(2) $g(x,y)$ の $(x,y)=(0,0)$ におけるテイラー展開の2次までの項を求めなさい。

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\sin z \cos x}{1-\sin x \cos z}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{e^y}{1-\sin x \cos z}.$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin z \cos x}{1-\sin x \cos z}\right)$$

$$= \frac{(\sin z \cos x)'(1-\sin x \cos z) - \sin z \cos x (1-\sin x \cos z)'}{(1-\sin x \cos z)^2}$$

$$= \frac{(\cos z \frac{\partial g}{\partial x} \cos x - \sin z \sin x)(1-\sin x \cos z) - \sin z \cos x(-\cos x \cos z + \sin x \sin z \frac{\partial z}{\partial x})}{(1-\sin x \cos z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{e^y(1-\sin x \cos z) + e^y \sin x \sin z \frac{\partial g}{\partial y}}{(1-\sin x \cos z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{-e^y(1-\sin x \cos z)'}{(1-\sin x \cos z)^2} = \frac{-e^y(-\cos x \cos z + \sin x \sin z \frac{\partial z}{\partial y})}{(1-\sin x \cos z)^2}$$

$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \sin 1 \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 1.$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0) = 2\sin 1 \cos 1 \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,0) = 1-\cos 1$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) = \cos 1 \quad g(x,y) = g(0,0) + \left(x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y}\right) + \frac{1}{2!}\left(x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right)$ より

$$g(x,y) = 1 + x\sin 1 + y + x^2 \sin 1 \cos 1 + xy\cos 1 + \frac{y^2 \cancel{-y^2\cos} 1}{2}$$

~~10~~ 8

1. $2x^2+y^2=1,\ x+y>0$ の下で $\frac{1}{x+y}$ の最小値を与える (x,y) とその値を求めなさい。

15

$\varphi(x,y) = 2x^2+y^2-1=0$ とおく, ラグランジュの乗数法より

$\varphi_x = 4x,\ \varphi_y = 2y$ より. $\varphi = \varphi_x = \varphi_y = 0$ となる (x,y) は存在しない

$F(x,y,\lambda) = \frac{1}{x+y} + \lambda(2x^2+y^2-1)$ とおく,

$F_x = -\frac{1}{(x+y)^2} + 4\lambda x = 0.$

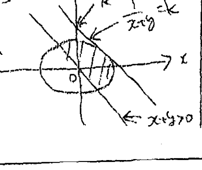
$F_y = -\frac{1}{(x+y)^2} + 2\lambda y = 0$

$F_\lambda = 2x^2+y^2-1=0.$ となるような x, y を求める.

$(x,y) = \left(\pm\sqrt{\frac{1}{6}}, \pm 2\sqrt{\frac{1}{6}}\right).$

$x+y>0$ より. $(x,y) = \left(\sqrt{\frac{1}{6}}, 2\sqrt{\frac{1}{6}}\right).$ このとき

最小値は. $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{6}}+2\sqrt{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{3\sqrt{\frac{1}{6}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$



$2x^2+y^2=1$ はだ円, $\frac{1}{x+y}=k$ とおくと, $y = \frac{1}{k} - x$ より.

これが最小値であることがわかる.

5. $f(x,y) = (x-y)^3 + 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y$ とす

25 (1) $f(x,y)$ の停留点を全て求めなさい。

$f_x = 3(x-y)^2 + 6x - 2y - 4 = 0,$

$f_y = -3(x-y)^2 - 2x + 6y - 4 = 0$ となる(求める

$f_x + f_y = 4x + 4y - 8 = 0 \quad x+y=2.\ x = 2-y$

これを f_x に代入して,

$f_x = 12(y^2-2y+1) + 6(2-y) - 2y - 4 = 0.$

$12y^2 - 24y + 12 + 12 - 6y - 2y - 4 = 0.$

$12y^2 - 32y + 20 = 0$

$3y^2 - 8y + 5 = 0.$

$y = \frac{4 \pm \sqrt{16-15}}{3} = \frac{4\pm 1}{3} = 1, \frac{5}{3}$

$x = 2 - y = 1, \frac{1}{3}.$

停留点は $(1,1)\ \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right).$

(2) $f(x,y)$ の (x,y) におけるヘッシアンを求め、(1) で求めた全ての停留点について、極大、極小、あるいはそのいずれでもないかを判定しなさい。

$f_{xx} = 6(x-y)+6$

$f_{yy} = 6(x-y)+6$

$f_{xy} = -6(x-y)-2$ これより

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6(x-y)+6 & -6(x-y)-2 \\ -6(x-y)-2 & 6(x-y)+6 \end{pmatrix}$$

$(x,y)=(1,1)$ のとき

$|Hf(1,1)| = 36 - 4 > 0.$

$f_{xx}(1,1) = 6 > 0$ より. 極小

$(x,y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ のとき

$\left|Hf\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)\right| = 4 - 36 < 0$ より

どちらでもない.