数学A1 期末試験 解答例と配点

問題1 (10点)

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \{\log(1+x)\}^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \{\log(1+x)\}^2 + ax^2 + bx^3 = (1+a)x^2 + (b-1)x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$$

$\Rightarrow$ $a=-1$, $b=1$ のときに有限な極限値をもち、このとき、

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left[\{\log(1+x)\}^2 + ax^2 + bx^3\right] = \lim_{x\to 0}\left\{\frac{11}{12} + o(1)\right\} = \frac{11}{12}$$

問題2 (10点×2)

(1) $s = s(x,y)$, $t = t(x,y)$ なので、

$$x = \frac{1}{2}(s^2 - t^2) \Rightarrow 1 = \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(s^2 - t^2) = \frac{1}{2}\left(2s\cdot\frac{\partial s}{\partial x} - 2t\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

$$= s\cdot\frac{\partial s}{\partial x} - t\frac{\partial t}{\partial x} \quad \cdots (\mathrm{i})$$

$$y = st \Rightarrow 0 = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(st) = \frac{\partial s}{\partial x}\cdot t + s\cdot\frac{\partial t}{\partial x} \quad \cdots (\mathrm{ii})$$

(i), (ii) より、$\frac{\partial s}{\partial x}$ と $\frac{\partial t}{\partial x}$ についての連立方程式

$$\begin{cases} s\cdot\frac{\partial s}{\partial x} - t\frac{\partial t}{\partial x} = 1 \\ t\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + s\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

を得る。これを解くと、

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{s}{s^2+t^2}, \quad \frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{t}{s^2+t^2}$$

よって、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_s\cdot\frac{\partial s}{\partial x} + z_t\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{s}{s^2+t^2}z_s - \frac{t}{s^2+t^2}\cdot z_t = \frac{1}{s^2+t^2}(s\cdot z_s - t\cdot z_t).$$

(2)

$$x = \frac{1}{2}(s^2 - t^2) \Rightarrow 0 = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(s^2 - t^2) = s\cdot\frac{\partial s}{\partial y} - t\frac{\partial t}{\partial y}$$

$$y = st \Rightarrow 1 = \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(st) = s\cdot\frac{\partial s}{\partial y} + t\cdot\frac{\partial t}{\partial y}$$

よって、

$$\begin{cases} s\cdot\frac{\partial s}{\partial y} - t\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = 0 \\ t\frac{\partial s}{\partial y} + s\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = 1 \end{cases}$$

より、

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{t}{s^2+t^2}, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{s}{s^2+t^2}$$

したがって、

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_s\cdot\frac{\partial s}{\partial y} + z_t\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{s^2+t^2}(t\cdot z_s + s\cdot z_t).$$

(1)の結果とあわせて、

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{(s^2+t^2)^2}\left\{(s^2+t^2)\cdot z_s^2 + (s^2+t^2)z_t^2\right\} = \frac{z_s^2 + z_t^2}{s^2+t^2}.$$

問題3 (10点×2)

(1) $f(x,y) = y^x + y + x - 5$ とおくと、$f_y = x\cdot y^{x-1} + 1$. よって、

$$f(1,2) = 2^1 + 2 + 1 - 5 = 0, \quad f_y(1,2) = 1\cdot 2^0 + 1 = 2 \neq 0$$

なので、陰関数定理により、点 $(x,y) = (1,2)$ の近傍で、(i), (ii) をみたす陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在する。

(2) $f_x = y^x \log y + 1$ より、$(x,y) = (1,2)$ の近傍で

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{y^x \log y + 1}{x\cdot y^{x-1} + 1}$$

となる。よって、

$$\varphi'(1) = -\frac{2^1 \log 2 + 1}{1\cdot 2^{1-1} + 1} = -\left(\log 2 + \frac{1}{2}\right)$$

問題4 (10点×2)

(1)
$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 2(a^2+3)x - 2ay = 0 & \cdots \text{(i)} \\ f_y = -2ax - 2y = 0 & \cdots \text{(ii)} \end{cases}$$

(ii)より、$y = -ax$. これを(i)へ代入して、$3x^2 - 6x = 0$. よって、$x = 0, 2$.

したがって、

$$(x,y) = (0,0),\ (2,-2a) \quad \cdots \text{停留点}$$

(2) $f_{xx} = 6x - 2(a^2+3)$, $f_{yy} = -2$, $f_{xy} = -2a$ より、

$$\begin{pmatrix} 6x - 2(a^2+3) & -2a \\ -2a & -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3x - (a^2+3) & -a \\ -a & -1 \end{pmatrix} =: 2\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

$(x,y) = (0,0)$ において、

$$AC - B^2 = a^2 + 3 - a^2 = 3 > 0, \quad A = -(a^2+3) < 0.$$

より極大.

$(x,y) = (2,-2a)$ において、

$$AC - B^2 = -(3-a^2) - a^2 = -3 < 0.$$

より極大でも極小でもない。

問題5 (10点)

$F(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(3x^2+2y^2-2xy-1)$ とおく。

$$\begin{cases} F_x = 2x+\lambda(6x-2y) = 2\{x+\lambda(3x-y)\} = 0 & \cdots (\mathrm{i}) \\ F_y = 2y+\lambda(4y-2x) = 2\{y+\lambda(2y-x)\} = 0 & \cdots (\mathrm{ii}) \\ F_\lambda = 3x^2+2y^2-2xy-1 = 0 & \cdots (\mathrm{iii}) \end{cases}$$

(i), (ii) を用いて λ を消去する。

$$(\mathrm{i}) \times (2y-x) \times \tfrac{1}{2} \qquad x(2y-x)+\lambda(3x-y)(2y-x) = 0$$

$$(\mathrm{ii}) \times (3x-y) \times \tfrac{1}{2} \qquad y(3x-y)+\lambda(3x-y)(2y-x) = 0 \quad (-$$

$$x(2y-x)-y(3x-y) = 0$$

$$-x^2-xy+y^2 = 0 \qquad \cdots (\mathrm{iv})$$

(iv)より、 $2y^2-2xy = 2x^2$. これを (iii) の

$$3x^2+(2y^2-2xy)-1 = 0$$

へ代入すると、

$$3x^2+2x^2-1 = 0$$

$$5x^2 = 1$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき、(iv) より

$$y^2-\frac{1}{\sqrt{5}}y-\frac{1}{5} = 0$$

$$5y^2-\sqrt{5}y-1 = 0$$

$$y = \frac{1}{10}(\sqrt{5}\pm 5)$$

$x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ のとき、(iv) より、 $y = \frac{1}{10}(-\sqrt{5}\pm 5)$.

したがって、

$(x,y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{10}(\sqrt{5}+5)\right)$ のとき (複号同順)、

$$f(x,y) = \frac{1}{5}+\left\{\frac{1}{10}(\sqrt{5}+5)\right\}^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{5} \quad \cdots \text{最大値}$$

$(x,y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{10}(\sqrt{5}-5)\right)$ のとき (複号同順)、

$$f(x,y) = \frac{1}{5}+\left\{\frac{1}{10}(\sqrt{5}-5)\right\}^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{5} \quad \cdots \text{最小値}$$