1/1

慶應義塾大学試験問題　物理学D（一斉）

2013年2月1日（金）2時限（試験時間 50分）　問題用紙 回収不要

担当者　小原、神成、高野、福嶋

注意：とくに指示がない場合、答案には結果のみならず、それを導いた過程についても記すこと。 また、万一与えられた条件だけでは解けない場合には、適当な量を定義したり，条件を明記した上で解いてよい。ただし、電気定数（真空の誘電率）ε_0、磁気定数（真空の透磁率）μ_0、真空中の光速 c の記号は断りなしに使ってよい。

問題 I 同じ中心もつ半径 a および半径 b の球殻を両極板とするコンデンサーがある ($a < b$)。この中心を位置ベクトルの原点とする。両極板の間の空間は誘電体で満たされており、その誘電率は、中心からの距離 r の関数として、$\varepsilon(r) = \bar{\varepsilon}\varepsilon_0 \left(\frac{b}{r}\right)^4$ で与えられている。ここで、$\bar{\varepsilon}$ は $\bar{\varepsilon} > 1$ を満たす定数である。内側の電極に Q の外側の電極に $-Q$ の電荷を与える (図 I 参照)。

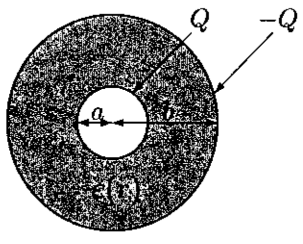


図 I

(1) 両極板間の位置 $\boldsymbol{r}$ における電界 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$、電束密度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$、電気分極 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ を求めなさい。

(2) コンデンサーの電気容量を求めなさい。

(3) 誘電体の内側の表面上の位置 $\boldsymbol{r}(|\boldsymbol{r}| = a)$ における分極電荷面密度 $\omega_{\mathrm{P}}(a)$ および誘電体の外側の表面上の位置 $\boldsymbol{r}(|\boldsymbol{r}| = b)$ における分極電荷面密度 $\omega_{\mathrm{P}}(b)$ を求めなさい。

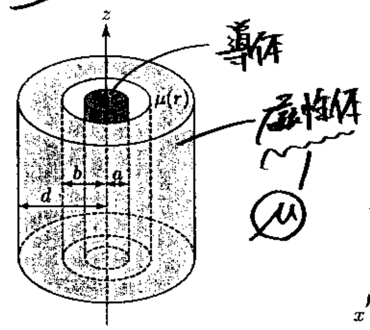
(4) 両極板間の中心からの距離 r が $r_1 \leq r \leq r_2$ の範囲の分極電荷 $q_{\mathrm{P}}(r_1, r_2)$ を求めなさい。ただし、$a < r_1 < r_2 < b$ とする。

問題 II 物質中で、電界を $\boldsymbol{E}$、電束密度を $\boldsymbol{D}$、磁束密度を $\boldsymbol{B}$、磁界を $\boldsymbol{H}$、真電荷密度を ρ_t、真電流密度を $\boldsymbol{i}_t$ とする。

(1) 物質中のマクスウェル方程式を書きなさい。

(2) デカルト座標系 (x, y, z) を用い、x, y, z 軸の正の方向の単位ベクトルを、それぞれ、$\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ とする。$\rho_t = 0$, $\boldsymbol{i}_t = \boldsymbol{0}$ で、時刻 t、位置 (x, y, z) において $\boldsymbol{E}(x, y, z, t) = E_x(z, t)\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{B}(x, y, z, t) = B_y(z, t)\boldsymbol{e}_y$ と与えられる平面電磁波を考える。$E_x(z, t)$ の従う波動方程式と、その一般解を書きなさい。この一般解を用いて、$B_y(z, t)$ がどのように表されるか書きなさい。また、時刻 t、位置 (x, y, z) におけるポインティングベクトル $\boldsymbol{S}(x, y, z, t)$ を求めなさい。
ヒント: 一般解には、2回以上微分可能な2つの任意の関数 $f(\xi)$, $g(\eta)$ を用いると良い。

問題 III 半径 a で無限に長い円柱状の導体がある。導体の外側には、導体と同軸で、内半径 $b(> a)$、外半径 $d(> b)$ で無限に長い円筒状の磁性体がある (図 III-1 参照)。導体円柱、磁性体円筒の中心軸を z 軸にとり、z 軸に垂直な平面内の位置を2次元極座標 (r, φ) で表した円柱座標系 (r, φ, z) を用いて考える。z 軸の正の向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_z$ とする。位置 (r, φ, z) において、z 軸に垂直で z 軸から遠ざかる方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r$、z 軸を中心に回転する方向 (右ねじが $\boldsymbol{e}_z$ 方向に進む方向) の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\varphi$ とする (図 III-2 参照)。互いに直交するこれらの単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_z$ を用いて位置 (r, φ, z) におけるベクトル量を表す。磁性体は $b < r < d$ の領域にあり、磁性体の透磁率は r の関数として $\mu(r) = \bar{\mu}\mu_0 \frac{r}{b}$ で与えられている。ここで、$\bar{\mu}$ は $\bar{\mu} > 1$ を満たす定数である。磁性体のない領域の透磁率は μ_0 である。導体に $\boldsymbol{e}_z$ 方向に大きさ I の定常電流を一様に流す。



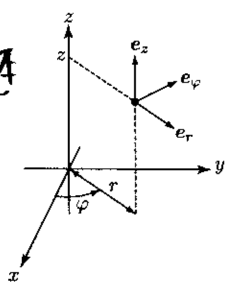


図 III-1　　図 III-2

$\frac{1}{2\pi r}$

(1) 位置 (r, φ, z) における磁束密度 $\boldsymbol{B}(r, \varphi, z)$、磁界 $\boldsymbol{H}(r, \varphi, z)$、磁化 $\boldsymbol{J}(r, \varphi, z)$ を求めなさい。

(2) 磁性体の内側の表面上の位置 $(r = b, \varphi, z)$ における面磁化電流密度ベクトル $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(b, \varphi, z)$ と磁性体の外側の表面上の位置 $(r = d, \varphi, z)$ における面磁化電流密度ベクトル $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\mathrm{m}}(d, \varphi, z)$ を求めなさい。

(3) $z =$ 一定 の平面内の $0 \leq r \leq r_1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ で指定される円形の範囲を $\boldsymbol{e}_z$ 方向に貫く磁化電流 $I_m(r_1)$ を求めなさい。$b < r_1 < d$ とする。
ヒント: $\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}$ を磁化電流密度とするとき、$\mathrm{rot}\boldsymbol{J} = \mu_0 \boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}$ の積分形を考える。あるいは、$\boldsymbol{B}$ に関するアンペールの法則 (積分形) で、全電流から真電流の寄与を差し引く。

(4) 位置 (r, φ, z) における磁化電流密度 $\boldsymbol{i}_{\mathrm{m}}(r, \varphi, z)$ を求めなさい。$b < r < d$ とする。
ヒント: (3) の結果を用い、$z =$ 一定 の平面内の $r_1 \leq r \leq r_1 + \Delta r_1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ で指定される円環の範囲を $\boldsymbol{e}_z$ 方向に貫く磁化電流 $I_{\mathrm{m}}(r_1 + \Delta r_1) - I_{\mathrm{m}}(r_1)$ を求め、円環の面積で割る。あるいは、デカルト座標 (x, y, z) においては、$r = \sqrt{x^2 + y^2}$、$\boldsymbol{e}_r = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, 0\right)$、$\boldsymbol{e}_\varphi = \left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, 0\right)$、$\boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)$ と表されることを用いる。　$n_1 \pi r_1^2 \cdot \frac{\mu_0 n_1}{4}$

問題 IV 真空中に、半径 r_1 で単位長さあたりの巻き数 n_1 のソレノイド1と、半径 r_2 の単位長さあたりの巻き数 n_2 のソレノイド2が、中心軸を共通にして配置されている。$r_1 < r_2$ である。

(1) ソレノイド1に大きさ I_1 の電流を、ソレノイド2に大きさ I_2 の電流を同じ向きに流したとき、ソレノイド2の内側の空間の単位長さあたりに蓄えられる磁界のエネルギー $\mathcal{U}_{\mathrm{m}}$ を、磁界のエネルギー密度を用いて求めなさい。

(2) ソレノイド1の単位長さあたりの自己インダクタンス $\mathcal{L}_{11}$、ソレノイド2の単位長さあたりの自己インダクタンス $\mathcal{L}_{22}$ およびソレノイド1とソレノイド2の単位長さあたりの相互インダクタンス $\mathcal{L}_{12}$ を求めなさい。

$\mu_0 \pi r (n_1 I_1 + n_2 I_2)^2$