数学B2, H18

[1]

$f(\mathbf{e}_1)$, $f(\mathbf{e}_2)$, $f(\mathbf{e}_3)$, $f(\mathbf{e}_4)$ を求める.

$$f(\mathbf{e}_1) = f\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\10\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\13\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{e}_2) = f\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\8\\3\end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{e}_3) = f\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} - f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix}5\\13\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\8\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{e}_4) = f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} - f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

これより, f の表現行列 A は.

$$A = [f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3), f(\mathbf{e}_4)] = \underline{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\-3 & 8 & 5 & -1\\-2 & 3 & 1 & -1\end{pmatrix}}$$ //

$f(x) = \begin{pmatrix}3\\a\\2\end{pmatrix}$ を行列表示すると.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & 1 & 3\\-3 & 8 & 5 & -1 & a\\-2 & 3 & 1 & -1 & 2\end{array}\right)\begin{matrix}-①\\-②\\-③\end{matrix} \xrightarrow[③\leftarrow ③+2\times①]{②\leftarrow ②+3\times①} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 3 & 1 & 3\\ & 14 & 14 & 2 & a+9\\ & 7 & 7 & 1 & 8\end{array}\right)$$

いま, これが解 x を持つことから.

$$a + 9 = 16 \qquad \therefore \underline{a = 7}$$ //

MB2H1802

[2]

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-b & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3-b & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3-b & -b \end{array}\right)\begin{array}{l} -① \\ -② \\ -③ \end{array} \xrightarrow[①\leftrightarrow③]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3-b & -b \\ 1 & 3-b & 1 & 2 \\ 3-b & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{②\leftarrow②-① \\ ③\leftarrow③-(3-b)①}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3-b & -b \\ & 2-b & -2+b & 2+b \\ & -2+b & -8+6b-b^2 & 3+3b-b^2 \end{array}\right) \xrightarrow[③\leftarrow②+③]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3-b & -b \\ & 2-b & -2+b & 2+b \\ & & -b^2+7b-10 & -b^2+4b+5 \end{array}\right)$$

ここで，題意の連立方程式が解を持たない条件は，

$$-b^2+7b-10=0 \quad かつ \quad -b^2+4b+5 \neq 0$$

である．いま，

$$-b^2+7b-10=-(b-2)(b-5) = 0$$
$$-b^2+4b+5=-(b-5)(b-1) \neq 0$$

より．条件は．

$$\underline{b=2}$$

[3].

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 5 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -① \\ -② \\ -③ \\ -④ \end{array} \xrightarrow[\substack{②\leftarrow①+② \\ ③\leftarrow③+2\times② \\ ④\leftarrow④-①}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{①\leftarrow①+2\times④ \\ ②\leftarrow②-④ \\ ③\leftarrow③-2\times④}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{①\leftarrow①+3\times② \\ ③\leftarrow③-②}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 5 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[①\leftarrow①-2\times③]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & 5 & 1 & -2 & 1 \\ & 1 & & & 2 & 1 & 0 & -1 \\ & & 1 & & 0 & 1 & 1 & -1 \\ & & & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MB2H1503

[4].

$$\det\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \alpha & \delta & \gamma \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \beta & \alpha & \beta \\ \alpha+\beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha+\beta & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha+\beta & \alpha & \delta & \gamma \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha+\beta)\det\begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha & \beta & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma & \delta \\ 1 & \alpha & \delta & \gamma \end{pmatrix} = (\alpha+\beta)\det\begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \alpha-\beta & \beta-\alpha & \alpha-\beta \\ 0 & 0 & \gamma-\alpha & \delta-\beta \\ 0 & \alpha-\beta & \delta-\alpha & \gamma-\beta \end{pmatrix}$$

余因子展開

$$= (\alpha+\beta)\det\begin{pmatrix} \alpha-\beta & \beta-\alpha & \alpha-\beta \\ 0 & \gamma-\alpha & \delta-\beta \\ \alpha-\beta & \delta-\alpha & \gamma-\beta \end{pmatrix} = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\det\begin{pmatrix} 1 & \beta-\alpha & \alpha-\beta \\ 0 & \gamma-\alpha & \delta-\beta \\ 1 & \delta-\alpha & \gamma-\beta \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\det\begin{pmatrix} 1 & \beta-\alpha & \alpha-\beta \\ 0 & \gamma-\alpha & \delta-\beta \\ 0 & \delta-\beta & \gamma-\alpha \end{pmatrix}$$

余因子展開

$$= (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\{(\gamma-\alpha)^2-(\delta-\beta)^2\}$$

$$= (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)\{(\gamma-\alpha)+(\delta-\beta)\}\{(\gamma-\alpha)-(\delta-\beta)\}$$

$$= (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)$$

[5].

固有値をλとすると，固有多項式は

$$\det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -3 & 1 \\ 2 & \lambda-c & 6-c \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ \lambda-c & 6-c \end{pmatrix} + (\lambda-2)\det\begin{pmatrix} \lambda+1 & -3 \\ 2 & \lambda-c \end{pmatrix}$$

$$= -(-18+3c-(\lambda-c)) + (\lambda-2)\{(\lambda+1)(\lambda-c)+6\}$$

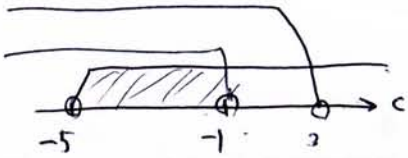
$$= 18-4c+\lambda+(\lambda-2)(\lambda^2+(1-c)\lambda+6-c)$$

$$= \lambda^3+(-1-c)\lambda^2+(c+5)\lambda+6-2c$$

いま，負定値より，固有多項式の係数は，すべて正でなければならない．

したがって，

$$\begin{cases} -1-c>0 & \Longleftrightarrow \quad c<-1 \\ 5+c>0 & \Longleftrightarrow \quad -5<c \\ 6-2c>0 & \Longleftrightarrow \quad c<3 \end{cases}$$



となり，求める c の条件は，$-5<c<-1$ となる。

[6]

$$g(x,y,z) = e^x - x + y^4 - 4yz + 2z^2.$$

(1)

$$\nabla g = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} g_x = e^x - 1 = 0 & \therefore x = 0. \\ g_y = 4y^3 - 4z = 0. & \cdots ① \\ g_z = -4y + 4z = 0. & \cdots ② \end{cases}$$

①より，$z = y^3$ これを②に代入すると，

$$-4y + 4y^3 = 4y(1-y^2) = 0 \quad \therefore y = 0, \pm 1.$$

したがって，停留点は，$(0,0,0)(0,1,1)(0,-1,-1)$。

(2) ヘシアン H は，

$$H = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 12y^2 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

であるので，

$$H(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}, \quad H(0,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$H(0,-1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

(3) ヘシアンの定値性を調べる。

$(0,0,0)$ において，

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 4 \\ 0 & 4 & \lambda-4 \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda(\lambda-4)-16) = (\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda-16)$$

$$\therefore \lambda = 1,\ 2\pm2\sqrt{5}$$

MB2H1805

より、定値性なし。よって、$(0,0,0)$では極値をとらない。

$(0,\pm1,\pm1)$において、

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-12 & 4 \\ 0 & 4 & \lambda-4 \end{pmatrix} = (\lambda-1)\{(\lambda-12)(\lambda-4)-16\}$$
$$= (\lambda-1)(\lambda^2-16\lambda+32)$$

$$\therefore \lambda = 1,\ 8\pm4\sqrt{2}$$

より、正定値。よって、$(0,\pm1,\pm1)$では、極小となり、極小値は、

$$g(0,\pm1,\pm1) = 0$$

となる。