的構造を持っているかということだけが重要なのであって、要素文が具体的にどのような内容を表わしているかということはどうでもよいことである。これをつきつめて考えると、名前や述語がどのような内容を持っているかということはどうでもよい。そこで、われわれは、「イチロー」や「大リーガーである」という具体的な日常表現をそのまま使うかわりに、形式的な表現を採用する。「「大リーガー (である)」のような日常言語の述語のかわりに、**述語記号** predicate symbol を採用する。述語記号として、

$$P, Q, R, \ldots, P_1, P_2, P_3, \ldots$$

を採用する。また、「イチロー」のような固有名詞のかわりに、**個体定項** individual constant を採用する。個体定項としては、

$$c, d, e, \ldots, c_1, c_2, c_3 \ldots$$

を採用することにする。個体定項は形式言語に属する表現である。こうして、上の例文は形式的には以下のように表わされる。

$$Pc$$

これが表わしている内容は、c(によって名指された対象) が P という性質を持っていることである。
要素文が名前 (項) と述語の部分に分けられると述べたが、この分析の仕方についてさらに詳しく見ていくことにしよう。従来の分け方は、この例文を、「西脇 与作」を主語、「教授である」を述語に持つような文であるとしてきた。より一般的には、要素文は主語と述語とに分けられるべきであるとしてきた。

例. 長島 茂雄は長島一茂の親である。

従来の方法によると、この文は「長島茂雄」を主語、「長島一茂の親である」を述語に持つ文として分析されるべきである。つまり、これは長島茂雄が長島一茂の親であるという性質を持っているということを述べる文であるとされてきた。しかし、推論の形式化の目的にとっては、そのような分析ではまったく不十分であることがわかっている。そこで、現代論理学の方法は、見方をさらに細かくして、この文が長島茂雄と長島一茂の間に一定の関係ー親子関係ーがあるということを述べているとする。つまり、「長島茂雄」によって名指された対象が「長島一茂」によって名指された対象と親子の関係にあるということを述べているとするのである。
一項述語として理解した場合、

$$Ps$$

これに対して、二項述語として理解した場合、

$$P'sk$$

この P と P' は全く異なる構造を持った述語として理解されるべきである。
このように、要素文には、単にしかじかの対象がしかじかの性質を持つということを述べるものだけではなく、対象間の関係について述べるものも存在する。
各々の述語にはそれに固有の項の数が存在する。「与野市は大宮市と浦和市の間にある」という文には、「〜の間にある」という三項述語が現われる。
一項の述語は対象についての何等かの性質に対応し、二項の述語は二つの対象の間に成り立つ何等かの関係に対応する。一般に、n 項の述語は n 項の間の関係に対応する。
このように、要素文の形式的構造に関して重要な点は、その中に現われる述語が何項であるかということである。

2 量化理論の言語 QL

ここでは、量化理論の形式的言語 QL を厳密に定義する。

def 2.1 (QL の基本的語彙) 個体定項: $a, b, c, \ldots$

個体変項: $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, x_3, \ldots$

述語記号: $P, Q, R, \ldots, P_1, P_2, \ldots$

論理結合子: $\neg$, $\supset$, $\wedge$,$\vee$,$\equiv$

量化記号: $\forall$,$\exists$

括弧: (,)

def 2.2 (QL の項) *1.* 個体定項は項である。

2. 個体変項は項である。

3. 項は *1* と *2* のみによって作られる全てである。

def 2.3 (QL の論理式) *1.* n-項述語 A について、$A(t_1, \ldots, t_n)$ は論理式である。ここで、$t_1, \ldots, t_n$ は項である。

2. もし、A,B が論理式であれば、$(\neg A)$,$(A \supset B)$,$(A \wedge B)$,$(A \vee B)$,$(A \equiv B)$,$(\forall x A)$,$(\exists x A)$ もまた論理式である。

3. 論理式は *1* と *2* のみによって作られる全てである。

量化理論の言語は、真理関数理論の言語の拡張であると見なすことができる。真理関数理論で単に文記号として扱ってきたものを、量化理論では、さらに述語記号と項に分析するわけである。この論理式の定義に従うと、一項述語 P と Q について $\forall x(P(x) \supset Q(y))$、また三項述語 R について $R(x, a, c)$ は論理式である。これに対して、$\forall P(x)$ は式ではない。式の中では、量化記号は必ず変項と組み合わせて使われなければならない。また、部分式という概念は真理関数理論の場合に準じて定義される。例えば、$\forall x \exists y P(x, y)$ の部分式は、$P(x, y)$、$\exists y P(x, y)$ および $\forall x \exists y P(x, y)$ である。

2.1 量化子の作用域 scope

式 B の部分式 $\forall x A$ における量化子 $\forall x$ の作用域を A とする。量化子の作用域の狭さは否定のそれと同等であると決める。この点を考慮して括弧を外すことができる。したがって、例えば、

(1) $$\forall x A \wedge B$$

は、

(2) $$\forall x(A \wedge B)$$

ではなく、

(3) $$(\forall x A) \wedge B$$

と理解されるべきである。したがって、式 (2) では、$\forall x$ の作用域は $(A \wedge B)$ であり、式 (1) では、A となる。

2.2 変項の束縛的現われと自由な現われ

このように量化子の作用域を定義した後で、量化理論にとって重要な概念、変項の**束縛的現われ** bound occurrence と**自由な現われ** free occurrence という概念を厳密に定義することにする。

1. 式 A の中の x の現われが A において自由である (free in A) のは、式 A の中の $\forall x$ や $\exists x$ という形の量化子の作用域の中にこの x が現われてこないときであり、またそのときに限る。

2. 式 A に $\forall x B$ あるいは $\exists x B$ という形の部分式があって、x の現われが B で自由であるとき、この x の現われは $\forall x$ あるいは $\exists x$ という量化子によって束縛されている bound と言う。

ただし、量化記号の隣の変項について、それが自由であるとか、束縛されているとか言うことには意味がない。例を使ってこの違いを見ていくことにする。

(4) $$\forall x P(x,y) \supset P(x,z)$$

$$(\forall x P(x,y)) \supset P(x,z)$$

という式では x の一番目の現われは、$\forall x$ によって束縛され、x の二番目の現われは自由である。他方、

(5) $$\forall x(P(x,y) \supset P(x,z))$$

という式では、二つの x の現われが、同じ量化子 $\forall x$ によって束縛されている。さらに、

(6) $$\forall x(P(x) \wedge \exists x(Q(x)))$$

ここでは、一番目の x の現われは $\forall x$ によって束縛され、二番目の x の現われは $\exists x$ によってのみ束縛されており、$\forall x$ によって束縛されることはない。$\exists x$ においてこの x の現われはもはや自由ではないからである。このように、定義によって、x が異なる二つ以上の量化子によって束縛されることはない。もちろん、異なる二つ以上の変項の現われが同一の量化子によって束縛されることはある。

2.3 演習問題

1. 次の式で、変項がどのように (自由、束縛) 現われているかを示せ。
   (a) $\forall x(P(x,x,y) \supset \exists z(Q(x,z)))$
   (b) $(\neg\exists x(\neg P(x,y))) \wedge R(z,x)$
   (c) $\exists x \forall y(P(x,y) \wedge Q(y,x))$

量化文の典型的な例としては、次の４つが挙げられる。

全称肯定 A: 全ての A は B である $\forall x(A(x) \supset B(x))$

全称否定 E: 全ての A が B でない $\forall x(A(x) \supset \neg B(x))$

特称肯定 O: ある A は B である $\exists x(A(x) \wedge B(x))$

特称否定 I: ある A は B でない $\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$

3　自然言語表現の QL への翻訳

まず、与えられた文の中に固有名詞や述語がないかどうかを調べる。固有名詞があったら、それを適当な個体定項で置き換え、述語があったら、それを式 (命題関数) で置き換える。もちろん、異なる述語は異なる述語記号によって置き換え、異なる固有名詞は異なる個体定項によって置き換えなければばならない。例えば、

例 1. 佐々木が歩いている。

この中に現われる述語と固有名詞はそれぞれ、「歩いている」と「佐々木」である。述語「歩いている」を述語記号 W で置き換え、「佐々木」を適当な個体定項 a で置き換えてやると、最終的な翻訳は以下のようになる。

$$Wa$$

例 2. 木村は背の高い学生である。

これが意味していることは、「木村は背が高く、かつ学生である」ということであるから、「木村」を a、「背が高い」を T、「学生である」を S で置きかえると、最終的には、これは以下の式に翻訳される。

$$Ta \wedge Sa$$

これから量化表現が現われる文の翻訳を考察していく。

例 3. 犬がいる。

これは「犬であるようなものが存在する」という意味である。この文の中には固有名詞は存在しない。この文の中に現われる述語は「x は犬である」だけである。これを述語記号 D で置き換える。あるいは、x は犬である」と最初から命題関数に直して、Dx で置き換えるほうがわかりやすい。そして、存在するという意味は存在量化子 $\exists x$ によって表現されるから、例 3 は、

$$\exists x Dx$$

と翻訳される。

例 4.(二項述語) 林は佐々木より頭のよい学生だ。

まず、「学生だ」を一項述語 $S(x)$、「より頭のよい」を二項述語 $W(x, y)$ でそれぞれ表す。林と佐々木という固有名詞は、それぞれ h、s で表す。すると、文は、$S(h) \wedge W(h, s)$ となる。ここで、翻訳文の中の h を x に置き換え、$S(x) \wedge W(x, s)$ という命題関数を作っておく。

例 5. 川田はピカソの絵を持っている。

もちろん、川田が持っているピカソの絵は一枚とは限らない。そこで、上記を「川田はピカソの絵を何枚か持っている」に置きなおす。実は、この文の中に 2 つの二項述語が含まれていることに注目したい。つまり、x は y の描いた絵であるを $P(x, y)$、x は y を持っているを $H(x, y)$ とおく。川田を k、ピカソを p と置くと、$\exists y(H(k, y) \wedge P(y, p))$ となる。

例 6. ピカソの絵を持っているものはみな金持ちだ。

x は金持ちであるを Rx と置く。x はピカソの絵を持っているは、先ほどの k を x に替えて $\exists y(H(x, y) \wedge P(y, p))$ とすればよい。よって、$\forall x(\exists y(H(x, y) \wedge P(y, p)) \to R(x))$ となる。

例 7. 全ての男性は石黒が好きである。

石黒を i と置く。x は石黒が好きであるは、$L(x, i)$ となる。よって、例 7 は、$\forall x(M(x) \rightarrow L(x, i)$ となる。

例 8. 全ての男性が好きになる女性がいる。(男性が女性を好きになる、という意味。その逆ではない。)

例 9. 全ての男性には好きな女性がいる。

3.1 演習問題

1. 次の日本語の文を論理式に翻訳せよ。
   (a) 空を飛べる哺乳類が存在する[1]。
   (b) 光合成をしない植物は存在しない。
   (c) アメリカ人がみなハンバーガーが好きとは限らない。
   (d) 日本人だけが米食だ[2]。
   (e) どのカップルも映画が 1000 円で観られる[3]。
   (f) 全ての女性が好きな男は全ての女性に好かれない (嫌われる)[4]。
   (g) どの 2 つの有理数にもその間にある有理数が存在する[5]。

[1] 空を飛べるを $F(x)$、哺乳類であるを $M(x)$ とおく。
[2] 日本人であるを $J(x)$、米食だを $R(x)$ とおく。
[3] x と y はカップルであるを $C(x, y)$、映画が 1000 円で観られるを $T(x)$ とおく。
[4] x は y が好きであるを $L(x, y)$、男性であるを $M(x)$、女性であるを $F(x)$ とおく。
[5] 有理数であるを $R(x)$、x は y と z の間にあるを $B(x, y, z)$ とおく。

4　量化理論の解釈-その動機と背景-

4.1　基礎概念

われわれが「全て」や「いくつかの」という量化表現を使用する場合、なんらかの議論領域あるいは集合を設定している。量化表現を解釈するにあたっては、この議論領域が本質的な役割を果たす。

およそ、日常言語の個々の表現の意味とはどのようなものであろうか。簡単に言ってしまうと、固有名詞の意味とは、大体、その指示対象であると考えてよい。「佐々木　昭則」の意味は、佐々木　昭則である。したがって、名前を解釈するとは、一言で言うと、その名前が指示する対象を決めることである。それでは、次に述語の意味について考えてみよう。述語の意味を考えるに際しては、**内包**と**外延**という二つの重要な視点がある。

述語の内包はわれわれが日常的に述語の意味と言っているものに相当すると考えてよい。これに対して、述語の外延は、その述語を満たす対象のクラスである。例えば、「大リーガー選手」という述語の外延は、大リーガー選手であるもの全てのクラスである。内包が決まれば外延も決まるがその逆は一般には成り立たない。「二等辺三角形」と「二等角三角形」は内包が異なるが、外延が同じ表現の例である。つまり、「二等辺三角形」の意味は「二つの辺が等しい三角形」で、「二等角三角形」の意味は「二つの角が等しい三角形」で、互いに異なるが、それらの外延が同じであるということは初等数学の定理である。

形式論理学の立場で、述語を解釈するとは、その述語を満たす対象のクラスを決めることである。こうして、量化理論では外延的な立場を採る。外延的な立場とは、述語の外延が定まれば、その述語の解釈が定まると考える立場である。

これまでは、一項の述語の解釈について説明してきた。二項以上の述語についてはどのように考えるべきか。ここで、順序組 ordered tuple という概念を導入する。これは有限列のことである。一般に長さ n の有限列は次のような形をしている。

$$< x_1, \ldots, x_n >$$

二項の有限列を例にとって考えてみよう。二項の有限列は特に順序対 ordered pair と呼ばれる。

$$< x_1, x_2 >$$

この順序対で x_1 をこの順序対の第一項、x_2 をその第二項と呼ぶ。一般に、$< a, b >$ と $< b, a >$ は区別されなければならない。そこで、二項述語の外延は、なんらかの順序対の集合であるとする。例えば、「x は y の親である」という述語の外延は親子であるものの組の集合である。その集合とは、

$$\{< \text{長島茂雄}, \text{長島一茂} >, < \text{カーク・ダグラス}, \text{マイケル・ダグラス} >, \ldots\}$$

のことである。つまり、第一項に親、第二項にその子となるような順序対の集合である。ただし、$<$ 長島一茂, 長島茂雄 $>$ はこの集合の要素ではない。こうして、順序対では、順序が重要である。

ここで、これから使う表記について説明しておく。

1. $M \models A$ で「論理式 A が解釈 M で真である」を表す。 $M \not\models A$ で「論理式 A が解釈 M で真でない（偽である）」を表す。

2. $e \in S$ で「e が集合 S の要素である」を表す。$e \notin S$ で「e が集合 S の要素でない」を表す。

3. $A \subseteq B$ で「A は B の部分集合である」を表す。

デカルト積 cartesian product について説明する。与えられた集合 D について、一般に、D^n は、D から構成される全ての ordered n-tuple の集合を表わす。すなわち、

$$D^n = \{< x_1, \ldots, x_n >: x_1 \in D \wedge \ldots \wedge x_n \in D\}$$

特に、

$$D^2 = \{< x_1, x_2 >: x_1 \in D \wedge x_2 \in D\}$$

例えば、$D = \{a, b\}$ について、

$$D^2 = \{< a, a >, < a, b >, < b, a >, < b, b >\}$$

となり、$D' = \{a, b, c\}$ について、

$$D'^2 = \{< a, a >, < a, b >, < a, c >< b, a >, < b, b >, < b, c >, < c, a >< c, b >< c, c >\}$$

となる。

以上の点を踏まえると、われわれは原子文が真であるということをどのように理解すべきであろうか。通常の理解によると、「佐々木は猫である」が真であるのは「佐々木」という名前を持つ対象、佐々木が、「猫」という述語の外延、すなわち猫のクラスに属するときである。ここで重要なのは、一般に、与えられた文の真偽は一定の解釈の下でのみ問うことができる、ということである。

4.2 量化理論の解釈-形式的な定義-

4.2.1 量化理論の言語 QL の解釈

われわれは、ここで言語 QL を固定する。これから述べる解釈は全てこの言語に対して定義される。モデル $M =< D, \Phi >$ は以下の条件を満たす。

1. D は空でない集合である。

2. Φ は次の条件を満たす解釈関数である。

   (a) 任意の個体定項 c に対して、

   $$\Phi(c) \in D。$$

   (b) 任意の n 項述語記号 P に対して、

   $$\Phi(P) \subseteq D^n。$$

Φ は個体変項については定義されない。個体変項は一定の解釈を持たないような表現である。

1. A が原子文 $P(c_1, \ldots, c_n)$ のとき、$M \models P(c_1, \ldots, c_n) \Longleftrightarrow < \Phi(c_1), \ldots, \Phi(c_n) > \in \Phi(P)$

2. $M \models \neg A \Longleftrightarrow M \not\models A$

3. $M \models A \wedge B \Longleftrightarrow M \models A$ かつ $M \models B$

4. $M \models A \vee B \iff M \models A$ あるいは $M \models B$

5. $M \models A \to B \iff$ もし $M \models A$ ならば $M \models B$

6. $M \models \forall x A \iff$ 全ての c について、$M \models A[x/c]$

7. $M \models \exists x A \iff$ いくつかの c について、$M \models A[x/c]$

4.2.2 量化理論の解釈例

解釈例 1 $M =< D, \Phi >$ を以下のように定義する。$D = \{0, 1, 2\}, \Phi(a) = 0, \Phi(b) = 1, \Phi(c) = 2$ $\Phi(P) = \{0, 1\}$ $\Phi(Q) = \{2\}$ 以下のそれぞれについて、成り立つかどうか。確かめよ。

1. $M \models P(a)$
2. $M \models P(b)$
3. $M \models P(c)$
4. $M \models Q(c)$
5. $M \models \exists x P(x)$
6. $M \models \exists x Q(x)$
7. $M \models \forall x P(x)$
8. $M \models \forall x (P(x) \vee Q(x))$
9. $M \models \exists x (P(x) \wedge Q(x))$

1 について、$\Phi(a) \in \Phi(P)$ かどうか確かめる。実際、$\Phi(a) = 0 \in \Phi(P) = \{0, 1\}$ なので、成り立つ。よって、$M \models P(a)$ は正しい。一方、3 については、$\Phi(c) = 2 \notin \Phi(P) = \{0, 1\}$ なので、$M \not\models P(a)$。

5 については、 3 つの代入例 $P(a), P(b), P(c)$ について、$M \models P(a), M \models P(b), M \models P(c)$ の**いずれか 1 つ**が成り立てばよい。実際、1 で確かめたように、$M \models P(a)$ である。よって、$M \models \exists x P(x)$ は正しい。

解釈例 2 $M =< D, \Phi >$ を以下のように定義する。$D = \{0, 1, 2\}, \Phi(a) = 0, \Phi(b) = 1, \Phi(c) = 2$ $\Phi(P) = \{0\}$ $\Phi(Q) = \{1, 2\}, \Phi(R) = \{< 0, 1 >, < 1, 2 >, < 2, 1 >\}$ 以下のそれぞれについて、成り立つかどうか。確かめよ。

1. $M \models \exists x \exists y (P(x) \wedge R(x, y))$
2. $M \models \exists x Q(x)$
3. $M \models \forall x P(x)$
4. $M \models \forall x \exists y (R(x, y))$
5. $M \models \exists y \forall x (R(x, y))$

4 であるが、われわれは、

1. まず、$M \models \exists y(R(a,y))$、$M \models \exists y(R(b,y))$、$M \models \exists y(R(c,y))$ の**すべてが正しい**ことを確かめる必要がある。その上で、たとえば、$M \models \exists y(R(a,y))$ に関しては、さらに
2. $M \models R(a,a)$、 $M \models R(a,b)$、 $M \models R(a,c)$ の**いずれかが正しい**ことを確かめる必要がある。

4.3 演習問題

1. $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ が真になる解釈を考えよ[6] 。
2. $\forall x(P(x) \vee \forall x Q(x))$ が真になる解釈を考えよ[7] 。
3. $\exists y \forall x(R(x,y))$ が真になる解釈を考えよ[8] 。

[6] $M =< D, \Phi >$ について、$D = \{0,1\}, \Phi(a) = 0, \Phi(b) = 1$ とした上で、$\Phi(P), \Phi(Q)$ をどう定義すべきか。
[7] $M =< D, \Phi >$ について、$D = \{0,1\}, \Phi(a) = 0, \Phi(b) = 1$ とした上で、$\Phi(P), \Phi(Q)$ をどう定義すべきか。
[8] $M =< D, \Phi >$ について、$D = \{0,1\}, \Phi(a) = 0, \Phi(b) = 1$ とした上で、$\Phi(R)$ をどう定義すべきか。

5 自然演繹 2-量化理論

5.1 $\forall$ に関する推論規則

5.1.1 項の代入

推論規則を定式化するにあたって項の代入の概念を定義しておかなければならない。$A[x/t]$ という表現で式 A の中の x の全ての自由な現われを t で置き換えた結果できた式を表わすことにする。例えば、$Pxxy[x/a]$ は $Paay$ となる。$\exists yQxy[y/b]$ は $\exists yQxy$ のままである。当の式の中での y の現われが自由でないからである。

def 5.1 A の中に自由に現われる変項に項 t を代入した結果生じた式 A' における t のどの現われもその式の中のどの量化子によっても束縛されることがないとき、t は A に対して自由である *free for* A と言う。

例えば、$A = \forall xQxz$ という式について、$\forall xQxz[z/y]$ は $\forall xQxy$ となるが、この y は代入の結果束縛されることはないので y は A に対して自由である。これに対して、$B = \exists yPyz[z/y]$ は $\exists yPyy$ となるが、この代入の結果、二番目の y(の現われ) が量化子 $\exists y$ によって束縛されてしまうので y は B に対して自由ではない。

5.1.2 演習問題

次の各式の代入の結果を計算せよ。

1. $Qx \wedge Rxzy[x/c]$
2. $\forall xPxz[z/a]$
3. $\exists yRyx \supset Py[y/z]$

以上の準備を終えて、これから量化理論の推論規則を述べる。真理関数理論のときと同じように、各々の量化子に対して導入規則と除去規則がある。

$$\frac{\begin{matrix}\vdots\\ A[x/y]\end{matrix}}{\forall xA}\ \forall I \qquad\qquad \frac{\forall xA}{A[x/t]}\ \forall E$$

- 規則 $\forall I$ に関する制限:仮定に y は自由に現われない。
- 規則 $\forall E$ に関する制限:t は A に対して自由である。

規則 $\forall I$ に関するこの制限を固有変項条件という。y が一般化の代表例として機能するための条件である。つまり、y に何ら特殊な仮定をしない限り、y に関して一般化が可能になる、ということだ。

5.2　∀ に関する証明

$\forall E$ に関しての証明

$$\begin{array}{l}\text{全ての人間には寿命がある}\\ \text{ソクラテスは人間だ}\\ \hline \text{ソクラテスは寿命がある。}\end{array}$$

記号化は以下の通りである。

$$\begin{array}{l}\forall x(M(x) \to D(x))\\ M(s)\\ \hline D(s)\text{。}\end{array}$$

証明は以下の通りである。

$$\dfrac{M(s) \qquad \dfrac{\forall x(M(x) \to D(x))}{M(s) \to D(s))}\ \forall E}{D(s)}$$

$\forall I$ に関しての証明

$$\forall x(A(x) \land B(x)) \Longrightarrow \forall x A(x)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(A(x) \land B(x))}{A(x) \land B(x)}\ \forall E}{A(x)}}{\forall x A(x)}\ \forall I$$

3 行目の $A(x)$ に関して、x が仮定に自由に現れていないことを確かめる必要がある。実際、x は仮定 $\forall x(A(x) \land B(x))$ で $\forall x$ に束縛されていて、自由に現れていない。したがって、$\forall I$ を適用する条件 (固有変項条件という) が満たされている。

5.2.1　演習問題

次の推論を記号化し、証明せよ。

1. $$\begin{array}{l}\text{全ての人間には寿命がある}\\ \text{仏陀は寿命がない}\\ \hline \text{仏陀は人間ではない。}\end{array}$$

2.

$$\begin{array}{l}\text{どのカップルも映画が 1000 円で観られる}\\ \text{猫田君と犬山さんはカップルだ}\\ \hline \text{猫田君は映画が 1000 円で観られる。}\end{array}$$

次の各論理式を証明せよ。

1. $\Longrightarrow \forall x(A(x) \land B(x)) \to \forall x A(x) \land \forall x B(x)$

2. $\Longrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \to \forall x(A(x) \wedge B(x))$

3. $\Longrightarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \to \forall x(A(x) \vee B(x))$

4. $\forall x(A(x) \to B(x)) \Longrightarrow \forall x A(x) \to \forall x B(x)$

5. $\forall x(A(x) \to B(x)) \to (\forall x(A(x) \to C(x)) \to \forall x A(x) \to \forall x(B(x) \wedge C(x)))$

6. $\Longrightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \to (\forall x(B(x) \to C(x)) \to \forall x(A(x) \to C(x)))$

7. $\Longrightarrow \forall x(A(x) \to B(x)) \to (\forall x(B(x) \to \neg C(x)) \to \forall x(C(x) \to \neg A(x)))$

5.3 ∃に関する推論規則

$$\frac{A[x/t]}{\exists x A}\ \exists I \qquad\qquad \frac{\exists x A \qquad \begin{matrix}[A[x/y]]^i \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ \exists E : i$$

- 規則 $\exists I$ に関する制限:t は A に対して自由である。
- 規則 $\exists E$ に関する制限:y は、C が依存している全ての仮定 (ただし、$A[x/y]$ は除く)、および C、および $\exists x A$ に自由に現われない。

規則 $\exists I$ は理解しやすいであろう。規則 $\exists E$ について、一言述べておく。$\vee E$ との類推で理解するとよい。一般に、存在文 $\exists x A(x)$ は、$A(a) \vee A(b) \vee \cdots \vee A(n) \vee \cdots$ と無限の選言とみなすことができる。まずは、選言の除去規則を思い出してほしい。

$$\frac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A]^i \\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B]^i \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ i$$

これを無限の場合分けに拡張するわけである。

$$\frac{A(a) \vee A(b) \vee \cdots \vee A(n) \vee \cdots \qquad \begin{matrix}[A(a)]^i \\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[A(b)]^i \\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \cdots \qquad \begin{matrix}[A(n)]^i \\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \cdots}{C}\ i$$

もちろん、無限の場合分けを全て確かめることは不可能なので、ここで代表例となる場合分けを 1 つ選んで、このケースだけ確かめる形にする。

$$\frac{A(a) \vee A(b) \vee \cdots \vee A(n) \vee \cdots \qquad \begin{matrix}[A(x)]^i \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ i$$

ここで x が代表例である。代表例として x に一般性を持たせる必要がある。そのためには、x が $A(x)$ 以外の仮定にも、結論 C にも自由に現れない、という条件を設定する。これを固有変項条件と呼ぶ。

5.4 ∃に関する証明

$\exists I$ に関しての証明

$$\begin{array}{l} \text{上田はツアーの参加者だ} \\ \text{ツアーの参加者が一人でもいれば、ツアーは開催される} \\ \hline \text{ツアーは開催される。} \end{array}$$

記号化は以下の通りである。

$$\begin{array}{l} P(u) \\ \exists x P(x) \to T \\ \hline T\text{。} \end{array}$$

証明は以下の通りである。

$$\dfrac{\dfrac{P(u)}{\exists x P(x)}\,\exists I \qquad \exists x P(x) \to T}{T}$$

$$\neg\exists x A(x) \Longrightarrow \forall x \neg A(x)$$

証明は以下の通りである。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x)]^1}{\exists x A(x)}\,\exists I \qquad \neg\exists x A(x)}{\bot}}{\neg A(x)}\,1}{\forall x \neg A(x)}$$

$\exists E$ に関しての証明

$$\forall x \neg A(x) \Longrightarrow \neg\exists x A(x)$$

証明は以下の通りである。

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x A(x)]^2 \qquad \dfrac{[A(y)]^1 \qquad \dfrac{\forall x \neg A(x)}{\neg A(y)}}{\bot}}{\bot}\,\exists E:1}{\neg\exists x A(x)}\,2$$

5.4.1 演習問題

次の推論を記号化し、証明せよ。

$$\begin{array}{l} \text{加藤の妻は幸子だ} \\ \text{妻帯者はみな税金が安くなる} \\ \hline \text{加藤は税金が安くなる。} \end{array}$$

次の各論理式を証明せよ。

1. $\Longrightarrow \neg\exists x(A(x) \land B(x)) \to \forall x(A(x) \to \neg B(x))$

2. $\implies \forall x(A(x) \wedge \neg B(x)) \to \neg \exists x(A(x) \to B(x))$

3. $\implies \forall x(A(x) \to B(x)) \to \neg \exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$

4. $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \implies \exists x A(x) \wedge \exists x B(x))$

5. $\forall x A(x) \to B(x)) \implies \exists x A(x) \to \exists x B(x)$

6. $\implies \exists x(A(x) \vee B(x)) \to \exists x A(x) \vee \exists x B(x))$

7. $\implies \exists x A(x) \vee \exists x B(x) \to \exists x(A(x) \vee B(x))$