3. の解答つづき

4. 以上より

答、
$$H = \begin{pmatrix} 4(2x-y) & -2(2x-y)-3 \\ -2(2x-y)-3 & 2x+1 \end{pmatrix}$$
$(x, y) = (0, 0)$ は 鞍点
$(x, y) = (1, 1)$ は 極小点

$(1-x)^{-1} = (1-x)^{-3}$

$1 + x + x^2 + x^3$

$1 + x + x^2 + x^4$

$= -1((1-x^2)^{-2} \cdot (-2x))$

$= 2x(1-x^2)^{-2}$

$\dfrac{1}{(1-x^2)}$

$\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$

4. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ が $y = 1 + x\sin y$ を満たすとする。

(1) $(x, y) = (0, 1)$ の近くで $y = f(x)$ と解ける事を示し $\dfrac{df}{dx}$ を x と $y(= f(x))$ を用いて表せ。

(2) $f(x)$ の $x = 0$ のまわりでのテイラー展開 (マクローリン展開) を x の 2 次まで求めよ。

(剰余項は求めなくてよい。)

14

(1) $f(x, y) = 1 + x\sin y - y$ とおく

$f(0, 1) = 0$

$f_y = x\cos y - 1$

$(x, y) = (0, 1)$ で $f_y = -1 \neq 0$

従って $(x, y) = (0, 1)$ において $f_y \neq 0$ なので、陰関数定理で $y = f(x)$ と解ける。そのときの $\dfrac{df}{dx}$ は、

$$\frac{df}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{\sin y}{x\cos y - 1} = -\frac{\sin f(x)}{x\cos f(x) - 1}$$

(2) $f(x)$ を

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!}$$
$$= 1 + x\frac{df}{dx} + \frac{x^2}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}$$

$$= 1 - \frac{x\sin y}{x\cos y - 1} + \frac{x^2}{2!}\frac{d}{dx}\left(-\frac{\sin y}{x\cos y - 1}\right)$$

$$= 1 - \frac{x\sin y}{x\cos y - 1} + \frac{x^2}{2!}\frac{\cos y \sin y}{(x\cos y - 1)^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2(x\cos y - 1)^2}\{2x^2\sin y\cos y - 2x\sin y - x^2\sin y\cos y\}$$

$$= 1 - \frac{x\sin y(x\cos y - 2)}{2(x\cos y - 1)^2}$$

$1 - \dfrac{x\sin y(x\cos y - 2)}{3(x\cos y - 1)^2}$

$\dfrac{1}{1-x-y}$

$-(x+y)$

$x + y = X$

$\dfrac{2x}{(1-x^2)^3}$

$\dfrac{2(1-x^2)^2 + 2x \cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4}$

5. $a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0$ とする。楕円 $\{(x, y) \in \mathbb{R};\ x^2 - xy + y^2 = 3\}$ 上の点 (x, y) で $ax + by$ の最大値を与える点と最大値、および最小値を与える点と最小値を求めよ。

20

$g(x, y, \lambda) = ax + by + \lambda(x^2 - xy + y^2 - 3)$ とおく。

$\dfrac{\partial g}{\partial x} = a + \lambda(2x - y) = 0 \quad \cdots ①$

$\dfrac{\partial g}{\partial y} = b + \lambda(-x + 2y) = 0 \quad \cdots ②$

$\dfrac{\partial g}{\partial \lambda} = x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$

$① \times b - ② \times a$ より $\lambda(2bx - by + ax - 2ay) = 0$

$\lambda\{x(2b + a) - y(2a + b)\} = 0$

(i) $\lambda = 0$ のとき $a = b = 0$。$a^2 + b^2 \neq 0$ で矛盾 故に $\lambda \neq 0$

(ii) $x(2b + a) - y(2a + b) = 0$

(1) $2a + b = 0$ のとき $x(2b + a) = x(-4a + a) = -3ax$

$a^2 + b^2 \neq 0$ より $a \neq 0,\ b \neq 0$ $\therefore x = 0 \quad y = \pm\sqrt{3}$

(2) $2a + b \neq 0$ のとき $y = \dfrac{2b + a}{2a + b}x$

$x^2\left\{1 - \dfrac{2b + a}{2a + b} + \dfrac{(2b + a)^2}{(2a + b)^2}\right\} - 3 = \dfrac{3x^2}{(2a + b)^2}(a^2 + ab + b^2) - 3 = 0$

$\therefore x^2 = \dfrac{(2a + b)^2}{a^2 + ab + b^2} \qquad \therefore x = \pm\dfrac{2a + b}{\sqrt{a^2 + ab + b^2}}$

$(x, y) = (0, \pm\sqrt{3})$ のとき $f = \pm\sqrt{3}b$

$(x, y) = \left(\pm\dfrac{2a + b}{\sqrt{a^2 + ab + b^2}}, \pm\dfrac{2b + a}{\sqrt{a^2 + ab + b^2}}\right)$ のとき $f = \pm 2\sqrt{a^2 + ab + b^2}$

ここで $4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3b^2 = (2a + b)^2 \geq 0$

故に常に、$\sqrt{3}b \leq 2\sqrt{a^2 + ab + b^2}$

以上より
最大値を与える点 $(x, y) = \left(\dfrac{2a + b}{\sqrt{a^2 + ab + b^2}}, \dfrac{a + 2b}{\sqrt{a^2 + ab + b^2}}\right)$
このとき 最大値 $2\sqrt{a^2 + ab + b^2}$
最小値を与える点 $(x, y) = \left(-\dfrac{2a + b}{\sqrt{a^2 + ab + b^2}}, -\dfrac{a + 2b}{\sqrt{a^2 + ab + b^2}}\right)$
このとき 最小値 $-2\sqrt{a^2 + ab + b^2}$

$\dfrac{1}{(-x)}$

$1 + x + x^2$